В. Г. Журавлев, Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2011, том 392, 95–145

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 392, 2011 г.

В. Г. Журавлев

ПЕРЕКЛАДЫВАЮЩИЕСЯ ТОРИЧЕСКИЕ РАЗВЕРТКИ И МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА

Введение

1. Перекладывающиеся фигуры. В [1] с помощью перекладывающихся торических разверток T^D были построены разбиения торов $\mathbb{T}^D$ на множества ограниченного остатка. В настоящей работе такие развертки T^D конструируются на основе перекладывающихся фигур $F^D \subset \mathbb{R}^D$, трансляционно разбивающих пространство

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in L} F^D[l] \tag{0.1}$$

с помощью параллельных переносов $F^D[l] = F^D + l$ на векторы l некоторой полной решетки $L \subset \mathbb{R}^D$, где множества $F^D[l_1]$ и $F^D[l_2]$ для $l_1 \neq l_2$ не имеют общих внутренних точек.

Рассматриваются два метода построения перекладывающихся фигур. Первый метод — это вытягивание $C^D \Rightarrow C_s^D$ единичного куба $C^D = [0,1]^D$ вдоль вектора s из некоторого положительного конуса $\mathbb{R}_+^D \subset \mathbb{R}^D$. Второй, в некотором смысле обратный, — метод зеркального вытягивания $C^D \Rightarrow C_s^{*D}$.

Вытянутый куб C_s^D представляет собою выпуклый многогранник, разбивающий пространство $\mathbb{R}^D$ с помощью параллельных переносов на векторы соответствующей решетки L_s. Выпуклые многогранники такого типа, называемые параллелоэдрами, впервые были построены геометрическими методами Федоровым [2] для размерности $D = 3$ и на основе квадратичных форм Вороным [3] для $D = 3, 4$. Так, например, в наших обозначениях C_s^3 — это ромбический додекаэдр.

Геометрически наше построение многогранников C_s^D совпадает с методом В. П. Гришухина [4]. Отличие в доказательствах того, что C_s^D являются параллелоэдрами: в [4] используются квадратичные формы,

---

Ключевые слова: теорема Гекке, распределение дробных долей, множества ограниченного остатка на торе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 11-01-00578-а.

в настоящей статье — динамические системы (сдвиги торов). Данный метод также позволяет строить невыпуклые многогранники C_s^{*D}, трансляционно разбивающие пространство $\mathbb{R}^D$.

Для наших целей важными являются не сами вытянутые кубы C_s^D, C_s^{*D}, а порождаемые ими перекладывающиеся фигуры $C_{s,\alpha}^D$, $C_{s,\alpha}^{*D}$ (п.п. 1,2), зависящие от параметра $\alpha = \lambda s$, где $0 < \lambda < 1$. Фигура $F^D \subset \mathbb{R}^D$ называется перекладывающейся, если для нее задано разбиение

$$F^D = F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_D \tag{0.2}$$

на множества F_k без общих внутренних точек, а также задано перекладывание

$$\mathcal{S}_v(F^D) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_v(F_0) \cup \mathcal{S}_v(F_1) \cup \ldots \cup \mathcal{S}_v(F_D), \tag{0.3}$$

при этом $\mathcal{S}_v(F_k) = F_k[v_k]$ для v_k из некоторой фиксированной системы векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$. Множества $\mathcal{S}_v(F_k)$ снова не имеют общих внутренних точек, а сама фигура F^D инвариантна $\mathcal{S}_v(F^D) = F^D$ относительно перекладывания (0.3). В общем случае количество фигур в разбиении (0.2) может быть любым. Для применения к задаче о распределении точек на торе, которую мы будем здесь рассматривать, требуется, чтобы количество фигур было на единицу больше размерности объемлющего пространства $\mathbb{R}^D$.

2. Перекладывающиеся торические развертки. Перекладывающиеся фигуры $C_{s,\alpha}^D$, $C_{s,\alpha}^{*D}$ — это те же вытянутые кубы C_s^D, C_s^{*D} с заданными на них разбиениями вида (0.2). В п. 1.8 приведен алгоритм, который каждой перекладывающейся фигуре F^D ставит в соответствие подмножество $T^D \subset F^D$ из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & T^D & \stackrel{\operatorname{mod} L}{\stackrel{\longrightarrow}{\sim}} & \mathbb{T}^D & \\ S_v & \downarrow & & \downarrow & S_\alpha \\ & T^D & \stackrel{\operatorname{mod} L}{\stackrel{\longrightarrow}{\sim}} & \mathbb{T}^D & \end{array} \tag{0.4}$$

Здесь горизонтальные стрелки обозначаю биективное отображение $x \mapsto x \,\texttt{mod}\, L$ между множеством T^D и тором $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/L$, где L — трансляционная решетка (0.1), S_v — отображение, индуцированное перекладыванием $\mathcal{S}_v$ (0.3), и $S_\alpha(x) = x + \alpha \operatorname{mod} L$ — сдвиг тора $\mathbb{T}^D$ на некоторый вектор α. Коммутативность диаграммы (0.4) означает, что перекладывание S_v множества T^D равносильно сдвигу S_α тора

$\mathbb{T}^D$. Множества T^D с указанными выше свойствами называются перекладывающимися торическими развертками. Их значение состоит в том, что такие развертки T^D задают посредством биекции (0.4) разбиение тора

$$\mathbb{T}^D = \mathbb{T}_0^D \sqcup \mathbb{T}_1^D \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}_D^D \tag{0.5}$$

на множества $\mathbb{T}_k^D$ ограниченного остатка [1].

Заметим, что для размерности $D = 1$ коммутативность диаграммы (0.4) означает хорошо известный факт: вращение окружности эквивалентно перекладыванию двух интервалов.

3. Множества ограниченного остатка. Пусть дана перекладывающаяся торическая развертка T^D и отвечающее ей разбиение тора $\mathbb{T}^D$. Пусть S_β — сдвиг тора $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/L$ на вектор $\beta = \frac{1}{n}(\alpha + b_1 l_1 + \cdots + b_D l_D)$, при этом $n = 1, 2, 3, \ldots$, b_k — любые целые числа и векторы $l_k = v_k - v_0$ для $k = 1, \ldots, D$ образуют базис трансляционной решетки L. Для каждого множества $\mathbb{T}_k^D$ из разбиения (0.5) определим счетную функцию

$$\mathbf{r}_k(i) = \sharp\{j : S_\beta^j(0) \in \mathbb{T}_k^D, 0 \le j < i\}, \tag{0.6}$$

где $S_\beta^j(0) \equiv j\beta \,\mathtt{mod}\, L$. Тогда для любого $k = 0, 1, \ldots, D$ можно определить отклонение

$$\delta_k(i) = \mathbf{r}_k(i) - i a_k, \quad \text{где} \quad a_k = \mathrm{vol}\,\mathbb{T}_k^D/\mathrm{vol}\,\mathbb{T}^D \tag{0.7}$$

— частота попаданий за i шагов точек S_β-орбиты в область $\mathbb{T}_k^D \subset \mathbb{T}^D$. Здесь $\mathrm{vol}\,\mathbb{T}_k^D$ и $\mathrm{vol}\,\mathbb{T}^D$ обозначают соответственно объемы множеств $\mathbb{T}_k^D$ и всего тора $\mathbb{T}^D$.

Из теоремы 5.1 [1] относительно отклонений (0.7) вытекает следующий результат.

Теорема 0.1. *Пусть T^D – перекладывающаяся торическая развертка, являющаяся многогранником, $V(T^D)$ — множество вершин многогранника T^D, и пусть α — иррациональный сдвиг относительно решетки L (см. определение* (1.49)).

Тогда при любом $k = 0, 1, \ldots, D$ выполняются неравенства

$$|\delta_k(i)| \le c_k(T^D) n \tag{0.8}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь константы $c_k(T^D)$ вычисляются по формуле

$$c_k(T^D) = \max_{v \in V(T^D)} l_k^* \cdot v - \min_{v \in V(T^D)} l_k^* \cdot v, \tag{0.9}$$

где $l_1^*, \dots, l_D^*$ *— двойственный базис к базису* $l_1, \dots, l_D$ *трансляционной решетки* $L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_D]$ *и* $l_0^* = -l_1^* - \dots - l_D^*$.

Множество $X \subseteq \mathbb{T}^D$, удовлетворяющее свойству (0.8), называется *множеством ограниченного остатка.* Соглано теореме 0.1, таким является любое множество $\mathbb{T}_k^D$ из разбиения (0.5) тора $\mathbb{T}^D$. При этом константы $c_k(T^D)$ в силу формулы (0.9) не зависят от разбиения торической развертки T^D, а определяются лишь размерами самой развертки T^D.

В частном случае $D = 1$ теорема 0.1 представляет собой известный результат Гекке [5] о распределениии дробных долей на окружности.

Теорема Гекке. *Если* α *— вещественное иррациональное число,* $\beta = \frac{1}{n}(\alpha + b)$, *где* $n = 1, 2, 3, \dots$ *и* b *— произвольное целое число,*

$$\mathbf{r}_0(i) = \sharp\{j; \{j\beta\} \in [0, 1 - \alpha), 0 \le j < i\},$$
$$\mathbf{r}_1(i) = \sharp\{j; \{j\beta\} \in [1 - \alpha, 1), 0 \le j < i\}$$

— счетные функции, где $\{x\}$ *обозначает дробную часть числа* x, *и*

$$\delta_0(i) = \mathbf{r}_0(i) - i(1 - \alpha), \quad \delta_1(i) = \mathbf{r}_1(i) - i\alpha$$

— отвечающие им отклонения, то выполняются неравенства

$$|\delta_0(i)| \le n, \quad |\delta_1(i)| \le n \tag{0.10}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

В одномерном случае $C^1 = [0, 1]$ — единичный отрезок, и в силу формулы (0.9) константы $c_k(T^1) = 1$ те самые, какие требуются в неравенствах Гекке (0.10).

4. Значения констант $c_k(T^D)$ для торических разверток. На примере вытянутого куба C_s^D схема построения разбиения тора $\mathbb{T}^D$ на множества ограниченного остатка (0.5) выгдядит следующим образом.

Общая схема для вытянутого куба C_s^D

$$C^D \;\Rightarrow\; C_s^D \;\Rightarrow\; C_{s,\alpha}^D \;\Rightarrow\; T_{s,\alpha}^D \;\Rightarrow\; \mathbb{T}_{s,\alpha}^D \tag{0.11}$$

Здесь C^D — единичный D-мерный куб, C_s^D — вытянутый куб, $C_{s,\alpha}^D$ — перекладывающийся куб, зависящий от параметра $\alpha = \lambda s$, где $0 < \lambda < 1$, $T_{s,\alpha}^D$ — перекладывающаяся торическая развертка и $\mathbb{T}_{s,\alpha}^D$ — отвечающее ей разбиение тора (0.5).

Основные результаты работы доказаны в теоремах 4.1 и 4.2. Так, для множеств ограниченного остатка $\mathbb{T}_k^D \subset \mathbb{T}_{s,\alpha}^D$ в теореме 4.1 доказано, что константы $c_k(T_{s,\alpha}^D)$ в неравенстве (0.8) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_k(T_{s,\alpha}^D) &= 1 + \tfrac{D-1}{\sigma(s)+1} \quad \text{для} \quad k = 0, \\ c_k(T_{s,\alpha}^D) &= 1 + \tfrac{(D-1)s_k}{\sigma(s)+1} \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, D, \end{aligned} \tag{0.12}$$

где $\sigma(s) = s_1 + \ldots + s_D$. Из формул (0.12) вытекают два важные следствия (см. следствия 4.1 и 4.2).

1) Для константы

$$c(T_{s,\alpha}^D) = \max_{0 \le k \le D} c_k(T_{s,\alpha}^D)$$

выполняется неравенство $c(T_{s,\alpha}^D) \le D$ для любого $s \in \mathbb{R}_+^D$.

2) При $s = e_0 = (1, \ldots, 1)$ имеет место формула $c(T_{s,\alpha}^D) = 2 - \frac{2}{D+1}$ для любой размерности $D \ge 2$ и, следовательно,

$$c(T_{s,\alpha}^D) \nearrow 2 \quad \text{при} \quad D \to +\infty.$$

Для зеркально вытянутых кубов C_s^{*D} формулы, аналогичные (0.12), доказаны в теореме 4.2. В данном случае в формулах (0.12) выражение в знаменателе $\sigma(s) + 1$ заменяется на $\sigma(s) - 1$.

5. Призведения торических разверток. В п. 3 рассматривается некоторая общая конструкция произведения разверток, позволяющая из двух торических разверток T^{D_1} и T^{D_2} строить новую развертку $T^{D_1} \otimes_i T^{D_2}$ размерности $D = D_1 + D_2$. В теореме 3.1 доказывается, что произведение двух перекладывающихся разверток $T^{D_1} \otimes_i T^{D_2}$ снова будет перекладывающейся торической разверткой, а в теореме 4.3 устанавливается связь между константами исходных разверток $c_k(T^{D_1})$, $c_j(T^{D_2})$ и константой для их произведения $c_k(T^{D_1} \otimes_i T^{D_2})$.

Например, если выбрать в качестве разверток T^{D_1}, T^{D_2} перекладывающиеся отрезки, то их произведения $T^{D_1} \otimes_i T^{D_2}$ представляет собой прямоугольники, разбитые на три перекладывающиеся области, каждая из которых по теореме 3.1 является множеством ограниченного остатка. Применяя теорему 4.3 и теорему Гекке, получаем значения для их констант. Ранее специальный случай разбиений прямоугольников был исследован Szüsz [6].

Рассмотренные выше семейства разверток $T^D_{s,\alpha}$, $T^{*D}_{s,\alpha}$ для вытянутых кубов $C^D_{s,\alpha}$, $C^{*D}_{s,\alpha}$ не разложимы в произведения перекладывающихся торических разверток меньшей размерности. Поэтому данные развертки следует выбирать в качестве базисных разверток, из которых с помощью операции умножения $T^{D_1} \otimes_i T^{D_2}$ можно получать новые развертки и разбиения торов на множества ограниченного остатка. Применяя операцию умножения несколько раз, получаем расширяющееся множество разбиений (0.5) торов $\mathbb{T}^D$ с растущей размерностью D на множества ограниченного остатка $\mathbb{T}^D_k \subset \mathbb{T}^D$. При этом теорема 4.3 позволяет следить за ростом констант $c_k(T^D)$ в неравенстве (0.8) для отклонений $\delta_k(i)$ распределения точек орбит на торах.

§1. Вытянутый куб

1.1. Построение вытянутого куба. Пусть $I = [0,1]$ — единичный отрезок и

$$C^D = I \times \cdots \times I \quad (D - \text{раз}) \tag{1.1}$$

— замкнутый D-мерный единичный куб. Выделим в нем $(D-1)$-мерные грани

$$C_k = C_k^{D-1} = \{x \in C^D; x \cdot e_k = 0\}, \tag{1.2}$$

где грань C_k ортогональна единичному вектору $e_k = (0, \dots, \overset{(k)}{1}, \dots, 0)$ для $k = 1, \dots, D$. Здесь $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_D y_D$ — скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^D$. Для каждой грани C_k определим двойственную ей также $(D-1)$-грань

$$C_k^* = C_k + e_k, \tag{1.3}$$

получающуюся сдвигом грани C_k на вектор e_k. Из (1.2) следует, что любая двойственная грань C_k^* снова принадлежит единичному кубу C^D.

Обозначим $\mathbb{R}^D_+$ *положительный конус*, состоящий из $x = (x_1, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D$ с координатами $x_1 > 0, \dots, x_D > 0$. Для любого вектора s из конуса $\mathbb{R}^D_+$ определим операцию *вытягивания* $\mathtt{Str}_s$ множеств $X \subset \mathbb{R}^D$, полагая

$$\mathtt{Str}_s(X) = \bigcup_{t \in I} (X + ts). \tag{1.4}$$

Например, если множество X состоит из одной точки x, то вытянутое множество $\mathtt{Str}_s(X)$ представляет собою замкнутый отрезок из $\mathbb{R}^D$ с конечными точками x и $x+s$. Используя преобразование вытягивания (1.4), единичный куб можно записать в виде $C^D = \mathtt{Str}_{e_D}(\cdots(\mathtt{Str}_{e_1}(0)))$.

Свойства операции вытягивания $\mathtt{Str}_s$:

$$\mathtt{Str}_s(X) \subseteq \mathtt{Str}_s(X'), \tag{1.5}$$

если $X \subseteq X'$;

$$\mathtt{Str}_s(X) + v = \mathtt{Str}_s(X + v) \tag{1.6}$$

для любого вектора $v \in \mathbb{R}^D$;

$$\mathtt{Str}_\alpha(X) \subseteq \mathtt{Str}_s(X) \tag{1.7}$$

и

$$\mathtt{Str}_s(X) = \mathtt{Str}_{s-\alpha}(X) \cup \mathtt{Str}_\alpha(X'), \tag{1.8}$$

если $\alpha = ts$, $0 \le t \le 1$ и $X' = X + s - \alpha$;

$$\mathtt{Str}_s(X) + s' \subseteq \mathtt{Str}_{s+s'}(X), \tag{1.9}$$

если $s' = \lambda s$ и $\lambda \ge 0$;

$$\mathtt{Str}_s(X \cup X') = \mathtt{Str}_s(X) \cup \mathtt{Str}_s(X') \tag{1.10}$$

для любых $X, X' \subset \mathbb{R}^D$.

