Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ю. И. Черский, Метод неполной факторизации, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1970, выпуск 7, 293–296

https://www.mathnet.ru/kukz526

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.80
11 декабря 2025 г., 06:45:24

КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 7 *Труды семинара по краевым задачам* *1970*

Ю. И. ЧЕРСКИЙ

МЕТОД НЕПОЛНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ

Начнем с простых замечаний об основной краевой задаче теории аналитических функций — задаче Римана (см. [1], стр. 111)

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L \tag{1}$$

(L — простой гладкий замкнутый контур). Известно, что задача (1) решается путем факторизации коэффициента $G(t)$:

$$G(t) = \frac{\Omega^+(t)}{\Omega^-(t)}, \quad t \in L. \tag{2}$$

В простейшем случае, когда $G(t) \neq 0$ и $\operatorname{Ind} G(t) = 0$, функции Ω^+ и Ω^- (будем называть их „факторизующими") являются аналитическими и не имеющими нулей соответственно внутри и вне контура L. Но уже при $\operatorname{Ind} G(t) \neq 0$ у этих функций приходится допускать нули или полюсы. Обычно в качестве факторизующих используются так называемые канонические функции, у которых нули или полюсы допускаются в единственной точке — бесконечно-удаленной. Однако, вполне пригодны факторизующие функции, у которых нули или полюсы сосредоточены в любой другой точке комплексной плоскости (даже контурной!), или одновременно в нескольких точках. В этом смысле можно сказать, что любая факторизация ведет к цели.

Разумеется, чем существеннее отличается факторизующая функция от канонической, тем больше будет дополнительных трудностей при решении задачи Римана — сейчас нам важно отметить принципиальную возможность решения. Оказывается, у факторизующих функций, кроме полюсов, допустимы другие особенности, в частности, разрывы вдоль некоторых линий. Пусть, например, функция $\Omega^+(z)$ аналитична и не имеет нулей внутри L, а $\Omega^-(z)$ аналитична и не имеет нулей вне контура L, за исключением точек лежащего вне L разомкнутого контура Γ, на котором $\Omega^-(z)$ терпит разрыв первого рода.

Как обычно при решении задачи Римана, подставим (2) в (1) и запишем известную функцию $g(t)/\Omega^+(t)$ в виде разности предельных значений функций, аналитических внутри или вне L:

$$\frac{g(t)}{\Omega^+(t)}=\left[\frac{g(t)}{\Omega^+(t)}\right]^+-\left[\frac{g(t)}{\Omega^+(t)}\right]^-.$$

Получим

$$\frac{\Phi^+(t)}{\Omega^+(t)}-\left[\frac{g(t)}{\Omega^+(t)}\right]^+=\frac{\Phi^-(t)}{\Omega^-(t)}-\left[\frac{g(t)}{\Omega^+(t)}\right]^-=F(t),\ t\in L. \qquad (3)$$

Аналитическое продолжение через контур L, возможное ввиду левого равенства (3), показывает, что $F(t)$ есть значение на контуре L новой неизвестной кусочно аналитической функции $F(z)$ со скачком вдоль Γ. Искомые функции $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ выражаются через $F(t)$ с помощью равенств

$$\Phi^+(t)=\Omega^+(t)\left\{\left[\frac{g(t)}{\Omega^+(t)}\right]^++F(t)\right\},$$

$$\Phi^-(t)=\Omega^-(t)\left\{\left[\frac{g(t)}{\Omega^+(t)}\right]^-+F(t)\right\},\ t\in L. \qquad (4)$$

Получим краевое условие для определения функции $F(t)$. Зададим на Γ направление обхода и условимся обозначать предельные значения аналитических функций значком $+$ (внизу) при подходе к Γ слева и значком $-$ (внизу) — при подходе справа. Из непрерывности функций $\Phi^-(z)$ вне L следует равенство $\Phi^-_+(\tau)=\Phi^-_-(\tau)$, $\tau\in\Gamma$, или

$$\Omega^-_+(\tau)\left\{\left[\frac{g}{\Omega^+}\right]^-+F_+(\tau)\right\}=\Omega^-_-(\tau)\left\{\left[\frac{g}{\Omega^+}\right]^-+F_-(\tau)\right\},\ \tau\in\Gamma. \qquad (5)$$

(5) — это краевая задача Римана на контуре Γ с неизвестной кусочно аналитической функцией $F(z)$. Определив последнюю, найдем по формулам (4) решение исходной задачи Римана (1).

Если вместо разрыва Γ у функции $\Omega^-(z)$ допустить существенно особую точку, то аналогичными рассуждениями можно вместо (5) получить бесконечную алгебраическую систему типа свертки.

