В. А. Ватутин, О высоте ствола случайных корневых деревьев, *Дискрет. матем.*, 1994, том 6, выпуск 3, 110–121

Дискретная математика

том 6 выпуск 3 * 1994

УДК 519.2

О высоте ствола случайных корневых деревьев

© 1994 г. В. А. Ватутин

Пусть T — корневое дерево с N вершинами. Дерево T естественным образом разбивается на слои. Начиная с корня, совершаются переходы из вершины предшествующего слоя в ту вершину следующего слоя, дерево с корнем в которой содержит более половины вершин, лежащих в более высоких слоях дерева. Если такой вершины не существует, то процесс останавливается. Корень дерева и вершины, используемые при таких переходах, образуют ствол дерева. Обозначим $L(T)$ число вершин в стволе дерева T.

В работе доказаны теоремы о предельном поведении $L(T)$ и некоторых функционалов от ствола дерева при условии, что $N \to \infty$, а дерево T выбирается случайно в соответствии с некоторым законом из множества корневых деревьев с N вершинами. Следствием из полученных результатов является положительный ответ на гипотезу Муна и Мейера о скорости роста высоты ствола $L(T)$ корневого дерева, принадлежащего так называемым просто порождаемым семействам случайных деревьев.

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда, грант №MQP000, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект 93–011–1443.

Пусть T — корневое дерево с корнем r, принадлежащее некоторому множеству деревьев $\mathfrak{T}$, $T(a) \subseteq T$ — корневое дерево с корнем в вершине $a \in T$, вершинами которого являются те и только те вершины дерева T, для которых любой путь, соединяющий их с корнем r проходит через a, $n(a)$ — множество вершин дерева $T(a)$, смежных с вершиной a. Ветвью дерева T называется любое дерево $T(b)$: $b \in n(r)$. Пусть $|T|$ — количество вершин в дереве T (включая корень). Ветвь $T(b)$, $b \in n(a)$, называется основной для вершины a, если

$$2^{-1}(1 + |T(a)|) \leqslant |T(b)|.$$

Стволом дерева T называется последовательность $a_0 = r, a_1, \ldots, a_{L(T)}$ максимальной длины такая, что $T(a_i)$ является основной ветвью для дерева $T(a_{i-1})$, $i = 1, \ldots, L(T)$. Величина $L(T)$ называется высотой ствола дерева T.

В работе доказаны теоремы о предельном поведении величины $L(T)$ и некоторых функционалов от траектории ствола при условии, что $|T| = N \to \infty$, а дерево T выбирается случайно в соответствии с некоторым законом из множества корневых деревьев с N вершинами.

В качестве следствия из полученных результатов дан положительный ответ на гипотезу Муна и Мейера о скорости роста высоты ствола корневого дерева, выбираемого из множества деревьев, принадлежащих так называемому просто порождаемому семейству.

Методы, используемые в теории ветвящихся процессов оказались весьма полезными при исследовании свойств различных классов корневых деревьев (см., например, [1]). Ключевым моментом, позволяющим эффективно применять эти методы, является возможность сведения изучения распределений различных характеристик дерева T_{N+1}, выбранного случайно в соответствии с некоторым законом из какого-либо множества $\mathfrak{T}_{N+1}$ корневых деревьев с N некорневыми вершинами, к исследованию распределений соответствующих характеристик генеалогических деревьев некоторых ветвящихся процессов при условии, что общее количество частиц, появившихся в каждом из этих деревьев за все время эволюции, равно N (или $N+1$). В данной работе мы продолжаем сложившуюся традицию и применяем методы теории ветвящихся процессов к исследованию различных характеристик ствола дерева. Напомним в связи с этим определения ряда понятий, относящихся к деревьям и ветвящимся процессам.

Пусть T — корневое дерево с корнем r. Для любой вершины $a \in T$ обозначим $T(a)$ множество вершин $b \in T$, для которых любой путь от r к b проходит через a. Вершину a назовем корнем дерева со множеством вершин $T(a)$ и множеством ребер, соединяющих эти вершины. Дерево, для которого вершина a является корнем будем также обозначать $T(a)$. В частности, $T(r) = T$. Пусть $n(a)$ — множество вершин дерева $T(a)$, смежных с a. Ветвью, исходящей из вершины a, называется любое дерево $T(b)$, $b \in n(a)$. Пусть $|T|$ — количество вершин в дереве T. Ветвь $T(b)$, $b \in n(a)$, называется основной для вершины a, если

$$2^{-1}(1+|T(a)|) \leqslant |T(b)|. \tag{1}$$

Согласно этому определению вершина дерева не обязательно имеет основную ветвь.