Далее мы будем использовать понятие *разбиения* в обычном (строгом) смысле, когда рассматриваются покрытия множеств

$$X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots$$

с условием $X_k \cap X_{k'} = \emptyset$ для $k \ne k'$, а также в расширенном смысле

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots,$$

предполагая, что различные множества X_k не имеют общих внутренних точек.

Пусть $\mathtt{Str}_s(C^D)$ — вытянутый единичный куб для некоторого вектора $s \in \mathbb{R}^D_+$. Тогда имеем разбиение

$$\mathtt{Str}_s(C^D) \setminus C^D = \bigcup_{1 \le k \le D} (\mathtt{Str}_s(C^*_k) \setminus C^*_k), \tag{1.11}$$

где $\mathtt{Str}_s(C^*_1), \ldots, \mathtt{Str}_s(C^*_D)$ — D-мерные параллелепипеды. Каждый такой параллелепипед $\mathtt{Str}_s(C^*_k)$ имеет основанием грань C^*_k, ортогональную вектору e_k, и высоту $h_k = s \cdot e_k = s_k$. Поскольку C^*_k ничто иное, как единичный $(D-1)$-мерный куб, то параллелепипед $\mathtt{Str}_s(C^*_k)$ имеет объем

$$\mathtt{vol}\,\mathtt{Str}_s(C^*_k) = \mathtt{vol}_{D-1} C^*_k \times h_k = 1 \times h_k = s_k. \tag{1.12}$$

Здесь $\mathtt{vol}_{D-1}C_k^* = 1$ обозначает $(D-1)$-мерный объем. В силу (1.11) получаем разбиение

$$\mathtt{Str}_s(C^D) = C^D \cup \mathtt{Str}_s(C_1^*) \cup \ldots \cup \mathtt{Str}_s(C_D^*). \tag{1.13}$$

Из равенств (1.12) и (1.13) находим объем

$$\operatorname{vol} C_s^D = \sigma + 1 \tag{1.14}$$

вытянутого куба $C_s^D = \mathrm{Str}_s(C^D)$ для любого вектора $s \in \mathbb{R}_+^D$. Здесь в формуле (1.14) обозначили

$$\sigma = \sigma(s) = s_1 + \cdots + s_D > 0. \tag{1.15}$$

1.2. Перекладывание вытянутого куба. Зафиксируем вектор сдвига

$$\alpha = ts, \tag{1.16}$$

где множитель t удовлетворяет условию $0 < t < 1$. Определим замкнутые многогранники

$$P_0^c = \mathtt{Str}_{s-\alpha}(C^D), \quad P_k^c = [\mathtt{Str}_s(C_k^*) \setminus P_0^c]^c \tag{1.17}$$

для $k = 1, \ldots, D$. Здесь и далее X^c обозначает замыкание множества X. Поскольку

$$P_k^c = [\mathtt{Str}_s(C_k^*) \setminus \mathtt{Str}_{s-\alpha}(C^D)]^c = \mathtt{Str}_\alpha(C_k^* + (s-\alpha)), \tag{1.18}$$

то отсюда, формулы (1.14) и условия (1.16) на вектор α получаем следующее разбиение вытянутого куба

$$C_{s,\alpha}^D = \mathtt{Str}_s(C^D) = P_0^c \cup P_1^c \cup \ldots \cup P_D^c \tag{1.19}$$

многогранниками (1.17), имеющими соответственно объемы

$$\operatorname{vol} P_0^c = (1-t)\sigma + 1 \tag{1.20}$$

и

$$\operatorname{vol} P_k^c = ts_k \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, D. \tag{1.21}$$

Зададим перекладывание

$$\mathcal{S}_v(C_{s,\alpha}^D) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_v(P_0^c) \cup \mathcal{S}_v(P_1^c) \cup \ldots \cup \mathcal{S}_v(P_D^c) \tag{1.22}$$

вытянутого куба с разбиением (1.19), где $\mathcal{S}_v(P_k^c) = P_k^c[v_k] = P_k^c + v_k$ — параллельный сдвиг многогранника P_k^c на вектор

$$v_k = \alpha - \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k = 0, \\ e_k + s, & \text{если} \quad k > 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

Перекладывание $\mathcal{S}_v$ индуцирует многозначное отображение

$$S_v : \mathtt{Str}_s(C^D) \longrightarrow \mathbb{R}^D, \tag{1.24}$$

определяемое условиями $x \mapsto S_v(x) = x + v_k$, если$x \in P_k^c$.

Предложение 1.1. *Вытянутый куб* $C_{s,\alpha}^D = \mathtt{Str}_s(C^D)$ *замкнут*

$$\mathcal{S}_v(C_{s,\alpha}^D) \subseteq C_{s,\alpha}^D$$

относительно операции перекладывания (1.22).

Доказательство. Согласно (1.18), можем записать $P_k^c = \mathtt{Str}_\alpha(C_k^* + (s-\alpha))$ для $k = 1, \ldots, D$. Тогда по (1.22) получем равенства

$$S_v(P_k^c) = P_k^c + v_k = \mathtt{Str}_\alpha(C_k^* + s - \alpha) + v_k. \tag{1.25}$$

Отсюда и свойства (1.6) имеем

$$P_k^c + v_k = \mathtt{Str}_\alpha(C_k^* + s - \alpha + v_k) = \mathtt{Str}_\alpha(C_k^* - e_k) = \mathtt{Str}_\alpha(C_k),$$

так как по (1.3) выполняется равенство $C_k^* - e_k = C_k$. Из (1.2) получаем $P_k^c + v_k = \mathtt{Str}_\alpha(C_k)$ для любого $k = 1, \ldots, D$. Из свойств (1.7) и (1.5) вытекают включения

$$\mathtt{Str}_\alpha(C_k) \subset \mathtt{Str}_s(C_k), \quad \mathtt{Str}_s(C_k) \subset \mathtt{Str}_s(C^D),$$

и поэтому выполняется включение

$$P_k^c + v_k \subset \mathtt{Str}_s(C^D). \tag{1.26}$$

Тогда по (1.22) и (1.26) имеем $\mathcal{S}_v(P_k) \subset \mathtt{Str}_s(C^D)$ для любого $k = 1, \ldots, D$.

Пусть теперь $k = 0$. В силу (1.17) и (1.22) записываем

$$P_0^c = \mathtt{Str}_{s-\alpha}(C^D) \tag{1.27}$$

и

$$\mathcal{S}_v(P_0^c) = P_0^c + v_0, \tag{1.28}$$

где $v_0 = \alpha$, согласно (1.23). Используя (1.27) и свойство (1.7), получаем включение

$$P_0^c + v_0 = \mathtt{Str}_{s-\alpha}(C^D) + \alpha \subset \mathtt{Str}_{(s-\alpha)+\alpha}(C^D) = \mathtt{Str}_s(C^D),$$

т.е. $P_0^c + v_0 \subset \mathtt{Str}_s(C^D)$, и тогда по (1.28) имеем $\mathcal{S}_v(P_0^c) \subset \mathtt{Str}_s(C^D)$.

Предложение 1.1 доказано. □

1.3. Решетка L_s и объем ее фундаментальной области. Определим в пространстве $\mathbb{R}^D$ решетку

$$L_s = \mathbb{Z}[e'_1, \dots, e'_D], \tag{1.29}$$

порождаемую векторами $e'_1 = e_1 + s, \dots, e'_D = e_D + s$, где $s = s_1 e_1 + \dots + s_D e_D$ принадлежит $\mathbb{R}^D_+$. Нам нужно убедиться, что решетка L_s *полная*, т.е. она имеет ранг $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} L = D$ над полем $\mathbb{R}$ или, что эквмвалентно, векторы $e'_1, \dots, e'_D$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Для этого вычислим определитель

$$\mathtt{det}_s = \mathtt{det} \begin{pmatrix} 1+s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_D \\ s_1 & 1+s_2 & s_3 & \cdots & s_D \\ s_1 & s_2 & 1+s_3 & \cdots & s_D \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & 1+s_D \end{pmatrix}.$$

Вычитая первую строку из всех остальных и затем прибавляя к первому столбцу все остальные, получаем равенство

$$\mathtt{det}_s = \mathtt{det} \begin{pmatrix} 1+s_1+s_2+s_3+\dots+s_D & s_2 & s_3 & \cdots & s_D \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

откуда для определителя $\mathtt{det}_s$ вытекает формула

$$\mathtt{det}_s = 1 + \sigma. \tag{1.30}$$

По условию $\sigma > 0$, поэтому имеем $\mathtt{det}_s > 1$. Отсюда вытекает

Лемма 1.1. *Для любого вектора s из конуса $\mathbb{R}^D_+$ решетка L_s (1.29) полная.*

Определим подмножество

$$\mathcal{T}_s = \{t_1 e'_1 + \dots + t_D e'_D; \quad t_1, \dots, t_D \in [0,1)\} \subset \mathbb{R}^D. \tag{1.31}$$

Оно является *фундаментальной областью* решетки L_s и, согласно (1.30), имеет объем

$$\mathtt{vol}\, \mathcal{T}_s = \sigma + 1. \tag{1.32}$$

Сравнивая (1.32) с аналогичным равенством (1.14) для объема вытянутого куба C^D_s, получаем

$$\mathtt{vol}\, C^D_s = \mathtt{vol}\, \mathcal{T}_s. \tag{1.33}$$

Фундаментальная область $\mathcal{T}_s$ обладает следующими двумя свойствами.

Свойство 1. Все пространство $\mathbb{R}^D$ разбивается

$$\mathbb{R}^D = \coprod_{l \in L_s} \mathcal{T}_s[l] \tag{1.34}$$

на области $\mathcal{T}_s[l] = \mathcal{T}_s + l$.

Свойство 2. Пусть $\mathbb{T}_s^D \simeq \mathbb{R}^D / L_s$ — тор размерности D с решеткой периодов L_s. Тогда отображение факторизации

$$\mathcal{T}_s \overset{\operatorname{mod} L_s}{\overset{\longrightarrow}{\sim}} \mathbb{T}_s^D : \quad x \mapsto x \,\mathtt{mod}\, L_s \tag{1.35}$$

задает биекцию.

1.4. Сдвиг тора. Пусть $C_{s,\alpha}^D = \mathtt{Str}_s(C^D)$ — вытянутый единичный куб с разбиением (1.19) и S_v — многозначное отбражение (1.24). Из предложения 1.1 следует, что куб $C_{s,\alpha}^D$ замкнут

$$S_v : C_s^D \longrightarrow C_s^D \tag{1.36}$$

относительно отображения S_v, а из (1.23) и (1.29) вытекает сравнение $v_k \equiv \alpha \bmod L_s$ для любого $k = 0, 1, \ldots, D$. Отсюда получаем

$$S_v(x) \equiv x + \alpha \bmod L_s. \tag{1.37}$$

Это означает, что многозначное отображение S_v становится однозначным на вытянутом кубе C_s^D, если отображение S_v рассмотреть по $\operatorname{mod} L_s$.

Определим на торе $\mathbb{T}_s^D \simeq \mathbb{R}^D / L_s$ сдвиг

$$S_\alpha : \mathbb{T}_s^D \longrightarrow \mathbb{T}_s^D, \tag{1.38}$$

полагая $S_\alpha(x) = x + \alpha \bmod L_s$. Из (1.36)-(1.38) вытекает, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccccc} & C_s^D & \xrightarrow{S_v} & C_s^D & \\ \operatorname{mod} L_s & \downarrow & & \downarrow & \operatorname{mod} L_s \\ & \mathbb{T}_s^D & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}_s^D & \end{array} \tag{1.39}$$

1.5. Координаты и иррациональность вектора сдвига α. Выберем вектор

$$s = s_1e_1 + \cdots + s_De_D \tag{1.40}$$

из конуса $\mathbb{R}_+^D$ и найдем его представление

$$s = s_1'e_1' + \cdots + s_D'e_D' \tag{1.41}$$

через базис $e_1', \ldots, e_D'$, определенный в (1.29).

Лемма 1.2. *Для любого вектора $s \in \mathbb{R}_+^D$ имеет место следующая формула связи между координатами* (1.40) *и* (1.41):

$$s_k' = \frac{1}{\sigma + 1}s_k. \tag{1.42}$$

Доказательство. Используя (1.29), запишем вектор (1.41) в виде

$$s = s_1'e_1 + \cdots + s_D'e_D + \sigma's,$$

где $\sigma' = s_1' + \cdots + s_D'$. Отсюда получаем равенство

$$(1-\sigma')s = s_1'e_1 + \cdots + s_D'e_D. \tag{1.43}$$

Предположим, что $\sigma' \neq 1$. Тогда из (1.40) и (1.43) получаем $\frac{s_k'}{1-\sigma'} = s_k$, или иначе это можем переписать в виде

$$s_k' = (1-\sigma')s_k \tag{1.44}$$

для всех $k = 1, \ldots, D$. С помощью (1.44) находим

$$\begin{aligned} \sigma' &= s_1' + \cdots + s_D' = (1-\sigma')s_1 + \cdots + (1-\sigma')s_D = \\ &= (1-\sigma')(s_1 + \cdots + s_D) = (1-\sigma')\sigma, \end{aligned} \tag{1.45}$$

где σ определено равенством (1.15). Из (1.45) выводим формулу связи

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sigma + 1}, \tag{1.46}$$

из которой следуют неравенства $0 < \sigma' < 1$, так как по условию $\sigma > 0$. Из (1.44) и (1.46) получаем формулу (1.42). Поскольку векторы $e_1', \ldots, e_D'$ линейно независимы, то для любого вектора s существуют единственным образом определенные координаты s_k' из разложения (1.41). Непосредственные вычисления показывают, что значения s_k', определенные формулой (1.42), удовлетворяют равенству (1.41), а значит, они являются координатами вектора s в базисе $e_1', \ldots, e_D'$. $\square$

Пусть

$$\alpha = \alpha'_1 e'_1 + \cdots + \alpha'_D e'_D. \tag{1.47}$$

Из равенства $\alpha = ts$ и разложения (1.41) следует $\alpha = ts = ts'_1 e'_1 + \cdots + ts'_D e'_D$, откуда, используя лемму 1.2, для координат из (1.47) выводим формулу

$$\alpha'_k = ts'_k = \frac{t}{\sigma + 1} s_k \tag{1.48}$$

для $k = 1, \ldots, D$. Вектор α назовем *иррациональным относительно решетки* L_s, если числа

$$\alpha'_1, \ldots, \alpha'_D, 1 \quad \text{линейно независимы над} \quad \mathbb{Z}. \tag{1.49}$$

Из формулы (1.48) вытекает следующий ***критерий***:

вектор $\alpha = ts$, где $0 < t < 1$, будет иррациональным относительно решетки L_s тогда и только тогда, когда числа

$$s_1, \ldots, s_D, \tfrac{\sigma+1}{t} \quad \text{линейно независимы над} \quad \mathbb{Z}. \tag{1.50}$$

Лемма 1.3. ***(о деформации).*** *Пусть дан произвольный вектор* $s = s_1 e_1 + \cdots + s_D e_D$ *из* $\mathbb{R}^D_+$ *и вектор* $\alpha = ts$, *где* $0 < t < 1$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует вектор* $s_\varepsilon \in \mathbb{R}^D_+$ *и скаляр* $0 < t_\varepsilon < 1$, *удовлетворяющие следующим условиям*:

$$|s - s_\varepsilon| < \varepsilon, \quad |t - t_\varepsilon| < \varepsilon \tag{1.51}$$

и вектор $\alpha_\varepsilon = t_\varepsilon s_\varepsilon$ *является иррациональным относительно решетки* L_{s_ε}.

Доказательство. *Шаг 1.* Выберем вектор $s_\varepsilon = s_{1,\varepsilon} e_1 + \cdots + s_{D,\varepsilon} e_D$ из области $\mathbb{R}^D_+$ с условием (1.51) так, чтобы его координаты $s_{1,\varepsilon}, \ldots, s_{D,\varepsilon}$ были линейно независимы над $\mathbb{Z}$. *Шаг 2.* Малым шевелением t заменим его на скаляр $0 < t_\varepsilon < 1$, удовлетворяющий условию (1.51) и еще дополнительному условию, чтобы числа $s_{1,\varepsilon}, \ldots, s_{D,\varepsilon}, \frac{1+\sigma_\varepsilon}{t_\varepsilon}$ были бы линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Тогда из критерия (1.50) будет следовать, что вектор α_ε иррационален относительно деформированной решетки L_{s_ε}. $\square$

Замечание 1.1. Лемма 1.3 говорит о том, что вектор α обладает свойством *общего положения*: при любом сколь угодно малом шевелении параметров s и t вектор α можно сделать иррациональным.

1.6. Разбиение пространства вытянутыми кубами. В силу разбиения (1.34) для любого $x \in \mathbb{R}^D$ существует единственный вектор $l \in L_s$ с условием $x' = x + l \in \mathcal{T}_s$. Используя данный факт, можно ввести *дробную долю* $\mathtt{Fr}_s(x)$, определяемую двумя свойствами:

$$\mathtt{Fr}_s(x) \equiv x \,\mathtt{mod}\, L_s, \quad \mathtt{Fr}_s(x) \in \mathcal{T}_s. \tag{1.52}$$

Также в силу существования разбиения (1.34) существует изоморфизм

$$\mathbb{T}_s^D \overrightarrow{\sim} \mathcal{T}_s : \quad x \bmod L_s \mapsto \mathtt{Fr}_s(x),$$

с помощью которого перенесем сдвиг S_α тора $\mathbb{T}_s^D$ на фундаментальную область (1.31), полагая

$$\mathcal{T}_s \xrightarrow{S_\alpha} \mathcal{T}_s : \quad \mathtt{Fr}_s(x) \mapsto \mathtt{Fr}_s(x+\alpha). \tag{1.53}$$

Из (1.52) и (1.53) получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{T}_s^D & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}_s^D & \\ \simeq & \downarrow & & \downarrow & \simeq \\ & \mathcal{T}_s & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathcal{T}_s & \end{array}$$

Соединяя ее с (1.39), получаем еще одну коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & C_{s,\alpha}^D & \xrightarrow{S_v} & C_{s,\alpha}^D & \\ \mathtt{Fr}_s & \downarrow & & \downarrow & \mathtt{Fr}_s \\ & \mathcal{T}_s & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathcal{T}_s & \end{array} \tag{1.54}$$

связывающую отображение перекладывания (1.24) вытянутого куба $C_{s,\alpha}^D$ со сдвигом (1.53) фундаментальной области $\mathcal{T}_s$. Здесь в диаграмме (1.54) вертикальные стрелки обозначают отображение $x \mapsto \mathtt{Fr}_s(x)$.

