

Для каждой точки P скатерти обозначим через $f(P)$, $g(P)$ и $h(P)$ соответственно точки, симметричные ей относительно одной из двух линий, соединяющих середины противоположных сторон скатерти, второй такой линии и той ее диагонали, при перегибе через которую видимая площадь пятен становится равна S_1 . Пусть $k(P)$ – точка, симметричная точке P относительно второй диагонали скатерти. Тогда $h(k(P))$ и $f(g(P))$ совпадают с точкой, симметричной точке P относительно центра скатерти. Поэтому точки $k(P)$ и $h(f(g(P)))$ также совпадают.

Предположим, что $S_1 < \frac{2S}{3}$. Тогда площадь множества всех точек Q , для которых $P = g(Q)$ и Q покрыты пятнами, равна $2(S - S_1) > \frac{2S}{3}$. Аналогично, площадь множества всех точек Q , для которых Q и $R = f(Q)$ покрыты пятнами, равна $2(S - S_1) > \frac{2S}{3}$. Тогда площадь множества тех точек Q , для которых одновременно выполнены оба условия, должна быть больше чем $\frac{2S}{3} + \frac{2S}{3} - S = \frac{S}{3}$. Значит, и площадь множества всех точек P , для которых P и $R = f(Q) = f(g(P))$ покрыты пятнами, больше чем $\frac{S}{3}$.

Аналогично, площадь множества всех точек P , для которых P и $T = h(R) = h(f(g(P)))$ покрыты пятнами, больше нуля.

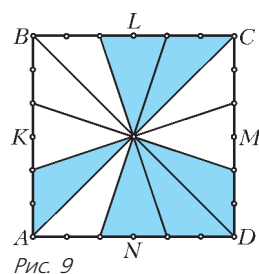


Рис. 9

С другой стороны, $T = h(f(g(P))) = k(P)$. Из условия следует, что площадь множества тех точек P , для которых P и $k(P)$ покрыты пятнами, равна 0 – противоречие.

Пример расположения пятен, где $\frac{S_1}{S} = \frac{2}{3}$, показан на рисунке 9. Стороны квадратной скатерти разделены отмеченными на них точками на 6 равных частей.

5. а) 324.

Пусть k – простое число и

$$n = n_0 + n_1k + n_2k^2 + \dots + n_p k^p = (n_p n_{p-1} \dots n_1 n_0)_k$$

– k -ичное представление числа n . Покажем, что

$S(n, k) = (n_0 + 1)(n_1 + 1) \dots (n_p + 1)$. Из этого факта вытекает ответ в пункте а) и доказательство пункта б).

Скажем, что два многочлена $P_n(t)$ и $Q_n(t)$ с целыми коэффициентами сравнимы по модулю k , если сравнимы по модулю k (т.е. дают одинаковый остаток при делении на k) все их коэффициенты при одинаковых степенях. Обозначать это будем так: $P_n(t) \equiv Q_n(t) \pmod{k}$. Очевидно, что

$$1) \text{ если } P_n(t) \equiv Q_n(t) \text{ и } T_n(t) \equiv S_n(t), \text{ то } P_n(t)T_n(t) \equiv Q_n(t)S_n(t);$$

2) если p – простое число, то C_p^m делится на p при любом $m = 1, \dots, p-1$ и C_l^m не делится на p при любом $l < p$, $m = 0, \dots, l$.

В дальнейшем k – простое число. Нетрудно показать по индукции, что для любого m выполнено равенство

$$(t+1)^{k^m} \equiv t^{k^m} + 1.$$

Теперь докажем основное утверждение индукцией по числу разрядов в k -ичной записи числа n . Если $0 \leq n \leq k-1$, утверждение очевидно. Пусть оно верно, если n представимо в виде $n = n_0 + n_1k + n_2k^2 + \dots + n_{p-1}k^{p-1}$, $0 \leq n_i \leq k-1$.