Стволом дерева T называется единственный путь максимальной длины в T вида $(a_0, a_1, \dots, a_{L(T)})$, где $a_0 = r$, $a_i \in n(a_{i-1})$, и дерево $T(a_i)$ является основной ветвью для вершины a_{i-1}, $i = 1, 2, \dots, L(T)$.

Величина $L(T)$ называется высотой ствола дерева T.

Пусть $\eta(1), \eta(2), \dots, \eta(N), \dots$ — последовательность независимых не обязательно одинаково распределенных случайных величин, и пусть $(a_0, a_1, \dots, a_{L(T)})$ — ствол дерева T. Положим

$$M(T) = M(T(a_0)) = \sum_{j=0}^{L(T)-1} \eta(|T(a_j)|). \tag{2}$$

Отметим, что если $\eta(j) \equiv 1$, $j = 1, 2, \dots$, то $M(T) = L(T)$, если $\eta(j) = j$, то

$$M(T) = \sum_{j=0}^{L(T)-1} |T(a_j)|$$

— функционал, имеющий важное теоретическое значение при исследовании геометрических свойств систем связи [2–4], если же величины $\eta(j)$ одинаково распределены, то $M(T)$ — высота ствола дерева с ребрами случайной длины.

В данной работе мы будем исследовать распределение величины $M(T)$ не для фиксированного дерева, а для дерева, выбираемого случайно из некоторых классов деревьев, к описанию которых мы сейчас и переходим.

Пусть $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \dots, \mathfrak{T}_N, \dots$ — некоторая последовательность множеств корневых деревьев, причем если $T \in \mathfrak{T}_N$, то $|T| = N$. Пусть, далее, $h_0 > 0, h_1, h_2, \dots$ — последовательность неотрицательных чисел такая, что ряд

$$H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k$$

имеет радиус сходимости $R > 0$. Припишем дереву $T \in \mathfrak{T} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{T}_N$ вес

$$W(T) = \prod_{a \in T} h_{|n(a)|} = \prod_i h_i^{D_i(T)},$$

где $D_i(T) = |\{a \in T : |n(a)| = i\}|$. Положим

$$y_N = \sum_{T \in \mathfrak{T}_N} W(T), \qquad Y(x) = \sum_{N=1}^{\infty} y_N x^N.$$

Семейство деревьев $\mathfrak{T}$ называется просто порождаемым семейством с весовой функцией $H(x)$ [5], если $Y(x)$ удовлетворяет соотношению

$$Y(x) = xH(Y(x)) = x \sum_{k=0}^{\infty} h_k Y^k(x). \tag{3}$$

В частности, если $h_k = 1$, $k = 0, 1, \dots$, то мы приходим к семейству плоских корневых деревьев с висячими корнями.

Зададим на множестве $\mathfrak{T}_N$ распределение вероятностей, приписав дереву $T_N \in \mathfrak{T}_N$ вероятность

$$p(T_N) = W(T_N)/y_N. \tag{4}$$

В [5] было показано, что для закона распределения (4)

$$\mathbf{E}L(T_N) = O(\sqrt{N}), \quad N \to \infty,$$

и высказано предположение, что

$$\mathbf{E}L(T_N) \sim \lambda\sqrt{N}, \quad N \to \infty, \tag{5}$$

где λ — некоторая положительная константа. Аналогичная гипотеза была высказана в [6], где рассматривались плоские бинарные деревья и ветвь $T(b)$ называлась основной для корня a, если $2^{-1}|T(a)| \leqslant |T(b)|$, причем в случае равенства в качестве основной выбиралась левая ветвь.

В этой заметке мы, используя метод, развитый в [7–9], доказываем соотношение (5), а также находим распределение величины $L(T_N)$ и некоторых других функционалов вида (2) при $N \to \infty$.

Прежде чем переходить к формулировкам основных результатов, сделаем ряд замечаний.

Очевидно, что вероятности (4) не изменяются при преобразовании

$$h_k^* = \rho h_k z^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Поэтому, при изучении $L(T_N)$ можно, не ограничивая общности, считать, что радиус сходимости ряда $H(x)$ не меньше 1, причем $H(1) = 1$, т. е. $H(x)$ является производящей функцией распределения некоторой величины ξ: $H(x) = \mathsf{E}x^\xi$.

Скажем, что $H(x)$ удовлетворяет условию A (см. [5]), если найдется такое $0 < z \leqslant R$, что

$$zH'(z) = H(z) \tag{7}$$

и $H''(z-) < \infty$.