Выберем какую-нибудь начальную точку $x_0^* \in C_s^D$ и рассмотрим ее орбиту относительно отображения (1.24)

$$\mathtt{Orb}_{S_v}(x_0^*) = \{x_i^* = S_v^i(x_0^*); i = 0,1,2,\ldots\}.$$

Аналогично для образа $x_0 = \mathtt{Fr}_s(x_0^*)$ из области $\mathcal{T}_s$ определим его орбиту относительно сдвига (1.53)

$$\mathtt{Orb}_{S_\alpha}(x_0) = \{x_i = S_\alpha^i(x_0); i = 0,1,2,\ldots\}.$$

Из диаграммы (1.54) следует, что точки данных орбит связаны соотношением

$$x_i^* \equiv x_i \,\mathtt{mod}\, L_s \tag{1.55}$$

для любого $i = 0,1,2,\ldots$

Пусть α будет иррациональным сдвигом тора $\mathbb{T}_s^D$ и z — любая фиксированная точка из фундаментальной области $\mathcal{T}_s$. Выберем некоторую последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ с условием $\varepsilon_i > 0$ и $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$. Тогда для любого i найдется точка $x_{i'}$ из орбиты $\mathtt{Orb}_{S_\alpha}(x_0)$ такая, что z принадлежит открытому шару $B(x_{i'}, \varepsilon_i)$ с центром в точке $x_{i'}$ радиуса ε_i. Отсюда получаем

$$z = x_{i'} + y_i \quad \text{и} \quad z \in B(x_{i'}, \varepsilon_i) \tag{1.56}$$

для некоторого вектора $y_i \in \mathbb{R}^D$ длины $|y_i| \le \varepsilon_i$. Рассмотрим точку

$$z_i^* = x_{i'}^* + y_i. \tag{1.57}$$

Она не обязательно попадает в вытянутый куб C_s^D. В силу свойства (1.55) и равенства (1.57) имеем

$$z_i^* \equiv z \bmod L_s \quad \text{и} \quad z_i^* \in B(x_{i'}^*, \varepsilon_i) \subset B(C_s^D, \varepsilon_i), \tag{1.58}$$

где $B(C_s^D, \varepsilon_i)$ обозначает ε_i-окрестность вытянутого куба C_s^D. Итак, получаем бесконечную последовательность точек $z_1^*, z_2^*, \ldots$, удовлетворяющих условиям (1.58). Следовательно,

$$\begin{cases} z_i^* = z + m_i, & \text{где} \quad m_i \in L_s, \\ z_i^* \in B(C_s^D, \varepsilon_1) \end{cases} \tag{1.59}$$

для любого $i = 1, 2, \ldots$ Из (1.59) вытекают включения

$$m_i \in (B(C_s^D, \varepsilon_1) - z) \cap L_s. \tag{1.60}$$

По построению множество C_s^D ограничено, поэтому справа в (1.60) находится конечное множество векторов решетки L_s. Отсюда вытекает существование такой бесконечной подпоследовательности $i_1, i_2, \ldots$, что векторы $m_{i_1} = m_{i_2} = \ldots = m \in L_s$ не зависят от номера i_j. Поэтому в силу (1.59) точки $z_{i_1}^* = z_{i_2}^* = \ldots = z^*$ также не зависят от номера i_j. Получаем равенства

$$z^* = x_{i'_j}^* + y_{i_j}$$

для $j = 1, 2, \ldots$, из которых и (1.56) вытекают свойства

$$z^* \equiv z \bmod L_s \quad \text{и} \quad z^* \in B(C_s^D, \varepsilon_{i_j}), \tag{1.61}$$

где $\varepsilon_{i_j} \to 0$ при $j \to \infty$. Так как по построению п. 1.1 вытянутый куб C_s^D представляет собою замкнутое множество, то из (1.61) вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.4. *Если α — иррациональный сдвиг тора $\mathbb{T}_s^D$, то для любой точки $z \in \mathcal{T}_s$ найдется точка $z^* \in \mathbb{R}^D$, обладающая свойствами:*

$$z^* \in C_s^D \quad \text{и} \quad z^* \equiv z \bmod L_s.$$

Отсюда выводим еще одно утверждение.

Лемма 1.5. *В случае иррационального α существует покрытие*

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in L_s} C_s^D[l] \tag{1.62}$$

пространства $\mathbb{R}^D$ многогранниками $C_s^D[l] = C_s^D + l$.

Доказательство вытекает из существования разбиения (1.34) пространства $\mathbb{R}^D$ на области $\mathcal{T}_s[l]$ и леммы 1.4. □

Обозначим $L_s(R)$ множество векторов $l \in L_s$, для которых $C_s^D[l] \cap B(0, R) \neq \emptyset$. Для количества точек $\sharp L_s(R)$ множества $L_s(R)$ выполняется ассимптотическая формула, вытекающая из [7],

$$\sharp L_s(R) = \mathtt{vol} B(0, R)/\mathtt{vol} F_s\,(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad R \to \infty. \tag{1.63}$$

Вычислим следующую сумму

$$\sigma(R) = \sum_{l \in L_s(R)} \mathtt{vol} C_s^D[l]. \tag{1.64}$$

Поскольку $\mathtt{vol} C_s^D[l] = \mathtt{vol} C_s^D$ и, согласно (1.33), выполняется равенство $\mathtt{vol} C_s^D = \mathtt{vol} \mathcal{T}_s$, то отсюда находим

$$\sigma(R) = \sharp L_s(R) \mathtt{vol} C_s^D = \sharp L_s(R) \mathtt{vol} \mathcal{T}_s. \tag{1.65}$$

Из (1.63) и (1.65) для суммы $\sigma(R)$ выводим ассимптотическую формулу

$$\sigma(R) = \mathtt{vol} B(0, R)(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad R \to \infty. \tag{1.66}$$

Попробуем вычислить сумму $\sigma(R)$ другим способом. С этой целью разобъем вытянутый куб C_s^D на области

$$C_s^D = \coprod_i C_{s,i}^D, \tag{1.67}$$

где область $C_{s,i}^D$ состоит из точек $x \in C_s^D$, покрываемых i областями $C_s^D[l]$ из покрытия (1.62), включая сам куб $C_s^D = C_s^D[0]$. Поскольку все области $C_s^D[l]$ являются многогранниками и L_s — решетка, то разбиение (1.67) конечное, скажем состоит из m областей. При этом каждая область $C^D_{s,i}$ кубируемая, т.е. имеет объем $\mathtt{vol}C^D_{s,i}$. Из разбиения (1.67) следует равенство

$$\mathtt{vol}C^D_s = \sum_{1\le i\le m} \mathtt{vol}C^D_{s,i}. \tag{1.68}$$

Из (1.64) получаем

$$\sigma(R) = \sum_{l\in L_s(R)} \sum_{1\le i\le m} \mathtt{vol}C^D_{s,i} = \tag{1.69}$$

$$= \sharp L_s(R)(\mathtt{vol}C^D_{s,1} + 2\mathtt{vol}C^D_{s,2} + \cdots + m\mathtt{vol}C^D_{s,m}).$$

Разобъем сумму в скобках на две части:

$$\mathtt{vol}C^D_{s,1} + \mathtt{vol}C^D_{s,2} + \cdots + \mathtt{vol}C^D_{s,m},$$

равную $\mathtt{vol}C^D_s = \mathtt{vol}\mathcal{T}_s$ в силу (1.68), и сумму

$$\mathtt{vol}C^D_{s,2} + 2\mathtt{vol}C^D_{s,3} + \cdots + (m-1)\mathtt{vol}C^D_{s,m}.$$

Отсюда и (1.69) находим

$$\sigma(R) = \sharp L_s(R)\mathtt{vol}\mathcal{T}_s + \sharp L_s(R)(\mathtt{vol}C^D_{s,2} + 2\mathtt{vol}C^D_{s,3} + \cdots + (m-1)\mathtt{vol}C^D_{s,m}). \tag{1.70}$$

Поэтому, используя (1.70) и (1.63), можем записать равенство

$$\sigma(R) = \mathtt{vol}B(0,R)(1+o(1)) + \tag{1.71}$$

$$+\mathtt{vol}B(0,R)/\mathtt{vol}F_s(\mathtt{vol}C^D_{s,2} + 2\mathtt{vol}C^D_{s,3} + \cdots + (m-1)\mathtt{vol}C^D_{s,m})(1+o(1)).$$

Так как $\mathtt{vol}B(0,R) \to \infty$ при $R \to \infty$ и любой объем $\mathtt{vol}C^D_{s,i} \ge 0$ для всех $i = 1,\ldots,m$, то, сравнивая асимптотические формулы (1.66) и (1.71), приходим к выводу

$$\mathtt{vol}C^D_{s,i} = 0 \quad \text{для всех} \quad i = 2,\ldots,m. \tag{1.72}$$

Теорема 1.1. *Для любого вектора $s \in \mathbb{R}^D_+$ имеет место разбиение*

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l\in L_s} C^D_s[l]. \tag{1.73}$$

Доказательство. 1. Пусть вектор $s \in \mathbb{R}^D_+$ такой, что отвечающий ему вектор сдвига $\alpha = ts$ будет иррациональным (1.49) при некотором $0 < t < 1$. При этом условии разбиение (1.73) следует из леммы 1.5 и равенств (1.72).

2. Теперь рассмотрим случай вектора $s \in \mathbb{R}^D_+$, когда для любого $0 < t < 1$ соответствующий вектор сдвига $\alpha = ts$ не является иррациональным. По лемме 1.3 (о деформации) для любого $\varepsilon > 0$ существуют вектор $\overline{s} \in \mathbb{R}^D_+$ и $0 < \overline{t} < 1$, удовлетворяющие свойствам

$$|\overline{s} - s| < \varepsilon, \quad |\overline{t} - t| < \varepsilon,$$

такие, что отвечающий им вектор сдвига α будет иррациональным. Условимся рассматривать вытянутый куб C^D_s и решетку L_s как ε-деформацию (1.51) соответственно куба $C^D_{\overline{s}}$ и решетки $L_{\overline{s}}$. В этом случае, как уже доказано, существует разбиение

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{\overline{l} \in L_{\overline{s}}} C^D_{\overline{s}}[\overline{l}]. \tag{1.74}$$

Рассмотрим для области $C^D_{\overline{s}} = C^D_{\overline{s}}[\overline{0}] = C^D_{\overline{s}}[0]$ все ее соседние области $C^D_{\overline{s}}[\overline{l}_1], \ \ldots, \ C^D_{\overline{s}}[\overline{l}_m]$ из разбиения (1.74). Если $\varepsilon > 0$ выбрать достаточно малым, то область $C^D_s = C^D_s[0]$ может пересекаться только с областями

$$C^D_s[l_1], \quad \ldots, \quad C^D_s[l_m], \tag{1.75}$$

где векторы $l_i \in L_s$ имеют те же координаты в базисе решетки L_s, что и векторы $\overline{l}_i$ в базисе решетки $L_{\overline{s}}$. Заметим, что при этом соглашении $\overline{0} = 0$. Пусть $v(\varepsilon)$ — объем пересечения области C^D_s со всеми областями (1.75). Из определения ε-деформации вытекает

$$v(\varepsilon) \le \delta_\varepsilon, \quad \text{где} \quad \delta_\varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Так как ε — произвольное сколь угодно малое число, то отсюда следует

$$v(\varepsilon) = 0 \qquad \text{для всех достаточно малых} \quad \varepsilon > 0.$$

Но объем $v(\varepsilon)$ не зависит от ε, поэтому область $C^D_s = C^D_s[0]$ не пересекается по внутренним точкам ни с одной областью $C^D_s[l]$ для $l \in L_s$, $l \neq 0$. С другой стороны, $\mathtt{vol} C^D_s = \mathtt{vol} \mathcal{T}_s$. Поэтому не существует точки $x \in \mathbb{R}^D$, которая вместе со своей некоторой окрестностью не содержалась бы в объединении из правой части равенства (1.73). А так как все области $C^D_s[l]$ замкнутые, то любая точка $x \in \mathbb{R}^D$ принадлежит объединению из (1.73). Отсюда выводим утверждение теоремы для второго случая. $\square$

Таким образом, вытянутый куб C^D_s — это выпуклый многогранник, параллельными переносами разбивающий пространство $\mathbb{R}^D$. Как уже отмечалось во введении, такие многогранники называются параллелоэдрами.

1.7. Определение перекладывающихся торических разверток. Подмножество $T^D \subset \mathbb{R}^D$ назовем *перекладывающейся торической разверткой*, если оно удовлетворяет следующим условиям.

1) Множество T^D ограниченно.

2) Задано разбиение

$$T^D = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_D \tag{1.76}$$

на непересекающиеся множества T_k.

3) С помощью разбиения (1.76) и некоторой фиксированной системы векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ из $\mathbb{R}^D$ задано перекладывание

$$\mathcal{S}_v(T^D) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_v(T_0) \cup \mathcal{S}_v(T_1) \cup \ldots \cup \mathcal{S}_v(T_D), \tag{1.77}$$

где $\mathcal{S}_v(T_k) = T_k[v_k]$.

4) Множество T^D замкнуто относительно перекладывания $\mathcal{S}_v$, т.е. выполняется включение $\mathcal{S}_v(T^D) \subseteq T^D$.

5) Отображение факторзации

$$T^D \overset{\operatorname{mod} L_v}{\overrightarrow{\sim}} \mathbb{T}^D_v : \quad x \mapsto x \,\mathtt{mod}\, L_v \tag{1.78}$$

задает биекцию между T^D и тором $\mathbb{T}^D_v \simeq \mathbb{R}^D/L_v$, где $L_v = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_D]$ — полная решетка из $\mathbb{R}^D$ с базисом $l_k = v_k - v_0$ для $k = 1, \ldots, D$.

6) Коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{cccc} & T^D & \overset{\operatorname{mod} L_v}{\overrightarrow{\sim}} & \mathbb{T}^D_v & \\ S_v & \downarrow & & \downarrow & S_\alpha \\ & T^D & \overset{\operatorname{mod} L_v}{\overrightarrow{\sim}} & \mathbb{T}^D_v & \end{array} \tag{1.79}$$

где S_v — отображение $S_v(x) = x + v_k$, если $x \in T_k$, индуцированное перекладыванием $\mathcal{S}_v$, и $S_\alpha(x) = x + \alpha \operatorname{mod} L_v$ — сдвиг тора $\mathbb{T}^D_v$ на вектор $\alpha \equiv v_0 \operatorname{mod} L_v$.

Торическую развертку T^D будем называть *кубируемой*, если сама T^D и ее составляющие множества T_k будут кубируемы.

Замечание 1.2. 1. В общей ситуации требование ограниченности развертки T^D не является обязательным. Мы рассматриваем исключительно ограниченные развертки T^D, поскольку они порождают на торе $\mathbb{T}^D_v$ множества ограниченного остатка (см. введение, п. 3), а сами развертки T^D будут конструироваться с помощью вытянутых кубов $C_{s,\alpha}^D$ из п. 1.8 и двойственных им кубов $C_{s,\alpha}^{*D}$ из п. 2, состоящих из конечного числа многогранников. При этом, если развертка T^D кубируема, то тор $\mathbb{T}_v^D$ будет разбит на кубируемые множества.

2. В определении вектора сдвига $\alpha \equiv v_0 \bmod L_v$ тора $\mathbb{T}_v^D$ вектор v_0 может быть заменен любым другим вектором $v_k \in v$, поскольку $v_k \equiv v_0 \,\mathtt{mod}\, L_v$.

1.8. Построение перекладывающихся торических разверток. Чтобы построить для вытянутого куба $C_{s,\alpha}^D$ с разбиением (1.19) соответствующую ему перекладывающуюся торическую развертку $T_{s,\alpha}^D \subset \mathbb{R}^D$, нам потребуется следующий алгоритм, определяющий индекс $i(x)$ точек $x \in C_{s,\alpha}^D$ в случае иррационального сдвига α.

i-Алгоритм. Шаг 1. *Для точки $x \in C_{s,\alpha}^{D\,int}$ полагаем*

$$i(x) = k, \quad \text{где} \quad k \quad \text{— наименьший номер с условием} \quad x \in P_k^c. \tag{1.80}$$

Тем самым, мы определили индексы $i(x)$ для всех внутренних точек x из $C_{s,\alpha}^D$. Как следствие, отсюда вытекает, что отображение перекладывания S_v однозначно определено на $C_{s,\alpha}^{D\,int}$.