Рассмотрим число $N = n_0 + n_1k + n_2k^2 + \dots + n_{p-1}k^{p-1} + n_p k^p = n + n_p k^p$, $1 \leq n_p \leq k-1$. Имеем

$$(t+1)^N = (t+1)^n \left((t+1)^{k^p} \right)^{n_p} = (t+1)^n \left(t^{k^p} + 1 \right)^{n_p} = \sum_{j=0}^{n_p} C_{n_p}^j t^{k^p j} (t+1)^n.$$

Ни один из коэффициентов $C_{n_p}^j$ не делится на k и (в силу того, что $n < k^p$) у многочленов $t^{k^p j} (t+1)^n$ при разных j нет одинаковых степеней t . Поэтому число коэффициентов многочлена $(t+1)^N$, которые не делятся на k , равно числу таких коэффициентов у $(t+1)^n$, умноженному на $n_p + 1$, что и требовалось.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. $t = 120$ с. 2. $s = 1,125$ км.
3. Через 1,2 мин или через 6 мин. 4. $\rho = 8500$ кг/м³.

8 класс

1. $l = 6$ км. 2. $l = 30$ см. 3. $m = 400$ г, $V = 100$ мл.
4. Растает не весь лед, уровень воды понизится приблизительно на 4,6 мм.

9 класс

1. $v_p = 1$ м/с (при малых x приведенный в условии график приближенно совпадает с прямой $y = 2x$), $a = 0,02$ м/с².
2. $m_A = 63$ кг, $m_B = 2700$ кг. 3. $t_B = 8$ мин.
4. 12 (после двух последовательных отражений угол между лучом и вертикалью увеличивается на $2\varphi = 14^\circ$).

10 класс

1. $\beta = \pm \arccos \left(\frac{\mu g (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}{\sqrt{1 + \mu^2 (a + \mu g)}} \right) + \arctg \mu$, $\beta_1 \approx 45^\circ$, $\beta_2 \approx -34^\circ$ (сила направлена вниз под углом к горизонту, но при этом заклинивания бруска не происходит).
2. $x_{\max} \approx 10$ см. 3. $F_B = \frac{\rho g V_0}{1 + (\rho g H)/(p_0 - p_H)}$.
4. $t_B = t + \frac{10\rho_A(t + \lambda/c_B)}{27\rho_B - 10\rho_A} \approx 70$ с. 5. $P = \frac{qU}{t} \approx 43$ мВт.

11 класс

1. $Q = \frac{32}{7} \nu R T_0 \approx 10,6$ кДж (газ получает тепло на линейном участке цикла от точки 1 до точки 3, в которой объем составляет 5 минимальных объемов, а давление – 3 минимальных давлений).
2. $\frac{E}{B} = \frac{v}{\sqrt{2}}$; вектор \vec{E} направлен перпендикулярно плоскости рисунка, вектор \vec{B} лежит в плоскости рисунка и составляет со скоростью электрона угол 45° или 135° .
3. $n > \sqrt{2} \approx 1,41$.

ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

8 класс

1. $v_H = 14,5$ м/с = 52,2 км/ч, $l = 100$ м.
2. $\eta = 80\%$. 3. $m = 18$ г. 4. $t = 24$ с.

9 класс

1. $a_M = g \frac{M - 3m}{M + 9m}$, $a_m = -3a_M = -3g \frac{M - 3m}{M + 9m}$.

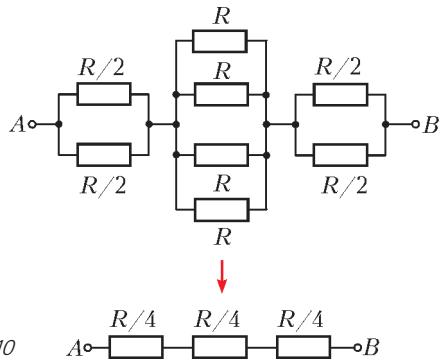


Рис. 10

- m_1 – любое (от m_1 зависит только «быстрота» вставания игрушки), $m_2 < M \frac{r_1}{r_1 + r_2} = 150$ г.
- $R_{\text{общ}} = \frac{3}{4} R$; см. рис.10.

10 класс

- $a = \frac{6}{49} g = 1,2$ м/с².

- $\alpha = \arctg\left(\frac{1}{2}(\tg \alpha_1 \pm \tg \alpha_2)\right)$ (знак «+» соответствует случаю, когда стержни скрепляют так, что их более тяжелые части оказываются с одной стороны, знак «-» соответствует противоположному случаю).

- $R_{\text{общ}} = \frac{2}{3} R$; см. рис.11.