Для самой задачи Римана применение такой „неполной" факторизации может оказаться целесообразным лишь в редких случаях, когда, например, коэффициет $G(t)$ на L является обобщенной функцией, у которой предполагается заданной лишь неполная факторизация. Но изложенные выше соображения иногда приносят пользу при решении других задач теории аналитических функций, в краевом условии которых имеется более двух слагаемых, содержащих искомые функ-

ции. К этим задачам обычный метод факторизации неприменим.

Рассмотрим одну такую задачу на вещественной оси:

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^+(-x) + \Phi^-(x) + H(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (6)$$

Ищутся функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, аналитические соответственно при $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$.

При произвольно заданных функциях $G(x)$ и $H(x)$ задачу (6), по-видимому, нельзя решить в квадратурах. Нашей целью является определение некоторого множества коэффициентов $G(x)$, когда такое решение возможно.

Предположим, что функция $G(x)$ аналитически продолжима на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$, за исключением лежащего там контура Γ, на котором эта функция имеет разрыв первого рода. Предположим также, что $G(z) \neq 0$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$.

Представим известную функцию $H(x)$ в виде разности предельных значений $H^+(x) - H^-(x)$ и приведем краевое условие (6) к виду, при котором возможно аналитическое продолжение через вещественную ось:

$$\Phi^+(x) - H^+(x) = G(x)\Phi^+(-x) + \Phi^-(x) - H^-(x) = F(x),$$
$$-\infty < x < \infty.$$

Функция $F(z)$ является новой неизвестной кусочно аналитической функцией со скачком вдоль Γ. Выразим прежние неизвестные функции через $F(z)$

$$\Phi^+(z) = F(z) + H^+(z), \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0, \quad (7)$$

$$\Phi^-(z) = F(z) + H^-(z) - G(z)F(-z) - G(z)H^+(-z), \quad (8)$$
$$\operatorname{Im} z \leqslant 0, \ z \in \overline{\Gamma}.$$

Требование непрерывности функции $\Phi^-(z)$ при переходе через Γ приводит к краевому условию (ср. с условием (5))

$$F_+(\tau) + H^-(\tau) - G_+(\tau)F(-\tau) - G_+(\tau)H^+(-\tau) =$$
$$= F_-(\tau) + H^-(\tau) - G_-(\tau)F(-\tau) - G_-(\tau)H^+(-\tau), \ \tau \in \Gamma. \quad (9)$$

Сведем краевую задачу (9) к интегральному уравнению. Функцию $F(z)$ будем искать в виде интеграла типа Коши с неизвестной плотностью $p(\tau)$. Используя формулы Ю. В. Сохоцкого, получим

$$p(t) - \frac{G_+(t) - G_-(t)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{p(\tau)\,d\tau}{\tau + t} = [G_+(t) - G_-(t)]H^+(-t), \quad t \in \Gamma. \quad (10)$$

Таким образом, краевая задача (6) разрешима в квадратурах всякий раз, когда разрешимо в квадратурах интегральное уравнение (10). Можно указать несколько таких случаев

разрешимости. Например, проведем Γ по отрицательной части мнимой оси и положим

$$G_+(t) - G_-(t) = 2\pi i\lambda = \text{const}. \tag{11}$$

В этом случае уравнение (10) можно решить с помощью преобразования Меллина. Условие (11) означает, что в задаче (6) в качестве функции $G(x)$ можно взять

$$G(x) = \lambda \ln x + G^-(x),$$

где λ — постоянная, $G^-(z)$ — аналитическая в нижней полуплоскости, а $\ln x$ — вещественный при $x > 0$ и равен $\ln|x| + i\pi$ при $x < 0$.

Методом неполной факторизации решена задача Римана для системы двух пар функций

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1^+(x) &= \sqrt{x^2+\sigma^2}\,\Phi_1^-(x) + \Phi_2^-(x) + g_1(x) \\ \Phi_2^+(x) &= \Phi_1^-(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+\sigma^2}}\Phi_2^-(x) + g_2(x) \end{aligned}\right\} -\infty < x < \infty, \tag{12}$$

где λ и σ — постоянные. К задаче (12) приводится основная смешанная задача для упругого полупространства, а также некоторые другие задачи математической физики.

Наконец, метод неполной факторизации может пригодиться при изучении некоторых новых задач. Пусть, например, в факторизации (2) функция $\Omega^-(z)$ наряду с разрывом Γ имеет еще нули на счетном множестве точек a_k и простые полюсы на счетном множестве точек b_k, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда задача Римана (1) сведется к другой задаче, в которой у искомой функции $F(z)$ кроме разрыва Γ допускаются полюсы в точках a_k. При этом наряду с краевым условием (5) будет еще счетное множество условий вида $F(b_k) = c_k$, $k = 1, 2, \ldots$, где c_k — известные числа. Таким образом, при исследовании краевых задач для кусочно мероморфных функций со счетным множеством дополнительных условий можно использовать связь этих задач с обычной задачей Римана (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи. М., 1963 г.