Шаг 2. *Пусть точка x принадлежит границе $\partial C_{s,\alpha}^D$ многогранника $C_{s,\alpha}^D$, и пусть существует точка $x' \in C_{s,\alpha}^{D\,int}$ с условием*

$$S_v(x') = x. \tag{1.81}$$

Тогда индекс $i(x)$ также определяем по правилу (1.80).

Шаг 3. *Пусть $x_1 = x$ — та же самая точка, что была на шаге 2. Так как индекс точки x_1 уже определен, то однозначно определен ее образ $x_2 = S_v(x_1)$. Если $x_2 \in \partial C_{s,\alpha}^D$, то приписываем ей индекс $i(x_2)$ по правилу* (1.80). *Затем рассматриваем точку $x_3 = S_v(x_2)$ и т.д. Если на каком-то шаге окажется $x_j = S_v(x_{j-1})$ внутренней точкой $C_{s,\alpha}^D$, то для нее индекс $i(x_j)$ уже был определен на шаге* 1.

Шаг 4. *Пусть точка $y \in \partial C_{s,\alpha}^D$ не удовлетворяет условию* (1.81) *и не попадает ни в какую S_v-орбиту точек $x \in \partial C_{s,\alpha}^D$ с условием* (1.81). *Таким точкам y припишем индекс $i(y) = -1$.*

Из i-алгоритма вытекает, что любая точка x из вытянутого куба $C_{s,\alpha}^D$ имеет однозначно определенный *индекс* $i(x) = -1, 0, 1, \ldots, D$.

Используя индекс $i(x)$, определим следующие множества

$$P_k = \{x \in C_{s,\alpha}^D; i(x) = k\} \tag{1.82}$$

для $k = 0, 1, \ldots, D$. Из однозначности индекса $i(x)$ следует $P_{k_1} \cap P_{k_2} = \varnothing$, если $k_1 \neq k_2$.

Теорема 1.2. *В случае иррационального сдвига α множество*

$$T^D_{s,\alpha} = P_0 \sqcup P_1 \sqcup \ldots \sqcup P_D \tag{1.83}$$

является перекладывающейся торической разверткой из $\mathbb{R}^D$.

Доказательство. Проверим, что так определенное множество $T^D_{s,\alpha}$ удовлетворяет всем требованиям определения перекладывающихся торических разверток из п. 1.7. По (1.39) имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{cccc} & C^D_{s,\alpha} & \overset{\text{mod}\, L_s}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & \mathbb{T}^D_s & \\ S_v & \downarrow & & \downarrow & S_\alpha \\ & C^D_{s,\alpha} & \overset{\text{mod}\, L_s}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & \mathbb{T}^D_s & \end{array} \tag{1.84}$$

где горизонтальные стрелки — сюръективные отображения, а S_v — отображение (1.24). Имеем цепочку отображений

$$T^D_{s,\alpha} \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} C^D_{s,\alpha} \xrightarrow{\text{mod}\, L_s} \mathbb{T}^D_s,$$

где em — вложение. Нам нужно показать, что композиция этих отображений $T^D_{s,\alpha} \overset{\text{mod}\, L_s}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \mathbb{T}^D_s$ — биекция. Действительно, из 2 и 3 шагов i-алгоритма следует, что

$$\partial T^D_{s,\alpha} \bmod L_s = \partial C^D_{s,\alpha} \bmod L_s$$

и

$$x_1 \not\equiv x_2 \bmod L_s \quad \text{для любых} \quad x_1 \neq x_2 \in \partial T^D_{s,\alpha},$$

а по 1 шагу имеем равенство $T^{D\,\text{int}}_{s,\alpha} = C^{D\,\text{int}}_{s,\alpha}$. Отсюда вытекает биективность отображения

$$T^D_{s,\alpha} \overset{\text{mod}\, L_s}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \mathbb{T}^D_s : \quad x \mapsto x \bmod L_s,$$

где $\mathbb{T}^D_s = \mathbb{R}^D / L_s$. Замкнутость

$$\mathcal{S}_v(T^D_{s,\alpha}) \subseteq T^D_{s,\alpha},$$

где $\mathcal{S}_v(T^D_{s,\alpha}) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{S}_v(P_0) \cup \mathcal{S}_v(P_1) \cup \ldots \cup \mathcal{S}_v(P_D)$, множества $T^D_{s,\alpha}$ относительно перекладывания $\mathcal{S}_v : P_k \longrightarrow P_k[v_k]$ для $k = 0, 1, \ldots, D$ следует из 2 и 3 шагов i-алгоритма. Коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & T^D_{s,\alpha} & \overset{\mathrm{mod}\, L_v}{\overrightarrow{\sim}} & \mathbb{T}^D_s & \\ \mathcal{S}_v & \downarrow & & \downarrow & S_\alpha \\ & T^D_{s,\alpha} & \overset{\mathrm{mod}\, L_v}{\overrightarrow{\sim}} & \mathbb{T}^D_s & \end{array} \tag{1.85}$$

вытекает из коммутативности диаграммы (1.84). Остальные требования из определения перекладывающихся торических разверток п. 1.7 вытекают непосредственно из определения (1.82), (1.83) множества $T^D_{s,\alpha}$. □

Итак, мы доказали, что любому вытянутому кубу C^D_s с разбиением $C^D_{s,\alpha}$ из (1.19) i-алгоритм ставит в соответствие

$$C^D_s \quad \Rightarrow \quad C^D_{s,\alpha} \quad \Rightarrow \quad T(C^D_{s,\alpha}) = T^D_{s,\alpha} \tag{1.86}$$

перекладывающуюся торическую развертку $T^D_{s,\alpha} \subset C^D_s$ с разбиением (1.83). Ее роль состоит в том, посредством биекции (1.85) она задает разбиение тора

$$\mathbb{T}^D_{s,\alpha} = \mathbb{T}^D_0 \sqcup \mathbb{T}^D_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}^D_D \tag{1.87}$$

на множества $\mathbb{T}^D_k = P_k \,\mathrm{mod}\, L_s$ ограниченного остатка [1]. Тор с разбиением (1.87) будем обозначать

$$\mathbb{T}^D_{s,\alpha} = \mathbb{T}(T^D_{s,\alpha}). \tag{1.88}$$

По i-алгоритму разбиение (1.87) на торе $\mathbb{T}^D_s$ определяется неоднозначно на границах многогранников $P^c_k \,\mathrm{mod}\, L_s$.

Сдвиг $S_\alpha : \mathbb{T}^D_s \overrightarrow{\sim} \mathbb{T}^D_s$ является автоморфизмом тора. Поэтому он задает перекладывание на множестве (1.87), обладающее свойством

$$S_\alpha(\mathbb{T}^D_{s,\alpha}) = \mathbb{T}^D_{s,\alpha}, \tag{1.89}$$

где $S_\alpha(\mathbb{T}^D_{s,\alpha}) = S_\alpha(\mathbb{T}^D_0) \sqcup S_\alpha(\mathbb{T}^D_1) \sqcup \ldots \sqcup S_\alpha(\mathbb{T}^D_D)$ — разбиение. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & T^D_{s,\alpha} & \overset{\mathrm{mod}\, L_s}{\overrightarrow{\sim}} & \mathbb{T}^D_{s,\alpha} & \\ S_v & \downarrow & & \downarrow & S_\alpha \\ & T^D_{s,\alpha} & \overset{\mathrm{mod}\, L_s}{\overrightarrow{\sim}} & \mathbb{T}^D_{s,\alpha} & \end{array}$$

следует, что $S_v : T^D_{s,\alpha} \overrightarrow{\sim} T^D_{s,\alpha}$ — биективное отображение. Следовательно, перекладывание $\mathcal{S}_v$ развертки $T^D_{s,\alpha}$ обладает свойствами:

$$\mathcal{S}_v(T^D_{s,\alpha}) = T^D_{s,\alpha}, \tag{1.90}$$

где

$$\mathcal{S}_v(T^D_{s,\alpha}) = \mathcal{S}_v(P_0) \sqcup \mathcal{S}_v(P_1) \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{S}_v(P_D) \tag{1.91}$$

— разбиение. Таким образом, перекладывающаяся торическая развертка $T^D_{s,\alpha}$ действительно является перекладывающимся множеством относительно операции (1.91). Рассматривая замыкание всех множеств из разбиения (1.91) развертки $T^D_{s,\alpha}$, получаем снова разбиение (1.19) вытянутого куба

$$C^D_{s,\alpha} = P^c_0 \cup P^c_1 \cup \ldots \cup P^c_D. \tag{1.92}$$

Отсюда и (1.90), (1.91) вытекает равенство

$$\mathcal{S}_v(C^D_{s,\alpha}) = C^D_{s,\alpha}, \tag{1.93}$$

где $\mathcal{S}_v(C^D_{s,\alpha}) = \mathcal{S}_v(P^c_0) \cup \mathcal{S}_v(P^c_1) \cup \ldots \cup \mathcal{S}_v(P^c_D)$ — разбиение.

Далее под *фигурой* $F^D \subset \mathbb{R}^D$ будем понимать конечное объединение многогранников и, значит, подразумевается, что она замкнута $F^D = (F^D)^c$. Если задано разбиение фигуры

$$F^D = F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_D$$

и ее перекладывание

$$\mathcal{S}_v(F^D) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_v(F_0) \cup \mathcal{S}_v(F_1) \cup \ldots \cup \mathcal{S}_v(F_D), \tag{1.94}$$

где $\mathcal{S}_v(F_k) = F_k[v_k]$ для некоторой системы векторов

$$v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\},$$

то будем говорить, что фигура F^D *замкнута* относительно перекладывания $\mathcal{S}_v$, если выполняется включение

$$\mathcal{S}_v(F^D) \subseteq F^D. \tag{1.95}$$

Фигура F^D называется *перекладывающейся*, если она инвариантна

$$\mathcal{S}_v(F^D) = F^D \tag{1.96}$$

и множества $\mathcal{S}_v(F^D)$ из (1.94) не имеют общих внутренних точек.

Из (1.94)-(1.96) вытекает

Следствие 1.1. *Пусть* $C^D_{s,\alpha}$ *— вытянутый куб с разбиением* (1.19) *и иррациональным параметром* $\alpha = ts$*, где* $0 < t < 1$*. Тогда* $C^D_{s,\alpha}$ *является перекладывающейся фигурой.*

§2. Зеркально вытянутый куб

2.1. Построение зеркально вытянутого куба. Для любого множества $X \subset \mathbb{R}^D$ и вектора $s \in \mathbb{R}^D_+$ определим преобразование

$$\mathtt{Str}^*_s(X) = [\mathtt{Str}_s(X) \setminus \{X \cup X + s\}]^c, \tag{2.1}$$

где $\mathtt{Str}_s$ — преобразование вытягивания (1.4). Новое преобразование (2.1) обладает свойством самодвойственности

$$\mathtt{Str}^*_s(\mathtt{Str}^*_s(X)) = X + s \tag{2.2}$$

при условии, если

$$X \cap (X + s) = \emptyset, \tag{2.3}$$

и свойством монотонности

$$\mathtt{Str}^*_{s'}(X) \subset \mathtt{Str}^*_s(X) \tag{2.4}$$

для векторов $s' = ts$, $0 \le t \le 1$.

Применим преобразование (2.1) к единичному кубу $X = C^D$. В данном случае его можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mathtt{Str}^*_s(C^D) &= [\mathtt{Str}_s(C^D) \setminus \{C^D \cup C^D + s\}]^c = \\ &= \mathtt{Str}_s(C_1 \cup \ldots \cup C_D) \cap \mathtt{Str}_s(C^*_1 \cup \ldots \cup C^*_D).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Если для $s = (s_1, \ldots, s_D)$ обозначить

$$\max(s) = \max_{1 \le i \le D} s_i, \tag{2.6}$$

то требование (2.3) для $X = C^D$ будет эквивалентно условию

$$\max(s) > 1. \tag{2.7}$$

2.2. Объем зеркально вытянутого куба. Из (1.4) вытекает включение

$$X \cup (X + s) \subset \mathtt{Str}_s(X). \tag{2.8}$$

Поэтому при выполнении условия (2.7) для объема $\mathtt{Str}^*_s(X)$ будет выполняться формула

$$\mathtt{vol}\,\mathtt{Str}^*_s(X) = \mathtt{vol}\,\mathtt{Str}_s(X) - 2\,\mathtt{vol} X. \tag{2.9}$$

Применим ее к вычислению объема $\mathtt{Str}^*_s(C^D)$. Ранее в (1.14) мы нашли объем вытянутого куба $\mathtt{vol}\,\mathtt{Str}_s(C^D) = \sigma(s) + 1$. Отсюда и (2.9) выводим нужную нам формулу

$$\mathtt{vol}\,\mathtt{Str}^*_s(C^D) = \sigma(s) - 1, \tag{2.10}$$

где $\sigma(s) = s_1 + \dots + s_D > 1$ в силу условия (2.7). Следовательно, имеет место неравенство

$$\mathtt{vol}\,\mathtt{Str}^*_s(C^D) > 0, \tag{2.11}$$

если вектор $s \in \mathbb{R}^D_+$ удовлетворяет условию (2.7). В случае выполнения указанного условия назовем $C^D \Rightarrow \mathtt{Str}^*_s(C^D)$ преобразованием *зеркального вытягивания* куба C^D. Основанием для этого является то обстоятельство, что грани $C_1 \cup \ldots \cup C_D$ и $C^*_1 \cup \ldots \cup C^*_D$ в многограннике $\mathtt{Str}^*_s(C^D)$ меняются местами по сравнению с их положением в вытянутом кубе $\mathtt{Str}_s(C^D)$.

2.3. Разбиение зеркально вытянутого куба. Пусть снова $s \in \mathbb{R}^D_+$ и вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D) = ts$, где $0 < t < 1$, удовлетворяет условию

$$\max(s - \alpha) > 1. \tag{2.12}$$

Определим множество

$$P^{*c}_0 = \mathtt{Str}^*_{s-\alpha}(C^D), \tag{2.13}$$

являющееся, согласно (2.4), подмножеством из $\mathtt{Str}^*_s(C^D)$. Из (2.5) следует

$$\begin{aligned} P^{*c}_0 &= \mathtt{Str}_{s-\alpha}(C_1 \cup \ldots \cup C_D) \cap \mathtt{Str}_s(C^*_1 \cup \ldots \cup C^*_D) \\ &= \mathtt{Str}_{s-\alpha}(C_1 \cup \ldots \cup C_D) \cap \mathtt{Str}_{s-\alpha}(C^*_1 \cup \ldots \cup C^*_D). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Для $k = 1, \dots, D$ определим

$$P^{*c}_k = \mathtt{Str}_\alpha(C_k + s - \alpha). \tag{2.15}$$

Найдем объемы областей P^{*c}_k. Из формулы для объема (2.10) и определения (2.13) следует

$$\mathtt{vol}\,P^{*c}_0 = \sigma(s - \alpha) - 1 = (1 - t)\sigma(s) - 1, \tag{2.16}$$

откуда выводим $\mathtt{vol}\,P^*_0 > 0$, если вектор α удовлетворяет условию (2.12). Любое множество P^{*c}_k для $k = 1, \dots, D$, согласно определению (2.15), представляет собою параллелепипед с основанием C_k, являющимся $(D-1)$-мерным единичным кубом C_k, ортогональным вктору e_k. Поэтому параллелепипед P^{*c}_k имеет объем

$$\mathtt{vol}\,P^{*c}_k = h_k\,\mathtt{vol}_{D-1}\,C_k,$$

где $h_k = \alpha \cdot e_k = \alpha_k \geq 0$ — его высота и, значит, в силу равенства $\alpha = ts$ можем записать равенства

$$\mathtt{vol}\, P_k^{*c} = \alpha_k = ts_k \tag{2.17}$$

для $k = 1, \ldots, D$. Из формул (2.16) и (2.17) находим

$$\mathtt{vol}\, P_0^{*c} + \mathtt{vol}\, P_1^{*c} + \cdots + \mathtt{vol}\, P_D^{*c} = \sigma(s-\alpha) - 1 + \sigma(\alpha) = \sigma(s) - 1,$$

и поэтому в силу (2.10) имеем равенство

$$\mathtt{vol}\, \mathtt{Str}_s^*(C^D) = \mathtt{vol}\, P_0^{*c} + \mathtt{vol}\, P_1^{*c} + \cdots + \mathtt{vol}\, P_D^{*c}. \tag{2.18}$$

Лемма 2.1. *Для любых векторов $s \in \mathbb{R}_+^D$ и $\alpha = ts$ с условиями $0 < t < 1$ и $\max(s - \alpha) > 1$ имеет место разбиение*

$$C_{s,\alpha}^{*D} = \mathit{Str}_s^*(C^D) = P_0^{*c} \cup P_1^{*c} \cup \ldots \cup P_D^{*c}. \tag{2.19}$$

Доказательство. По (2.15) и свойствам (1.6) и (1.10) имеем

$$\begin{aligned} P_1^{*c} \cup \ldots \cup P_D^{*c} &= \mathtt{Str}_\alpha(C_1 + s - \alpha) \cup \ldots \cup \mathtt{Str}_\alpha(C_D + s - \alpha) \\ &= \mathtt{Str}_\alpha((C_1 \cup \ldots \cup C_D) + s - \alpha), \end{aligned} \tag{2.20}$$

а по свойству (1.6) можем записать

$$\mathtt{Str}_{s-\alpha}(C_1 \cup \ldots \cup C_D) \cup \mathtt{Str}_\alpha((C_1 \cup \ldots \cup C_D) + s - \alpha) =$$

$$= \mathtt{Str}_s(C_1 \cup \ldots \cup C_D).$$

Из условия (2.12) на вектор α вытекает включение

$$\mathtt{Str}_\alpha((C_1 \cup \ldots \cup C_D) + s - \alpha) \subset \mathtt{Str}_s(C_1^* \cup \ldots \cup C_D^*).$$

Применяя равенства (2.14), (2.15) и равенство (2.20), имеем

$$\begin{aligned} &P_0^{*c} \cup P_1^{*c} \cup \ldots \cup P_D^{*c} = \\ &= (\mathtt{Str}_{s-\alpha}(C_1 \cup \ldots \cup C_D) \cap \mathtt{Str}_s(C_1^* \cup \ldots \cup C_D^*)) \\ &\cup \mathtt{Str}_\alpha((C_1 \cup \ldots \cup C_D) + s - \alpha) \\ &= (\mathtt{Str}_{s-\alpha}(C_1 \cup \ldots \cup C_D) \cup \mathtt{Str}_\alpha((C_1 \cup \ldots \cup C_D) + s - \alpha)) \\ &\cap \mathtt{Str}_s(C_1^* \cup \ldots \cup C_D^*)). \end{aligned}$$

Поэтому в силу (2.5) получаем

$$P_0^{*c} \cup P_1^{*c} \cup \ldots \cup P_D^{*c} = \mathtt{Str}_s(C_1 \cup \ldots \cup C_D) \cap \mathtt{Str}_s(C_1^* \cup \ldots \cup C_D^*) = \mathtt{Str}_s^*(C^D).$$

Отсюда и равенства (2.18) вытекает утверждение леммы. $\square$

Зададим перекладывание

$$\mathcal{S}_v^*(C_{s,\alpha}^{*D}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_v^*(P_0^{*c}) \cup \mathcal{S}_v^*(P_1^{*c}) \cup \ldots \cup \mathcal{S}_v^*(P_D^{*c}) \qquad (2.21)$$

вытянутого куба с разбиением (2.19), где

$$\mathcal{S}_v^*(P_k^{*c}) = P_k^{*c}[v_k] = P_k^{*c} + v_k$$

— параллельный сдвиг области P_k^{*c} на вектор

$$v_k = \alpha + \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k = 0, \\ e_k - s, & \text{если} \quad k > 0. \end{cases} \qquad (2.22)$$

Перекладывание $\mathcal{S}_v^*$ индуцирует многозначное отображение

$$S_v^* : \mathtt{Str}_s^*(C^D) \longrightarrow \mathbb{R}^D, \qquad (2.23)$$

определяемое условием $S_v^*(x) = x + v_k$, если $x \in P_k^{*c}$.