- $v_{\text{max}} = 2v_0$ при $v_0 < v_1$ и $v_{\text{max}} = v_0 - \sqrt{v_0^2 - v_1^2}$ при $v_0 > v_1$,

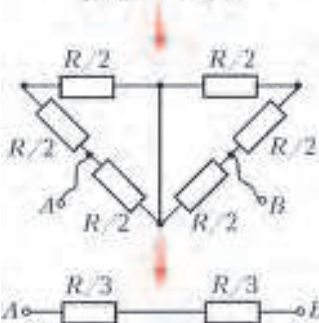
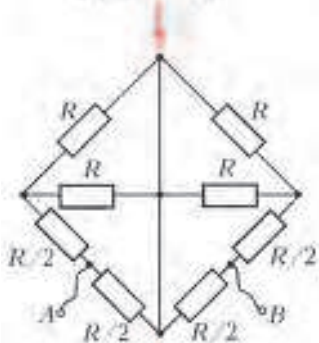
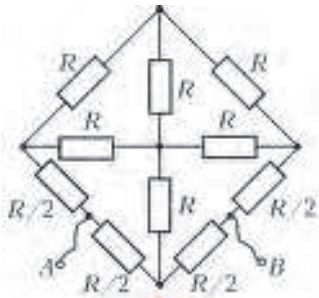


Рис. 11

где $v_1 = \sqrt{\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 m d}}$; см. рис.12.

11 класс

- $\alpha = \arccos\left(\frac{R}{l} \frac{\mu_1 \mu_2}{\sqrt{1 + \mu_2^2}}\right) - \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + \mu_2^2}} \approx 54,6^\circ$.

- $v_b \approx 1,87 \pm 0,02$ моль, $v_a \approx 0,97 \pm 0,01$ моль (график зависимости давления p в системе от температуры T состоит из двух линейных участков $p = v_a RT/V$ и $p = (v_a + v_b) RT/V$ и располагающегося между ними участка графика $p = p_n(T)$, представляющего собой зависимость давления насыщенных паров воды от температуры).

- 1) $X = 31,5$ см; 2) $m = 40$ г; 3) $E \approx 18$ мДж;

- 4) $T \approx 0,84 \pm 0,05$ с.

- Эффект связан с тем, что Солнце не является точечным источником света. Форма зайчика повторяет форму зеркала для каждой из светящихся точек солнечного диска, но все эти изображения накладываются друг на друга, поскольку лучи от разных точек Солнца идут под разными малыми углами в пределах

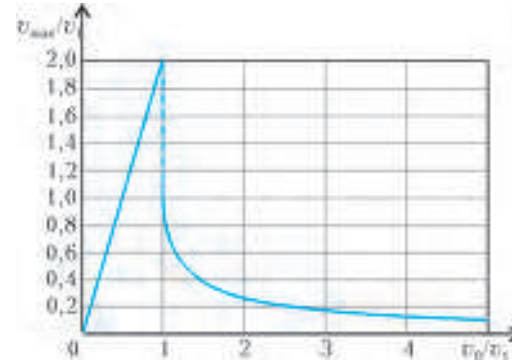


Рис. 12

0,01 рад $\approx 0,5^\circ$. Пока расстояние от стены до зеркала мало, размытие краев зайчика, связанное со смещением этих изображений, также невелико: например, в 20 см от стены оно составляет примерно $0,01 \cdot 0,2$ м = 0,002 м = 2 мм, и форма зайчика похожа на форму зеркала. В данном случае зайчик был квадратным со стороной $d = 5$ см, значит, зеркальце размером 5×7 см располагалось под некоторым углом к лучу света. От каждой точки зеркала в сторону стены идет отраженный конический пучок света с угловой шириной $\varphi \approx 0,01$ рад. На большом расстоянии L от стены диаметр $D \approx L\varphi$ светового кружка значительно превышает размеры зеркала, так что область перекрытия этих кружков на стене становится гораздо больше их смещения d из-за сдвига оснований этих конусов в пределах зеркала. Таким образом, в результате на стене получается зайчик в виде светлого круга диаметром порядка D , окруженный размытым более слабо освещенным кольцом шириной, примерно равной d . По условию, $d < 0,1D \approx 0,1L\varphi$, откуда $L > \frac{d}{0,1\varphi} \approx 50$ м.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Л.В.Калиничева, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

в соответствии с предоставленными материалами

в ЗАО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь

www.Pareto-print.ru