Предложение 2.1. *Зеркально вытянутый куб $C_{s,\alpha}^{*D}$ с разбиением* (2.19) *замкнут*

$$\mathcal{S}_v^*(C_{s,\alpha}^{*D}) \subseteq C_{s,\alpha}^{*D} \qquad (2.24)$$

относительно операции перекладывания (2.21).

Доказательство. По свойству (1.6) для $k \geq 1$ имеем

$$P_k^{*c} + v_k = \mathtt{Str}_\alpha(C_k + s - \alpha) + \alpha + e_k - s = \mathtt{Str}_\alpha(C_k + e_k) = \mathtt{Str}_\alpha(C_k^*).$$

При этом по свойству (1.7) имеют место включения

$$\mathtt{Str}_\alpha(C_k^*) \subset \mathtt{Str}_s(C_k^*) \subset \mathtt{Str}_s(C_1^* \cup \ldots \cup C_D^*)$$

и

$$\mathtt{Str}_\alpha(C_k^*) \subset \mathtt{Str}_s(C_1 \cup \ldots \cup C_D), \qquad (2.25)$$

так как $C^D \cap (C^D + s - \alpha) = \emptyset$ в силу условия (2.12). Из равенств (2.5), (2.20) и включения (2.25) следует

$$P_k^{*c} + v_k \subset \mathtt{Str}_s^*(C^D) \qquad (2.26)$$

для $k = 1, \ldots, D$.

Пусть $k = 0$. В силу (2.14) и (2.22) имеем

$$P_0^{*c} + v_0 = (\mathtt{Str}_{s-\alpha}(C_1 \cup \ldots \cup C_D) + \alpha) \cap (\mathtt{Str}_{s-\alpha}(C_1^* \cup \ldots \cup C_D^*) + \alpha),$$

где

$$\mathtt{Str}_{s-\alpha}(C_1 \cup \ldots \cup C_D) + \alpha = \mathtt{Str}_{s-\alpha}(C_1 \cup \ldots \cup C_D + \alpha) \subset \mathtt{Str}_s(C_1 \cup \ldots \cup C_D),$$

и аналогично —

$$\mathtt{Str}_{s-\alpha}(C_1^* \cup \ldots \cup C_D^*) + \alpha = \mathtt{Str}_{s-\alpha}(C_1^* \cup \ldots \cup C_D^* + \alpha) \subset \mathtt{Str}_s(C_1^* \cup \ldots \cup C_D^*).$$

Отсюда и равенства (2.5) получаем включение $P_0^{*c} + v_0 \subset \mathtt{Str}_s^*(C^D)$, из которого и (2.26) вытекает включение (2.24). □

2.4. Решетка L_s^* и объем ее фундаментальной области. Определим решетку

$$L_s^* = \mathbb{Z}[e_1^*, \dots, e_D^*], \tag{2.27}$$

где $e_k^* = v_0 - v_k = s - e_k$ и вектор

$$s = s_1 e_1 + \dots + s_D e_D \tag{2.28}$$

выбирается из пространства $\mathbb{R}_+^D$ и удовлетворяет условию $\max(s) > 1$. По определению (2.22) и (2.23) имеем сравнение

$$S_v^*(x) = x + v_k \equiv x + \alpha \,\mathtt{mod}\, L_s^* \tag{2.29}$$

для любого $x \in C_s^{*D}$. Пусть

$$\mathtt{det}_s^* = \mathtt{det} \begin{pmatrix} s_1 - 1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_D \\ s_1 & s_2 - 1 & s_3 & \cdots & s_D \\ s_1 & s_2 & s_3 - 1 & \cdots & s_D \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_D - 1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем первую строку из всех остальных и затем прибавим к первому столбцу все остальные столбцы. После такого преобразования получаем

$$\mathtt{det}_s^* = \mathtt{det} \begin{pmatrix} s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_D - 1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_D \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix},$$

откуда для определителя $\mathtt{det}_s^*$ выводим формулу

$$|\mathtt{det}_s^*| = \sigma - 1, \tag{2.30}$$

где $\sigma = \sigma(s) = s_1 + \dots + s_D$. В силу условия условия (2.7) выполняется неравенство $\sigma > 1$, поэтому $|\mathtt{det}_s^*| > 0$. Отсюда вытекает

Лемма 2.2. *Для любого вектора s из пространства $\mathbb{R}_+^D$ с условием $\max(s) > 1$ решетка L_s^*, определенная в (2.27), полная.*

Для решетки L_s^* рассмотрим ее фундаментальную область

$$\mathcal{T}_s^* = \{t_1 e_1^* + \cdots + t_D e_D^*; \quad t_1, \ldots, t_D \in [0,1)\} \subset \mathbb{R}^D, \tag{2.31}$$

имеющую в силу формулы (2.30) объем

$$\mathtt{vol}\, \mathcal{T}_s^* = \sigma - 1 > 0. \tag{2.32}$$

Сравнивая объем (2.10) вытянутого куба $C_s^{*D} = \mathtt{Str}_s^*(C^D)$ с объемом фундаментальной области (2.32), получаем равенство

$$\mathtt{vol}\, C_s^{*D} = \mathtt{vol}\, \mathcal{T}_s^* \tag{2.33}$$

для любого $s \in \mathbb{R}_+^D$ с условием $\max(s) > 1$.

2.5. Координаты и иррациональность вектора сдвига α. Найдем для вектора s (2.28) разложение

$$s = s_1^* e_1^* + \cdots + s_D^* e_D^* \tag{2.34}$$

в базисе $e_1^*, \ldots, e_D^*$ решетки L_s^*. По (2.27) имеем $s = \sigma^* s - s_1^* e_1 - \cdots - s_D^* e_D$, где использовано обозначение $\sigma^* = s_1^* + \cdots + s_D^*$. В силу этого получаем равенство

$$(\sigma^* - 1)s = s_1^* e_1 + \cdots + s_D^* e_D.$$

Предположим, что $\sigma^* \neq 1$. Тогда из (2.28) выводим формулу связи между координатами $s_k^* = (\sigma^* - 1)s_k$ для всех $k = 1, \ldots, D$. Принимая во внимание данную формулу, имеем $\sigma^* = s_1^* + \cdots + s_D^* = (1 + \sigma^*)\sigma$, поэтому получаем равенство $\sigma^* = \frac{\sigma}{\sigma - 1}$, и при этом $\sigma^* > 1$, т.к. $\sigma > 1$ в силу условия $\max(s) > 1$. Отсюда вытекает

Лемма 2.3. *Вектор s из пространства $\mathbb{R}_+^D$ с условием $\max(s) > 1$ в базисе (2.34) имеет координаты*

$$s_k^* = \frac{1}{\sigma - 1} s_k$$

для $k = 1, \ldots, D$.

Пусть для вектора $\alpha = ts$, где $0 < t < 1$, дано разложение в базисе (2.27) решетки L_s^*:

$$\alpha = \alpha_1^* e_1^* + \cdots + \alpha_D^* e_D^*. \tag{2.35}$$

Отсюда и леммы 2.3 для координат из (2.35) выводим формулу

$$\alpha_k^* = t s_k^* = \frac{t}{\sigma - 1} s_k \tag{2.36}$$

для $k = 1, \ldots, D$. Из формулы (2.36) вытекает следующий ***критерий***:

вектор $\alpha = ts$, где $0 < t < 1$, является иррациональным относительно решетки L_s^*, определенной в (2.27), тогда и только тогда, когда числа

$$s_1, \ldots, s_D, \tfrac{\sigma-1}{t} \quad \text{линейно независимы над} \quad \mathbb{Z}. \tag{2.37}$$

2.6. Разбиение пространства перекладывающимися фигурами. Чтобы привести следующий результат, нам потребуются несколько дополнительных определений.

Пусть $F^D \subset \mathbb{R}^D$ — некоторая фигура с разбиением $F^D = F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_D$ и перекладыванием $\mathcal{S}_v(F_k) = F_k[v_k]$ для фиксированной системы векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$. Поставим в соответствие

$$v \longrightarrow L_v \tag{2.38}$$

системе векторов v решетку

$$L_v = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_D] \tag{2.39}$$

из пространства $\mathbb{R}^D$, порождаемую векторами

$$l_1 = v_1 - v_0, \quad \ldots, \quad l_D = v_D - v_0. \tag{2.40}$$

Здесь в определении (2.40) в качестве выделенного вектора $v_0 \in v$ можно выбрать любой другой вектор $v_k \in v$, $k = 1, \ldots, D$. Тогда новые векторы $l'_1, \ldots, l'_D$ порождают ту же самую решетку L_v и, следовательно, решетка L_v однозначно определяется системой векторов v. Перекладывание $\mathcal{S}_v$ фигуры F^D называется *иррациональным*, если выполнены условия: 1) решетка L_v полная и 2) числа

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_D, 1 \quad \text{линейно независимы над} \quad \mathbb{Z}, \tag{2.41}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_D$ — координаты в разложении $\alpha = \alpha_1 l_1 + \ldots + \alpha_D l_D$ вектора $\alpha = v_0$ из v в базисе решетки L_v.

Для зеркально вытянутых кубов C_s^{*D} мы хотим получить результаты, аналогичные теоремам 1.1 и 1.2 о вытянутых кубах C_s^D. Более того, в следующих разделах будет рассмотрена еще одна общая конструкция: произведение перекладывающихся торических разверток, для которого также выполняются теоремы 1.1 и 1.2. Собирая вместе все свойства вытянутого куба C_s^D, использованные при доказательстве теоремы 1.1, приходим к ее естественному обобщению в виде некоторой *общей схемы*, включающей в себя все отмеченные выше перекладывающиеся фигуры.

Теорема 2.1. *Пусть дана фигура $F^D \subset \mathbb{R}^D$, обладающая следующими свойствами:*

1) *фигура F^D имеет разбиение*

$$F^D = F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_D \tag{2.42}$$

и замкнута относительно перекладывания

$$\mathcal{S}_v(F_k) = F_k[v_k] \tag{2.43}$$

для v_k из некоторой фиксированной системы векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$;

2) *перекладывание $\mathcal{S}_v$ иррационально;*

3) *фигура F^D кубируема и выполняется равенство*

$$\operatorname{vol} F^D = \operatorname{vol} L_v,$$

где $\operatorname{vol} L_v$ — объем решетки L_v (2.39), равный объему любой ее фундаментальной области, например,

$$\mathcal{T}_v = \{t_1 l_1 + \cdots + t_D l_D; \quad t_1, \ldots, t_D \in [0, 1)\} \subset \mathbb{R}^D.$$

Тогда фигура F^D трансляционно разбивает

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in L_v} F^D[l] \tag{2.44}$$

пространство $\mathbb{R}^D$ на замкнутые области $F^D[l] = F^D + l$ без общих внутренних точек.

Доказательство теоремы 1.2 опирается на существование семейства вытянутых кубов C_s^D, непрерывным образом зависящих от параметра $s \in \mathbb{R}_+^D$. Строго указанное свойство можно сформулировать следующим образом.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $|s - s'| < \delta$, то C_s^D и $C_{s'}^D$ являются *ε-согласованными*:

$$C_s^D \subset B(C_{s'}^D, \varepsilon) \quad \text{и} \quad C_{s'}^D \subset B(C_s^D, \varepsilon), \tag{2.45}$$

где

$$B(X, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^D; |x - x'| \le \varepsilon \quad \text{для некоторого} \quad x' \in X\}$$

— *ε-окрестность* множества $X \subset \mathbb{R}^D$.

Разбиения (1.19), перекладывания (1.22) и решетки L_s (1.29) также непрерывно зависимы от s, а вектор сдвига $\alpha = \alpha_{s,t}$ (1.16), кроме s, непрерывно зависит еще от дополнительного параметра t. При этом вектор α обладает свойством *общего положения*: для фиксированного вектора $s \in \mathbb{R}_+^D$ и любого $\varepsilon > 0$ существует вектор $s' \in \mathbb{R}_+^D$ и параметр $0 < t' < 1$ такие, что

1)

$$|s - s'| \leq \varepsilon, \quad |t - t'| \leq \varepsilon;$$

2) вытянутые кубы C_s^D и $C_{s'}^D$ являются ε-согласованными (2.45);

3) вектор сдвига $\alpha' = \alpha_{s',t'}$, отвечающий параметрам s', t', является иррациональным относительно решетки $L_{s'}$ и

$$|\alpha - \alpha'| \leq \varepsilon.$$

Теорема 2.2. *Пусть задано семейство множеств $F_p^D \subset \mathbb{R}^D$, где p — параметр из некоторого множества $P \subset \mathbb{R}^n$. Далее пусть как сами множества F_p^D, так и разбиения* (2.42)*, перекладывания* (2.43)*, решетки L_p* (2.39) *и вектор сдвига α_p непрерывно зависят от параметра $p \in P$. Предположим дополнительно, что множество F_p^D для любого $p \in P$ удовлетворяет всем свойствам из теоремы 2.1, кроме, может быть, условия иррациональности вектора сдвига α_p относительно решетки L_p.*

Тогда для любого $p \in P$ существует разбиение пространства

$$\mathbb{R}^D = \coprod_{l \in L_p} F_p^D[l]. \tag{2.46}$$

Доказательство проходит по схеме теоремы 1.1. □

Семейство зеркально вытянутых кубов C_s^{*D} и связанные с ними объекты параметризуются $p \in P$, где

$$P = \{p = (s,t); s \in \mathbb{R}_+^D, \max(s) > 1, 0 < t < 1\} \subset \mathbb{R}^{D+1}.$$

Множество C_s^{*D} удовлетворяет всем условиям теоремы 2.2. Так, например, вектор сдвига $\alpha = ts$ обладает свойством общего положения. Доказательство данного свойства получается из критерия иррациональности (2.37) по той же схеме, что в лемме 1.3. Поэтому применяя теорему 2.2, получаем следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть C_s^{*D} — зеркально вытянутые кубы, определенные в п.* 2.1*, и L_s^* — решетки* (2.27)*. Тогда для любого вектора $s \in \mathbb{R}_+^D$ с условием* $\max(s) > 1$ *имеет место разбиение пространства*

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in L_s^*} C_s^{*D}[l]. \tag{2.47}$$

Итак, для зеркально вытянутого куба C_s^{*D} в случае иррационального α имеем следующую схему, аналогичную схеме (0.11).

Общая схема для зеркально вытянутого куба C_s^{*D}

$$C^D \quad \Rightarrow \quad C_s^{*D} \quad \Rightarrow \quad C_{s,\alpha}^{*D} \quad \Rightarrow \quad T_{s,\alpha}^{*D} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{T}_{s,\alpha}^{*D} \tag{2.48}$$

Здесь

$$T_{s,\alpha}^{*D} = P_0^* \sqcup P_1^* \sqcup \ldots \sqcup P_D^*$$

— перекладывающаяся торическая развертка с разбиением на множества

$$P_k^* = \{x \in C_{s,\alpha}^{*D}; i^*(x) = k\}$$

для $k = 0, 1, \ldots, D$, где $i^*(x)$ — индекс точки x, вычисленный по i-алгоритму п. 1.8, примененному к перекладывающемуся кубу $C_{s,\alpha}^{*D}$, определенному в лемме 2.1;

$$\mathbb{T}_{s,\alpha}^{*D} = \mathbb{T}_0^{*D} \sqcup \mathbb{T}_1^{*D} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}_D^{*D}$$

— разбиение тора $\mathbb{T}_{s,\alpha}^{*D}$ на множества $\mathbb{T}_k^{*D} = P_k^* \bmod L_s^*$, являющиеся в силу [1] множествами ограниченного остатка.

§3. Произведение торических разверток

3.1. Определение произведения $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$. Пусть даны две произвольные перекладывающиеся торические развертки T^{D_1} и T^{D_2}, имеющие разбиения

$$T^{D_1} = T_0^{D_1} \cup T_1^{D_1} \cup \ldots \cup T_{D_1}^{D_1}, \quad T^{D_2} = T_0^{D_2} \cup T_1^{D_2} \cup \ldots \cup T_{D_2}^{D_2}$$

и соответственно векторы перекладывания

$$v_0, \ldots, v_{D_1}, \quad w_0, \ldots, w_{D_2}.$$

Для любого $k = 0, 1, \ldots, D_1$ определим *произведение* $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$ следующими условиями:

1)
$$T^{D_1} \otimes_k T^{D_2} = \{(x, y); x \in T^{D_1}, y \in T^{D_2}\} \subset \mathbb{R}^D, \tag{3.1}$$

где $D = D_1 + D_2$, таким образом $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$ как множество совпадает с прямым произведением $T^{D_1} \times T^{D_2}$ множеств T^{D_1} и T^{D_2};

2) на множестве (3.1) задано разбиение

$$T^{D_1} \otimes_k T^{D_2} = \coprod_{\substack{0 \le i \le D_1 \\ i \ne k}} T_i^D \coprod_{0 \le j \le D_2} T_{k,j}^D \tag{3.2}$$

на множества

$$\begin{array}{lll} T_i^D = T_i^{D_1} \times T^{D_2} & \text{для} & i = 0, \ldots, D_1, \quad i \neq k, \\ T_{k,j}^D = T_k^{D_1} \times T_j^{D_2} & \text{для} & j = 0, \ldots, D_2, \end{array} \tag{3.3}$$

а также определено перекладывание $\mathcal{S}_{v \otimes_k w}$ этих множеств

$$\begin{array}{llll} \mathcal{S}_{v \otimes_k w}: & T_i^D \longrightarrow T_i^D + (v_i, 0) & \text{для} & i = 0, \ldots, D_1, \quad i \neq k, \\ \mathcal{S}_{v \otimes_k w}: & T_{k,j}^D \longrightarrow T_{k,j}^D + (v_k, w_j) & \text{для} & j = 0, \ldots, D_2. \end{array} \tag{3.4}$$

Замечание 3.1. 1. Количество множеств в разбиении (3.2) равно $D_1 + D_2 + 1 = D + 1$, т.е. ровно столько, сколько их было в (1.19) для вытянутых кубов размерности D.

2. Непосредственно из определения следует некоммутативность операции умножения $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$, а на примере отрезков T^1 не трудно убедиться, что эта операция также неассоциативна.

3. Для торических разверток T^{D_1} и T^{D_2} с учетом перестановки $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$, $T^{D_2} \otimes_{k'} T^{D_1}$ и выбора индексов k, k' существует $(D_1 + 1) + (D_2 + 1) = D + 2$ произведений (3.2).

Лемма 3.1. 1. *Множества* (3.3) *разбивают произведение* $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$.

2. *Перекладывание* (3.4) *множества* (3.2)

$$\mathcal{S}_{v \otimes_k w}(T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}) = \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq D_1 \\ i \neq k}} \mathcal{S}_{v \otimes_k w}(T_i^D) \bigcup_{0 \leq j \leq D_2} \mathcal{S}_{v \otimes_k w}(T_{k,j}^D)$$

замкнуто

$$\mathcal{S}_{v \otimes_k w}(T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}) \subseteq T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}. \tag{3.5}$$

3. *Если развертки* T^{D_1} *и* T^{D_2} *кубируемые, то для любого* k *их произведение* $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$ *как множество также кубируемо и имеет объем*

$$\operatorname{vol} T^{D_1} \otimes_k T^{D_2} = \operatorname{vol} T^{D_1} \cdot \operatorname{vol} T^{D_2}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Первое утверждение получается из (3.1) и определения множеств (3.3); второе утверждение вытекает из (3.4) и замкнутости перекладываний на торических развертках T^{D_1} и T^{D_2}; третье непосредственно следует из (3.1). □

3.2. Случай $k = 0$. В дальнейшем удобно разделить случаи $k = 0$ и $k \neq 0$.

Первым рассмотрим *случай* $k = 0$. Согласно определению (3.4), имеем для произведения $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$ следующее множество *векторов перекладывания*

$$v \otimes_0 w = \{(v_0, 0), \dots, (v_{D_1}, 0), \quad (v_0, w_0), (v_0, w_1), \dots, (v_0, w_{D_2})\}. \tag{3.7}$$

Если за начальный или нулевой вектор выбрать (v_0, w_0), то векторы (3.7) задают решетку

$$L^{D_1} \otimes_0 L^{D_2} = \mathbb{Z}[\bar{l}_1^0, \dots, \bar{l}_{D_1}^0, \overline{m}_1, \dots, \overline{m}_{D_2}], \tag{3.8}$$

порождаемую векторами

$$\begin{cases} \bar{l}_1^0 & = (v_1, 0) - (v_0, w_0) & = (l_1^0, -w_0), \\ & \dots & \\ \bar{l}_{D_1}^0 & = (v_{D_1}, 0) - (v_0, w_0) & = (l_{D_1}^0, -w_0), \\ \overline{m}_1 & = (v_0, w_1) - (v_0, w_0) & = (0, m_1), \\ & \dots & \\ \overline{m}_{D_2} & = (v_0, w_{D_2}) - (v_0, w_0) & = (0, m_{D_2}), \end{cases} \tag{3.9}$$

где

$$L^{D_1} = \mathbb{Z}[l_1^0, \dots, l_{D_1}^0], \quad L^{D_2} = \mathbb{Z}[m_1, \dots, m_{D_1}] \tag{3.10}$$

с векторами $l_i^0 = v_i - v_0$ и $m_j = w_i - w_0$ обозначают полные решетки соответственно для торических разверток T^{D_1} и T^{D_2}.

Лемма 3.2. *Решетка $L^{D_1} \otimes_0 L^{D_2} \subset \mathbb{R}^D$ полная, ее объем равен*

$$\operatorname{vol} L^{D_1} \otimes_0 L^{D_2} = \operatorname{vol} T^{D_1} \otimes_0 T^{D_2}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Из (3.9) и (3.10) вытекает формула

$$\operatorname{vol} L^{D_1} \otimes_0 L^{D_2} = \operatorname{vol} L^{D_1} \cdot \operatorname{vol} L^{D_2}. \tag{3.12}$$

Поэтому из полноты решеток L^{D_1}, L^{D_2} следует, что решетка $L^{D_1} \otimes_0 L^{D_2}$ также полная. Теперь равенство (3.11) вытекает из (3.12) и аналогичных равенств $\mathtt{vol}\, L^{D_i} = \mathtt{vol}\, T^{D_i}$ для торических разверток T^{D_i}, $i = 1, 2$. □

Среди векторов перекладывания (3.7) за вектор сдвига выберем $\gamma^0 = (v_0, w_0)$. Пусть

$$v_0 = \alpha = \alpha_1^0 l_1^0 + \dots + \alpha_{D_1}^0 l_{D_1}^0, \quad w_0 = \beta = \beta_1 m_1 + \dots + \beta_{D_1} m_{D_1} \tag{3.13}$$

— разложения по базисам (3.10) векторов сдига $v_0 = \alpha$ и $w_0 = \beta$ для торических разверток T^{D_1} и T^{D_2}. По (3.9) и (3.13) имеем равенство

$$\gamma^0 - \alpha_1^0 \bar{l}_1^0 - \ldots - \alpha_{D_1}^0 \bar{l}_{D_1}^0 = (0, (\sigma_0(\alpha) + 1) w_0),$$

где обозначили $\sigma_0(\alpha) = \alpha_1^0 + \ldots + \alpha_{D_1}^0$, и тогда для вектора $\gamma^0 = (v_0, w_0)$ получаем нужное разложение

$$\gamma^0 = \alpha_1^0 \bar{l}_1^0 + \ldots + \alpha_{D_1}^0 \bar{l}_{D_1}^0 + (\sigma_0(\alpha) + 1)\beta_1 \overline{m}_1 + \ldots + (\sigma_0(\alpha) + 1)\beta_{D_2} \overline{m}_{D_2}$$

в базисе (3.9).

Отсюда вытекает ***критерий иррациональности*** в случае $k = 0$. Вектор сдвига $\gamma^0 = (v_0, w_0) = (\alpha, \beta)$ иррационален относительно решетки $L^{D_1} \otimes_0 L^{D_2}$, определенной в (3.8), тогда и только тогда, когда числа

$$\begin{gathered} \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{D_1}^0, (\sigma_0(\alpha) + 1)\beta_1, \ldots, (\sigma_0(\alpha) +!1)\beta_{D_2}, 1 \\ \text{линейно независимы над} \quad \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{3.14}$$

3.3. Случай $k \neq 0$**.** По определению (3.4) для произведения $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$ в данном случае имеем следующее множество *векторов перекладывания*

$$\begin{aligned} v \otimes_k w \quad &= \{(v_0, 0), \ldots, (v_{k-1}, 0), (v_{k+1}, 0), \ldots, (v_{D_1}, 0), \\ &\quad (v_k, w_0), (v_k, w_1), \ldots, (v_k, w_{D_2})\}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Если теперь за начальный выбрать вектор (v_k, w_0), то получим решетку

$$L^{D_1} \otimes_k L^{D_2} = \mathbb{Z}[\bar{l}_1^k, \ldots, \bar{l}_{D_1}^k, \overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_{D_2}], \tag{3.16}$$

порождаемую векторами

$$\begin{cases} \bar{l}_1^k & = (v_1, 0) - (v_k, w_0) & = (l_1^k, -w_0), \\ & \ldots & \\ \bar{l}_{D_1}^k & = (v_{D_1}, 0) - (v_k, w_0) & = (l_{D_1}^k, -w_0), \\ \overline{m}_1 & = (v_k, w_1) - (v_k, w_0) & = (0, m_1), \\ & \ldots & \\ \overline{m}_{D_2} & = (v_k, w_{D_2}) - (v_k, w_0) & = (0, m_{D_2}), \end{cases} \tag{3.17}$$

где при $k \neq 0$ в решетке

$$L^{D_1} = \mathbb{Z}[l_1^k, \ldots, l_{D_1}^k] \tag{3.18}$$

выбираем базис

$$l_1^k = v_0 - v_k, \ldots, l_k^k = v_{k-1} - v_k, l_{k+1}^k = v_{k+1} - v_k, \ldots, l_{D_1}^k = v_{D_1} - v_k,$$

а в решетке L^{D_2} оставляем базис (3.10) без измениения. Аналогично формулам (3.12), имеем

$$\operatorname{vol} L^{D_1} \otimes_k L^{D_2} = \operatorname{vol} L^{D_1} \cdot \operatorname{vol} L^{D_2}. \tag{3.19}$$

Замечаем, что из данной формулы следует независимость объема $\operatorname{vol} L^{D_1} \otimes_k L^{D_2}$ от номера $k = 0, 1, \ldots, D_1$. Из формулы (3.19) вытекает

Лемма 3.3. *Для любого $k = 1, \ldots, D_1$ решетка $L^{D_1} \otimes_k L^{D_2} \subset \mathbb{R}^D$ полная. Ее объем равен*

$$\operatorname{vol} L^{D_1} \otimes_k L^{D_2} = \operatorname{vol} T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}.$$

Среди векторов перекладывания (3.15) вектором сдвига выберем $\gamma^k = (v_0, 0)$, и пусть

$$v_0 = \alpha = \alpha_1^k l_1^k + \cdots + \alpha_{D_1}^k l_{D_1}^k$$

— разложение в базисе (3.18) решетки L^{D_1}. По (3.17) имеем равенство

$$\gamma^k - \alpha_1^k \bar{l}_1^k - \ldots - \alpha_{D_1}^k \bar{l}_{D_1}^k = (0, (\sigma_k(\alpha) + 1) w_0),$$

где использовали обозначение $\sigma_k(\alpha) = \alpha_1^k + \ldots + \alpha_{D_1}^k$. Отсюда и разложения (3.13) вектора $w_0 = \beta$ получаем разложение

$$\gamma^k = \alpha_1^k \bar{l}_1^k + \ldots + \alpha_{D_1}^k \bar{l}_{D_1}^k + \sigma_k(\alpha)\beta_1 \overline{m}_1 + \ldots + \sigma_k(\alpha)\beta_{D_2} \overline{m}_{D_2} \tag{3.20}$$

вектора сдвига $\gamma^k = (v_0, 0) = (\alpha, 0)$ в базисе (3.17) решетки $L^{D_1} \otimes_k L^{D_2}$.

Из разложения (3.20) вытекает ***критерий иррациональности*** в случае $k \neq 0$. Вектор сдвига $\gamma^k = (v_0, 0) = (\alpha, 0)$ иррационален относительно решетки $L^{D_1} \otimes_k L^{D_2}$, определенной в (3.16), тогда и только тогда, когда числа

$$\alpha_1^k, \ldots, \alpha_{D_1}^k, \sigma_k(\alpha)\beta_1, \ldots, \sigma_k(\alpha)\beta_{D_2}, 1 \quad \text{линейно независимы над} \quad \mathbb{Z}. \tag{3.21}$$

3.4. Основной результат о произведениях разверток.

Теорема 3.1. *Пусть $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$ — произведение* (3.2) *перекладывающихся торических разверток T^{D_1}, T^{D_2}, и пусть выполнены условия иррациональности* (3.14), (3.21). *Тогда произведение $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$ снова является перекладывающейся торической разверткой с векторами перекладывания* (3.7), (3.15).

Доказательство. Проверим, что множество $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$ удовлетворяет всем свойствам из определения перекладывающейся торической развертки п. 1.7.

Выполнение свойств 1-4 вытекает непосредственно из определения (3.2) произведения $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$ и леммы 3.1.

Для доказательства свойства 5 нужно проверить биективность отображения

$$T^{D_1} \otimes_k T^{D_2} \overset{\operatorname{mod} L^{D_1} \otimes_k L^{D_2}}{\overset{\longrightarrow}{\sim}} \mathbb{T}^D : \quad x \mapsto x \,\mathtt{mod}\, L^{D_1} \otimes_k L^{D_2}, \tag{3.22}$$

где $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D / L^{D_1} \otimes_k L^{D_2}$ — тор для решетки

$$L^{D_1} \otimes_k L^{D_2} = \mathbb{Z}[\bar{l}_1^k, \ldots, \bar{l}_{D_1}^k, \overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_{D_2}],$$

определенной в (3.8) и (3.16) для $k = 0$ и $k \neq 0$ соответственно. Поскольку произведение $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$ как множество совпадает с прямым произведением $T^{D_1} \times T^{D_2}$, то имеет место биективное отображение

$$T^{D_1} \otimes_k T^{D_2} \overset{\operatorname{mod} L^{D_1} \times L^{D_2}}{\overset{\longrightarrow}{\sim}} \mathbb{T}^{\times D} : \quad x \mapsto x \,\mathtt{mod}\, L^{D_1} \times L^{D_2}, \tag{3.23}$$

где $\mathbb{T}^{\times D} \simeq \mathbb{R}^D / (L^{D_1} \times L^{D_2})$ обозначает тор для прямого произведения

$$L^{D_1} \times L^{D_2} = \{(l, m) \in \mathbb{R}^D ; l \in L^{D_1}, m \in L^{D_2}\}$$

решеток L^{D_1} и L^{D_2}. Это означает, что произведение $L^{D_1} \times L^{D_2}$ рассматривается как подрешетка из пространства $\mathbb{R}^D$. По условию решетки L^{D_1}, L^{D_2} полные, поэтому их произведения $L^{D_1} \times L^{D_2}$ и $L^{D_1} \otimes_k L^{D_2}$ — также полные решетки.

Случай $k = 0$. Пусть $x = (x_1, x_2)$ — произвольная точка из $\mathbb{R}^D = \mathbb{R}^{D_1} \times \mathbb{R}^{D_2}$. Тогда, рассматривая (x_1, x_2) по модулю решетки $L^{D_1} \otimes_0 L^{D_2}$, в силу (3.9) и (3.23) можем считать выполненным условие $x_1 \in T^{D_1}$. Отождествим решетку L^{D_2} с решеткой $\overline{L}^{D_2}$ из пространства $\mathbb{R}^D$ посредством вложения $m \hookrightarrow \overline{m} = (0, m)$. Из определения (3.9) следует, что $\overline{L}^{D_2}$ является подрешеткой из $L^{D_1} \otimes_0 L^{D_2}$. Теперь, рассматривая точку (x_1, x_2) по модулю решетки $\overline{L}^{D_2}$, можем добиться того, чтобы выполнялось еще одно условие $x_2 \in T^{D_2}$. Из приведенных включений следует сюръективность отображения (3.22).

Докажем инъективность отображения (3.22). Пусть точки $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ принадлежат произведению $T^{D_1} \otimes_0 T^{D_2}$

и выполняется сравнение

$$x \equiv y \bmod L^{D_1} \otimes_0 L^{D_2}. \tag{3.24}$$

Данное сравнение означает, что разность $x-y$ принадлежит решетке $L^{D_1} \otimes_0 L^{D_2}$ и, значит, она разложима по ее базису

$$x-y = (x_1, x_2)-(y_1, y_2) = a_1\overline{l}_1^0+\ldots+a_{D_1}\overline{l}_{D_1}^0+b_1\overline{m}_1+\ldots+b_{D_2}\overline{m}_{D_2} \tag{3.25}$$

с целыми коэффициентами a_i, b_j. Из (3.25) и (3.9) вытекает равенство

$$x_1 - y_1 = a_1 l_1^0 + \ldots + a_{D_1} l_{D_1}^0 \tag{3.26}$$

и, следовательно, имеет место сравнение $x_1 \equiv y_1 \bmod L^{D_1}$. Поэтому в силу (3.23) можем считать $y = (x_1, y_2)$. Поскольку векторы $l_1^0, \ldots, l_{D_1}^0$ линейно независимы над $\mathbb{R}$, то из равенства (3.26) при условии $y = (x_1, y_2)$ следует $a_1 = \ldots = a_{D_1} = 0$, а тогда из равенства (3.25) и (3.9) получаем

$$x_2 - y_2 = b_1 m_1 + \ldots + b_{D_2} m_{D_2},$$

что равносильно сравнению $x_2 \equiv y_2 \bmod L^{D_2}$. Это доказывает инъективность отображения (3.22), а значит, и его биективность.

Доказательство биективности отображения (3.22) для случая $k \neq 0$ проводится аналогично с использованием базиса (3.17).

Для доказательства теоремы 3.1 осталось проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & T^{D_1} \otimes_k T^{D_2} & \xrightarrow[\sim]{\bmod L^{D_1} \otimes_k L^{D_2}} & \mathbb{T}^D & \\ S_{v\otimes_k w} & \downarrow & & \downarrow & S_{\alpha\otimes_k\beta} \\ & T^{D_1} \otimes_k T^{D_2} & \xrightarrow[\sim]{\bmod L^{D_1} \otimes_k L^{D_2}} & \mathbb{T}^D & \end{array} \tag{3.27}$$

Здесь $S_{v\otimes_k w}$ — поточечное отображение, индуцированное перекладыванием $\mathcal{S}_{v\otimes_k w}$ (3.4), и вектор сдвига $\alpha \otimes_k \beta$ тора $\mathbb{T}^D$ задается равенствами

$$\begin{array}{lll} \alpha \otimes_k \beta = \gamma^0 = (v_0, w_0) & \text{для} & k = 0, \\ \alpha \otimes_k \beta = \gamma^k = (v_0, 0) & \text{для} & k \neq 0. \end{array} \tag{3.28}$$

Из (3.7) и (3.15) следует, что любой вектор $\mathbf{v}$ перекладывания $\mathcal{S}_{v\otimes_k w}$ удовлетворяет сравнению

$$\mathbf{v} \equiv \alpha \otimes_k \beta \bmod L^{D_1} \otimes_k L^{D_2}, \tag{3.29}$$

что равносильно коммутативности диаграммы (3.27).

Теорема 3.1 доказана полностью. □

Пусть $\mathcal{S}_{v\otimes_k w}$ будет иррациональным перекладыванием (см. определение (2.41)). Тогда по теореме 3.1 произведение $T^{D_1}\otimes_k T^{D_2}$ будет перекладывающейся торической разверткой с разбиением на множества (3.2). Используя данное разбиение, можем задать соответствующее разбиение

$$\mathbb{T}^{D_1}\otimes_k \mathbb{T}^{D_2} = \coprod_{\substack{0\le i\le D_1\\ i\ne k}} \mathbb{T}^D_i \coprod_{0\le j\le D_2} \mathbb{T}^D_{k,j} \tag{3.30}$$

тора $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/(L^{D_1}\otimes_k L^{D_2})$ на множества ограниченного остатка $\mathbb{T}^D_i$, $\mathbb{T}^D_{k,j}$ [1].

§4. Распределение точек орбит на торах

4.1. Торические развертки и множества ограниченного остатка. Пусть $T^D\subset\mathbb{R}^D$ — перекладывающаяся торическая развертка с разбиением $T^D = T_0\sqcup T_1\sqcup\ldots\sqcup T_D$ и заданным на ней перекладыванием $\mathcal{S}_v(T_k)=T_k[v_k]$ для некоторой фиксированной системы векторов $v=\{v_0,v_1,\ldots,v_D\}$. Далее будем предполагать, что развертка T^D кубируемая (см. определение п. 1.7), а перекладывание $\mathcal{S}_v$ иррационально (2.41). Указанной развертке T^D в виду (1.88) соответствует разбиение

$$\mathbb{T}^D=\mathbb{T}(T^D)=\mathbb{T}^D_0\sqcup\mathbb{T}^D_1\sqcup\ldots\sqcup\mathbb{T}^D_D \tag{4.1}$$

тора $\mathbb{T}^D\simeq\mathbb{R}^D/L_v$, на котором определен сдвиг $S_\alpha(x)\equiv x+\alpha \bmod L_v$. Здесь решетка L_v и сдвиг S_α отвечают, согласно определению (2.38), системе векторов v.

Введем обозначение

$$\beta=\alpha_n(b)=\frac{1}{n}(\alpha+b\circ l), \tag{4.2}$$

при этом n — произвольное натуральное число, $b\circ l=b_1l_1+\cdots+b_Dl_D$ и $b=(b_1,\cdots,b_d)\in\mathbb{Z}^D$ — целый вектор. Из определения следует, что вектор $b\circ l$ принадлежит решетке L_v. Определим счетную функцию

$$\mathbf{r}_k(i)=\sharp\{j;S^j_\beta(0)\in\mathbb{T}^D_k;0\le j<i\}, \tag{4.3}$$

где S_β — сдвиг тора

$$\mathbb{T}^D\xrightarrow{S_\beta}\mathbb{T}^D:\quad x\mapsto S_\beta(x)\equiv x+\beta \;\mathtt{mod}\, L_v$$

на вектор β, определенный равенством (4.2). Обозначим

$$\delta_k(i) = \mathbf{r}_k(i) - ia_k \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D \tag{4.4}$$

— *отклонение* распределения точек орбиты $\mathtt{Orb}_{S_\beta}(0)$ относительно области $\mathbb{T}_k^D$ на торе $\mathbb{T}^D$, где

$$a_k = \frac{\operatorname{vol} \mathbb{T}_k^D}{\operatorname{vol} \mathbb{T}^D} \tag{4.5}$$

— частота попаданий точек орбиты в область $\mathbb{T}_k^D$. Из теоремы 0.1 (см. введение) вытекает, что области $\mathbb{T}_k^D$ из разбиения (4.1) являются множествами ограниченного остатка, при этом отклонения $\delta_k(i)$ могут быть эффективно оценены в терминах перекладывающихся торических разверток T^D:

$$|\delta_k(i)| \le c_k(T^D)n \tag{4.6}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$, где константы $c_k(T^D)$ вычисляются по формуле

$$c_k(T^D) = \max_{v \in V(T^D)} l_k^* \cdot v - \min_{v \in V(T^D)} l_k^* \cdot v. \tag{4.7}$$

Наша задача — вычислить константы $c_k(T^D)$ для перекладывающихся торических разверток T^D вида $T_{s,\alpha}^D$ (п. 1), $T_{s,\alpha}^{*D}$ (п. 2) и произведений $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$ (п. 3). Все эти развертки являются многогранниками. Поэтому, чтобы используя формулу (4.7) вычислить константы $c_k(T^D)$, нужно найти вершины $V(T^D)$ многогранников T^D и вычислить все скалярные произведения $l_k^* \cdot v$ для $v \in V(T^D)$.

4.2. Вытянутый куб C_s^D. Пусть

$$L_s = \mathbb{Z}[e_{s1}, \ldots, e_{sD}] \tag{4.8}$$

— решетка (1.29), где $e_{sk} = e_k + s$ для $k = 1, \ldots, D$. Найдем для базиса решетки (4.8) двойственный ему базис, удовлетворяющий условию

$$e'_{sk} \cdot e_{sj} = \delta_{kj}. \tag{4.9}$$

Из (4.8), (4.9) получаем

$$e'_{sk} = e_k - \frac{s_k}{v(s)} e_0$$

для $k = 1, \ldots, D$ и

$$e'_{s0} = -e'_{s1} - \ldots - e'_{sD} = -\frac{1}{v(s)} e_0,$$

где $e_0 = e_1 + \ldots + e_D$ и $v(s) = \sigma(s) + 1 = s_1 + \ldots + s_D + 1$.

Согласно п. 1.1, вытянутый куб C_s^D имеет следующие вершины $V(C_s^D)$:

$$0, \quad e_{\overline{k}}, \quad e_{s\overline{k}}, \quad e_{s0}. \tag{4.10}$$

Здесь мы использовали сокращение $e_{\overline{k}} = e_{k_1} + \ldots + e_{k_d}$, где $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ — мультииндекс, $1 \leq k_1 < \ldots < k_d \leq D-1$; $e_{s\overline{k}} = e_{\overline{k}} + s$, $e_{s0} = e_0 + s$ для вектора $s = (s_1, \ldots, s_D) \in \mathbb{R}_+^D$. Таким образом, у вытянутого куба C_s^D количество вершин $\sharp V(C_s^D) = 2^{D+1} - 2$.

Используя найденные вершины (4.10), вычисляем скалярные произведения $e'_{sk} \cdot v$, $v \in V(C_s^D)$ для $k \neq 0$:

$$e'_{sk} \cdot 0 = 0;$$

$$e'_{sk} \cdot e_{\overline{j}} = \delta_{k\overline{j}} - \frac{ds_k}{v(s)}$$

для $d = 1, \ldots, D-1$, где

$$\delta_{k\overline{j}} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j_i \text{ для некоторого индекса } \quad j_i \in \overline{j}, \\ 0 & \text{— в противном случае,} \end{cases} \tag{4.11}$$

$$e'_{sk} \cdot e_{s\overline{j}} = \delta_{k\overline{j}} - \frac{ds_k}{v(s)} + s_k - \frac{s_k \sigma(s)}{v(s)} = \delta_{k\overline{j}} - \frac{(d-1)s_k}{v(s)},$$

$$e'_{sk} \cdot e_{s0} = 1 - \frac{Ds_k}{v(s)} + \frac{s_k}{v(s)} = 1 - \frac{(D-1)s_k}{v(s)}.$$

Полученные значения скалярных произведений занесем в таблицу.

Таблица 1. Скалярные произведения $e'_{sk} \cdot v$, $v \in V(C_s^D)$ для $k \neq 0$

0	$-\frac{d_1 s_k}{v(s)}$	$-\frac{(d_2-1)s_k}{v(s)}$	$1 - \frac{d_3 s_k}{v(s)}$	$1 - \frac{(D-1)s_k}{v(s)}$	$1 - \frac{(d_4-1)s_k}{v(s)}$

Здесь d_i независимо друг от друга могут принимать любые значения $1, \ldots, D-1$. Минимальное и максимальное значения скалярных произведений из таблицы 1 равны соответственно

$$-\frac{d_1 s_k}{v(s)}\bigg|_{d_1 = D-1} = -\frac{(D-1)s_k}{v(s)}, \quad 1 - \frac{(d_4-1)s_k}{v(s)}\bigg|_{d_4=1} = 1.$$

Отсюда получаем максимальную разность между скалярными произведениями для $k \neq 0$:

$$\max_{v \in V(C_s^D)} e'_{sk} \cdot v - \min_{v \in V(C_s^D)} e'_{sk} \cdot v = 1 + \frac{(D-1)s_k}{v(s)}. \tag{4.12}$$

Аналогично находим скалярные произведения $e'_{sk} \cdot v$, $v \in V(C_s^D)$ для $k = 0$:

$$e'_{sk} \cdot 0 = 0,$$

$$e'_{sk} \cdot e_{\bar{j}} = -\frac{d}{v(s)}$$

для $d = 1, \ldots, D-1$,

$$e'_{sk} \cdot e_{s\bar{j}} = -\frac{d}{v(s)} - \frac{\sigma(s)}{v(s)} = -1 - \frac{d-1}{v(s)},$$

$$e'_{sk} \cdot e_{s0} = -\frac{D}{v(s)} - \frac{\sigma(s)}{v(s)} = -1 - \frac{D-1}{v(s)}.$$

Таблица 2. Скалярные произведения $e'_{sk} \cdot v$, $v \in V(C_s^D)$ для $k = 0$

0	$-\frac{d_1}{v(s)}$	$-1-\frac{d_2-1}{v(s)}$	$-1-\frac{D-1}{v(s)}$

Поэтому в случае $k = 0$ максимальная разность между скалярными произведениями равна

$$\max_{v \in V(C_s^D)} e'_{sk} \cdot v - \min_{v \in V(C_s^D)} e'_{sk} \cdot v = 1 + \frac{D-1}{v(s)}. \tag{4.13}$$

Теорема 4.1. *1. Пусть C_s^D — вытянутый куб с параметром $s = (s_1, \ldots, s_D) \in \mathbb{R}_+^D$, и пусть вектор сдвига $\alpha = ts$, $0 < t < 1$, будет иррациональным* (1.50). *Тогда частоты $a_k = \operatorname{vol} \mathbb{T}_k^D / \operatorname{vol} \mathbb{T}_{s,\alpha}^D$ имеют вид*

$$a_0 = 1 - \frac{t\sigma(s)}{\sigma(s)+1} \tag{4.14}$$

и

$$a_k = \frac{ts_k}{\sigma(s)+1} \tag{4.15}$$

для $k = 1, \ldots, D$, где $\sigma(s) = s_1 + \ldots + s_D$.

2. *Константы*

$$c_k(C_s^D) = \max_{v \in V(C_s^D)} e'_{sk} \cdot v - \min_{v \in V(C_s^D)} e'_{sk} \cdot v$$

вычисляются по формулам

$$c_0(C_s^D) = 1 + \frac{D-1}{\sigma(s)+1} \tag{4.16}$$

и

$$c_k(C_s^D) = 1 + \frac{(D-1)s_k}{\sigma(s)+1} \tag{4.17}$$

для $k = 1, \dots, D$.

Доказательство. Первое утверждение следует из определения (4.5) частот a_k и формул объемов (1.14) и (1.20) вытянутого куба C_s^D и его областей P_k^c. Второе утверждение вытекает из теоремы 0.1 и равенств (4.12) и (4.13). □

Следствие 4.1. *Для константы*

$$c(C_s^D) = \max_{0 \leq k \leq D} c_k(C_s^D) \tag{4.18}$$

выполняется неравенство

$$c(C_s^D) \leq D \tag{4.19}$$

для любого $s \in \mathbb{R}_+^D$.

Доказательство следует из равенств

$$\sup_{s \in \mathbb{R}_+^D} \tfrac{1}{v(s)} = 1, \quad \sup_{s \in \mathbb{R}_+^D} \tfrac{s_k}{v(s)} = 1$$

и теоремы 4.1. □

Неравенство (4.19) указывет оценку сверху для константы $c(C_s^D)$ при любых параметрах $s \in \mathbb{R}_+^D$. Важно также знать и минимальные значения, которые может принимать $c(C_s^D)$. С этой целью приравняем правые части равенств (4.16) и (4.17). Находим $s_k = 1$ для $k = 1, \dots, D$. Отсюда получаем

Следствие 4.2. *При* $s = e_0 = (1, \dots, 1)$ *имеет место формула*

$$c(C_s^D) = 2 - \frac{2}{D+1} \tag{4.20}$$

для любой размерности $D \geq 2$ *и, следовательно,*

$$c(C_s^D) \nearrow 2 \quad \textit{при} \quad D \to +\infty. \tag{4.21}$$

Замечание 4.1. Формула (4.20) оказывается справедливой при $D = 1$, если интервал $C_s^1 = [0, 1+s]$ получить формально из единичного интервала $C^1 = [0, 1]$, применяя процедуру вытягивания п. 1.1 с положительным параметром $s \in \mathbb{R}$.

4.3. Зеркально вытянутый куб C_s^{*D}. Пусть параметр $s \in \mathbb{R}_+^D$ удовлетворяет условию $\max(s) > 1$,

$$L_s^* = \mathbb{Z}[e_{s1}^*, \ldots, e_{sD}^*], \tag{4.22}$$

где $e_{sk}^* = s - e_k$ для $k = 1, \ldots, D$. Найдем для (4.22) двойственный базис из условия

$$e_{sk}^{*'} \cdot e_{sj}^* = \delta_{kj}. \tag{4.23}$$

Из (4.22) и (4.23) получаем

$$e_{sk}^{*'} = \frac{s_k}{v^*(s)} e_0 - e_k \tag{4.24}$$

для $k = 1, \ldots, D$, где $v^*(s) = \sigma(s) - 1 = s_1 + \ldots + s_D - 1 > 0$ в силу условия $\max(s) > 1$. Для вектора $e_{s0}^{*'} = -e_{s1}^{*'} - \ldots - e_{sD}^{*'}$ из (4.24) вытекает равенство

$$e_{s0}^{*'} = -\frac{1}{v^*(s)} e_0. \tag{4.25}$$

Согласно п. 2.1, зеркально вытянутый куб C_s^D имеет вершины $V(C_s^{*D})$:

$$e_0, \quad s, \quad e_{\overline{k}}, \quad e_{s\overline{k}} \tag{4.26}$$

для $k = 1, \ldots, D$, где $e_{s\overline{k}} = e_{\overline{k}} + s$ и $e_{\overline{k}} = e_{k_1} + \ldots + e_{k_d}$ для мультииндекса $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_d)$, $d = 1, \ldots, D-1$. Следовательно, у зеркально вытянутого куба C_s^{*D} количество вершин $\sharp V(C_s^{*D}) = 2^{D+1} - 2$ столько же, сколько у куба C_s^D.

Используя (4.26), вычисляем скалярные произведения $e_{sk}^{*'} \cdot v$, $v \in V(C_s^{*D})$ для $k \neq 0$:

$$e_{sk}^{*'} \cdot e_0 = -1 + \frac{Ds_k}{v^*(s)};$$

$$e_{sk}^{*'} \cdot s = \frac{s_k}{v^*(s)};$$

$$e_{sk}^{*'} \cdot e_{\overline{j}} = -\delta_{k\overline{j}} + \frac{ds_k}{v^*(s)}$$

и

$$e_{sk}^{*'} \cdot e_{s\overline{j}} = -\delta_{k\overline{j}} + \frac{ds_k}{v^*(s)} + \frac{s_k \sigma(s)}{v^*(s)} - s_k = -\delta_{k\overline{j}} + \frac{(d+1)s_k}{v^*(s)}$$

для $d = 1, \ldots, D-1$. Перебирая различные мультииндексы $\overline{j}$, получаем следующие значения скалярных произведений.

Таблица 3. Скалярные произведения $e^{*'}_{sk} \cdot v$, $v \in V(C^{*D}_s)$ для $k \neq 0$

$-1 + \frac{d_1 s_k}{v^*(s)}$	$-1 + \frac{(d_2+1)s_k}{v^*(s)}$	$\frac{d_3 s_k}{v^*(s)}$	$\frac{(d_4+1)s_k}{v^*(s)}$

Здесь d_i независимо принимают любые значения $1, \ldots, D-1$. Из таблицы 3 находим максимальную разность между скалярными произведениями для $k \neq 0$:

$$\max_{v \in V(C^{*D}_s)} e^{*'}_{sk} \cdot v - \min_{v \in V(C^{*D}_s)} e^{*'}_{sk} \cdot v = 1 + \frac{(D-1)s_k}{v^*(s)}. \tag{4.27}$$

Если $k = 0$, то скалярные произведения $e^{*'}_{sk} \cdot v$, $v \in V(C^{*D}_s)$ принимают значения:

$$e^{*'}_{sk} \cdot e_0 = -\frac{D}{v^*(s)};$$

$$e^{*'}_{sk} \cdot s = -\frac{\sigma(s)}{v^*(s)} = -1 - \frac{1}{v^*(s)};$$

$$e^{*'}_{sk} \cdot e_{\overline{j}} = -\frac{d}{v^*(s)}$$

и

$$e^{*'}_{sk} \cdot e_{s\overline{j}} = -\frac{d}{v^*(s)} - \frac{\sigma(s)}{v^*(s)} = -1 - \frac{d+1}{v^*(s)}$$

для $d = 1, \ldots, D-1$.

Таблица 4. Скалярные произведения $e^{*'}_{sk} \cdot v$, $v \in V(C^{*D}_s)$ для $k = 0$

$-1 - \frac{d_1+1}{v^*(s)}$	$-1 - \frac{1}{v^*(s)}$	$-\frac{D}{v^*(s)}$	$-\frac{d_2}{v^*(s)}$

Здесь снова d_i независимо принимают значения $1, \ldots, D-1$. С помощью таблицы 4 вычисляем максимальную разность между скалярными произведениями для $k = 0$:

$$\max_{v \in V(C^{*D}_s)} e^{*'}_{sk} \cdot v - \min_{v \in V(C^{*D}_s)} e^{*'}_{sk} \cdot v = 1 + \frac{D-1}{v^*(s)}. \tag{4.28}$$

Теорема 4.2. 1. *Пусть C^{*D}_s — зеркально вытянутый куб с параметром $s = (s_1, \ldots, s_D) \in \mathbb{R}^D_+$, удовлетворяющим условию $\max(s) > 1$, и пусть вектор сдвига $\alpha = ts$, где $0 < t < 1 - 1/\max(s)$, будет иррациональным* (2.37). *Тогда частоты $a_k = \mathrm{vol}\, \mathbb{T}^{*D}_k / \mathrm{vol}\, \mathbb{T}^{*D}_{s,\alpha}$ имеют вид*

$$a_0 = 1 - \frac{t\sigma(s)}{\sigma(s) - 1} \tag{4.29}$$

и

$$a_k = \frac{ts_k}{\sigma(s) - 1} \tag{4.30}$$

для $k = 1, \dots, D$.

2. *Константы*

$$c_k(C_s^{*D}) = \max_{v \in V(C_s^{*D})} e_{sk}^{*'} \cdot v - \min_{v \in V(C_s^{*D})} e_{sk}^{*'} \cdot v \tag{4.31}$$

вычисляются по формулам

$$c_0(C_s^{*D}) = 1 + \frac{D-1}{\sigma(s) - 1} u \tag{4.32}$$

и

$$c_k(C_s^{*D}) = 1 + \frac{(D-1)s_k}{\sigma(s) - 1} \tag{4.33}$$

для $k = 1, \dots, D$.

Доказательство. Первое утверждение следует из определения (4.5) частот a_k и формул объемов (2.10), (2.16) и (2.17) для зеркально вытянутого куба C_s^{*D} и его областей P_k^{*c}. Второе утверждение вытекает из теоремы 0.1 и равенств (4.27) и (4.28). □

Из теоремы 4.2 вытекают два следствия.

Следствие 4.3. *Константы*

$$c(C_s^{*D}) = \max_{0 \le k \le D} c_k(C_s^{*D}) \tag{4.34}$$

обладают свойством

$$\sup_{\substack{s \in \mathbb{R}_+^D \\ \max(s) > 1}} c(C_s^{*D}) = +\infty. \tag{4.35}$$

Доказательство. Равенство (4.35) следует из теоремы 4.2, если выбрать последовательность значений параметров s с условием $\sigma(s) \searrow 1$. □

Следствие 4.4. *Пусть* $s = \lambda e_0$, *где* $\lambda > 1$. *Тогда константы* $c(C_s^{*D})$ *вычисляются по формуле*

$$c(C_s^{*D}) = 2 - \frac{\lambda - 1}{D\lambda - 1} \tag{4.36}$$

и, значит, получаем

$$c(C_s^{*D}) \searrow 2 - \tfrac{1}{D} \quad \text{при} \quad \lambda \nearrow +\infty. \tag{4.37}$$

Доказательство. Формула (4.36) получается подстановкой параметра $s = \lambda e_0$ в формулы (4.32) и (4.33). □

Замечание 4.2. Из формул (4.16), (4.17) и (4.32) (4.33) следует, что константы $c(C_s^D)$, $c(C_s^{*D})$, определенные в (4.18), (4.34), связаны между собой неравенством

$$c(C_s^D) < c(C_s^{*D}) \tag{4.38}$$

для любой размерности $D \geq 2$.

4.4. Произведение торических разверток. Пусть

$$L^{D_1} = \mathbb{Z}[l_1^0, \dots, l_{D_1}^0], \quad L^{D_2} = \mathbb{Z}[m_1, \dots, m_{D_1}] \tag{4.39}$$

— полные решетки соответственно для торических разверток T^{D_1} и T^{D_2}. Рассмотрим произведение этих решеток $L^{D_1} \otimes L^{D_2} = L^{D_1} \otimes_0 L^{D_2}$, имеющее, согласно (3.8), вид

$$L^{D_1} \otimes L^{D_2} = \mathbb{Z}[\bar{l}_1^0, \dots, \bar{l}_{D_1}^0, \overline{m}_1, \dots, \overline{m}_{D_2}], \tag{4.40}$$

где

$$\bar{l}_1^0 = (l_1^0, -w_0), \dots, \bar{l}_{D_1}^0 = (l_{D_1}^0, -w_0), \quad \overline{m}_1 = (0, m_1), \dots, \overline{m}_{D_2} = (0, m_{D_2}).$$

Упростим обозначения:

$$L^{D_1} = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_{D_1}], \quad L^{D_2} = \mathbb{Z}[m_1, \dots, m_{D_1}], \tag{4.41}$$

$$(l \otimes m)_k = \bar{l}_k = (l_k, -w_0), \quad (l \otimes m)_j = \overline{m}_j = (0, m_j), \tag{4.42}$$

где $k = 1, \dots, D_1$ и $j = 1, \dots, D_2$.

Будем для базиса (4.42) искать двойственный ему базис в виде

$$(l \otimes m)'_k = \bar{l}'_k = (l'_k, 0), \quad (l \otimes m)'_j = \overline{m}'_j = (x_{j1} l'_1 + \ldots + x_{jD_1} l'_{D_1}, m'_j). \tag{4.43}$$

Для этого нужно, чтобы выполнялось условие

$$\overline{m}'_j \cdot \bar{l}_m = 0$$

для любых $m = 1, \dots, D_1$ и $j = 1, \dots, D_2$. В силу (4.42) и (4.43) имеем

$$\begin{aligned} \overline{m}'_j \cdot \bar{l}_m &= (x_{j1} l'_1 + \ldots + x_{jD_1} l'_{D_1}, m'_j) \cdot (l_m, -w_0) \\ &= (x_{j1} l'_1 + \ldots + x_{jD_1} l'_{D_1}) \cdot l_m - m'_j \cdot w_0 \\ &= x_{jm} - m'_j \cdot w_0 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, обозначая $x_j = x_{jm}$, получаем равенства

$$x_j = x_{jm} = m'_j \cdot w_0 \tag{4.44}$$

для всех $m = 1, \ldots, D_1$. Подставляя эти значения в (4.43), получаем

$$\overline{m}'_j = (x_j(l'_1 + \ldots + l'_{D_1}), m'_j) = (-x_j l'_0, m'_j), \qquad (4.45)$$

где $l'_0 = -l'_1 - \ldots - l'_{D_1}$.

Лемма 4.1. *Для базиса* (4.42) *двойственным будет базис*

$$(l \otimes m)'_k = \overline{l}'_k = (l'_k, 0), \quad (l \otimes m)'_j = \overline{m}'_j = (-x_j l'_0, m'_j), \qquad (4.46)$$

где $x_j = m'_j \cdot w_0$, *при этом индексы пробегают значения* $k = 1, \ldots, D_1$ *и* $j = 1, \ldots, D_2$.

Доказательство вытекает из равенств (4.43) и (4.45). □

В силу (4.46) вектор $(l \otimes m)'_0 = -\overline{l}'_1 - \ldots - \overline{l}'_{D_1} - \overline{m}'_1 - \ldots - \overline{m}'_{D_2}$ равен

$$(l \otimes m)'_0 = (l'_0, 0) + (\sigma(x) l'_0, m'_0) = (v(x) l'_0, m'_0). \qquad (4.47)$$

Пусть T^{D_1} и T^{D_2} — многогранники, $V(T^{D_1})$ и $V(T^{D_2})$ — их вершины. Тогда, согласно определению из п. 3.1, произведение $T^{D_1} \otimes T^{D_2} = T^{D_1} \otimes_0 T^{D_2}$ также является многогранником с вершинами

$$\begin{aligned} V(T^{D_1} \otimes T^{D_2}) &= V(T^{D_1}) \times V(T^{D_2}) = \\ &= \{v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^D, v_i \in V(T^{D_i}), i = 1, 2\}, \end{aligned}$$

где $D = D_1 + D_2$. По теореме 0.1 имеем

$$c_k(T^{D_1} \otimes T^{D_2}) = \max_{v \in V(T^{D_1} \otimes T^{D_2})} \overline{l}'_k \cdot v - \min_{v \in V(T^{D_1} \otimes T^{D_2})} \overline{l}'_k \cdot v \qquad (4.48)$$

для $k = 1, \ldots, D_1$,

$$c_j(T^{D_1} \otimes T^{D_2}) = \max_{v \in V(T^{D_1} \otimes T^{D_2})} \overline{m}'_j \cdot v - \min_{v \in V(T^{D_1} \otimes T^{D_2})} \overline{m}'_j \cdot v \qquad (4.49)$$

для $j = 1, \ldots, D_2$,

$$c_0(T^{D_1} \otimes T^{D_2}) = \max_{v \in V(T^{D_1} \otimes T^{D_2})} (l \otimes m)'_0 \cdot v - \min_{v \in V(T^{D_1} \otimes T^{D_2})} (l \otimes m)'_0 \cdot v. \qquad (4.50)$$

Отсюда следует, что скалярные произведения для $k = 1, \ldots, D_1$:

$$\overline{l}'_k \cdot v = (l'_k, 0) \cdot (v_1, v_2) = l'_k \cdot v_1 \qquad (4.51)$$

— такие же, как для развертки T^{D_1}; скалярные произведения для $j = 1, \ldots, D_2$ равны

$$\overline{m}'_j \cdot v = (-x_j l'_0, m'_j) \cdot (v_1, v_2) = -x_j l'_0 \cdot v_1 + m'_j \cdot v_2; \qquad (4.52)$$

и, согласно (4.47),

$$(l \otimes m)'_0 \cdot v = (v(x) l'_0, m'_0) \cdot (v_1, v_2) = v(x) l'_0 \cdot v_1 + m'_0 \cdot v_2. \qquad (4.53)$$

Из равенств (4.48), (4.51) вытекает формула

$$c_k(T^{D_1} \otimes T^{D_2}) = c_k(T^{D_1}) \tag{4.54}$$

для $k = 1, \ldots, D_1$; из равенств (4.49), (4.52) — формула

$$c_j(T^{D_1} \otimes T^{D_2}) = |-x_j| c_0(T^{D_1}) + c_j(T^{D_2}) \tag{4.55}$$

для $j = 1, \ldots, D_2$; а из равенств (4.50), (4.53) следует

$$c_0(T^{D_1} \otimes T^{D_2}) = |v(x)| c_0(T^{D_1}) + c_0(T^{D_2}). \tag{4.56}$$

Согласно (3.13), $w_0 = \beta = \beta_1 m_1 + \ldots + \beta_{D_2} m_{D_2}$. Отсюда и равенства (4.44) получаем

$$x_j = m'_j \cdot w_0 = \beta_j \tag{4.57}$$

для $j = 1, \ldots, D_2$. Поэтому из (4.57), (4.55) и (4.56) вытекают следующие формулы:

$$c_j(T^{D_1} \otimes T^{D_2}) = |\beta_j| c_0(T^{D_1}) + c_j(T^{D_2}) \tag{4.58}$$

для $j = 1, \ldots, D_2$; и

$$c_0(T^{D_1} \otimes T^{D_2}) = |v(\beta)| c_0(T^{D_1}) + c_0(T^{D_2}), \tag{4.59}$$

где $v(\beta) = \sigma(\beta) + 1 = \beta_1 + \ldots + \beta_{D_2} + 1$.

Теорема 4.3. *Пусть даны перекладывающиеся торические развертки T^{D_1} и T^{D_2}, являющиеся многогранниками. Тогда для их произведения*

$$T^D = T^{D_1} \otimes T^{D_2} = T^{D_1} \otimes_0 T^{D_2},$$

также являющегося многогранником размерности $D = D_1 + D_2$, выполняются следующие формулы:

$$c_0(T^D) = |v(\beta)| c_0(T^{D_1}) + c_0(T^{D_2}); \tag{4.60}$$

$$c_k(T^D) = c_k(T^{D_1}) \tag{4.61}$$

для $k = 1, \ldots, D_1$;

$$c_j(T^D) = |\beta_j| c_0(T^{D_1}) + c_j(T^{D_2}) \tag{4.62}$$

для $j = 1, \ldots, D_2$.

Доказательство вытекает из (4.59), (4.54) и (4.58). □

Для произведения торических разверток $T^D = T^{D_1} \otimes T^{D_2}$ определим константу $c(T^D)$, полагая

$$c(T^D) = \max_{k,j} \{c_0(T^D), c_k(T^D), c_j(T^D)\}, \tag{4.63}$$

и пусть

$$c(T^{D_1}) = \max_k\{c_k(T^{D_1})\}, \quad c(T^{D_2}) = \max_j\{c_j(T^{D_2})\}.$$

Из доказанных формул (4.60)-(4.62) вытекает

Следствие 4.5. *Для константы* (4.63) *выполняется следующее неравенство*

$$c(T^D) = c(T^{D_1} \otimes T^{D_2}) \leq m(\beta)c_0(T^{D_1}) + c(T^{D_2}),$$

где $m(\beta) = \max\{1, |v(\beta)|, |\beta_j|, j = 1, \ldots, D_2\}$.

Литература

1. В. Г. Журавлев, *Многомерная теорема Гекке о распределении дробных долей.* — Алгебра и анализ (в печати).
2. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах*, М., 1953.
3. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, том 2. Киев, 1952.
4. В. П. Гришухин, *Свободные и несвободные многогранники Вороного.* — Мат. заметки **80** (2006), 367–378.
5. E. Hecke, *Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. Einz.* — Abh. math. sem. Hamburg. Univ. **1** (1921), 54–76.
6. Szüsz R., *Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats.* — Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **5** (1954), 35–39.
7. H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins.* — Math. Ann. **77** (1916), 313–352.

Zhuravlev V. G. Exchanged toric developments and bounded remainder sets.

Using exchanged toric developments we construct toric tilings into bounded remainder sets. For this two methods are applied. There are a stretch of the unit cubes and a general method of multiplication of the toric developments. A multi-dimensional analogue of the Hecke theorem on the distribution of fraction parts is proved.

Владимирский государственный
гуманитарный университет,
пр. Строителей 11, Владимир 600024, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 1 июня 2001 г.