Если условие A выполнено, то преобразование (6) с $\rho = 1$ дает $\sum_{k=0}^{\infty} kh_k^* = 1$. Поэтому в дальнейшем, изучая функционалы $M(T)$ для деревьев $T \in \mathfrak{T}_N$, можно считать, что

$$H(1) = 1, \quad H'(1) = 1, \quad 0 < \sigma^2 = H''(1) < \infty. \tag{8}$$

Но в этом случае $Y(1) = 1$ и, следовательно, $Y(x)$ можно рассматривать как производящую функцию собственной случайной величины ν, $\mathsf{P}\{\nu = N\} = y_N$, $N = 1, 2, \ldots$

Более того,

$$\sum_{N=1}^{\infty} \sum_{T_N \in \mathfrak{T}_N} W(T_N) = 1,$$

и мы приходим к следующей вероятностной задаче.

На множестве всех деревьев просто порождаемого семейства с производящей функцией $H(x)$, удовлетворяющей (8), задано вероятностное распределение, причем вероятность появления дерева T при случайном выборе из множества $\mathfrak{T}$ равна $W(T)$. Пусть $\nu(T) = \nu$ — количество вершин в таком дереве. Спрашивается, каково распределение $M(T)$ при условии, что $\nu = N$ и $N \to \infty$?

Пусть

$$t(b) = 2\left(2^{1/2-b} + bB_{1/2}(1/2, b)\right), \tag{9}$$

где

$$B_x(a, b) = \int_0^x y^{a-1}(1-y)^{b-1}dy, \quad 0 < x < 1,$$

— неполная бета-функция. Положим

$$d_0 = d_0(\omega) = 1, \qquad d_m = d_m(\omega) = \frac{md_{m-1}(2\pi)^{1/2}}{t(m(\omega + 1/2) - 3/2)}. \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (8) *и шаг распределения случайной величины* ξ *равен* 1. *Если*

$$\mathsf{E}\eta(N) \sim qN^\omega, \quad N \to \infty, \quad q > 0, \quad \omega \geqslant 0, \tag{11}$$

и

$$\mathsf{E}\eta^k(N) = O(N^{k\omega}), \quad k = 2, 3, \ldots, \quad N \to \infty, \tag{12}$$

то

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\sigma M(T)}{qN^{\omega+1/2}} \leqslant y \mid \nu = N\right\} = G_\omega(y), \tag{13}$$

где функция $G_\omega(y)$ имеет моменты

$$\int_0^\infty y^m dG_\omega(y) = d_m(\omega), \tag{14}$$

а величины $d_m(\omega)$ те же, что и в (10).

Следующее утверждение является положительным ответом на гипотезы, высказанные в [5] и [6].

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1/2}\mathbf{E}L(T_N) = \sigma^{-1}d_1(0) = \sigma^{-1}(2\pi)^{1/2}\left(2^{3/2} - \log(3+2^{3/2})\right)^{-1}. \tag{15}$$

Теорема 2. *Если выполнено условие* (8), *шаг распределения случайной величины ξ равен* 1 *и* $\mathbf{E}\eta(i) = \mu < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$, *то*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sigma M(T)/\sqrt{N} \leqslant y \mid \nu = N\right\} = G_0(y/\mu).$$

Замечание 1. Формально теоремы 1 и 2 неприменимы к помеченным корневым деревьям. Однако, используя инвариантность высоты ствола дерева относительно перенумерации его вершин и процедуру, предложенную в [10], можно показать, что соотношение (13) справедливо, если дерево T выбирается случайно и равновероятно из множества корневых помеченных деревьев с N некорневыми вершинами. При этом условие $\{\nu = N\}$ в (13) есть условие на общее количество частиц в ветвящемся процессе Гальтона–Ватсона с производящей функцией числа потомков $H(x) = e^{x-1}$ (см. [1]).

1. Вспомогательные леммы

Всюду в дальнейшем через $c, c_1, c_2, \ldots$ обозначаются некоторые положительные константы, а через $\delta(N), \delta_0(N), \delta_1(N), \ldots$ — некоторые функции, стремящиеся к нулю при $N \to \infty$ и не обязательно одинаковые в разных формулах.

Для $x \in (0,1)$, $\beta \in (1,2)$ и $\rho \in (-\infty, +\infty)$ положим

$$\Theta(x,\rho,\beta) = \frac{x^{1-\beta}}{\beta-1} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g_l(\rho+\beta-1)}{l+1-\beta} x^{l+1-\beta},$$

где $g_l(b) = (-1)^l b(b-1)\ldots(b-l+1)/l!$. Нетрудно проверить, что

$$\Theta(x,\rho,\beta) = (\beta-1)^{-1}\left(x^{1-\beta}(1-x)^{\rho+\beta-1} + (\rho+\beta-1)B_x(2-\beta, \rho+\beta-1)\right) \tag{16}$$

и (см. (9))

$$\Theta(1/2, \rho, 3/2) = t(\rho + 1/2).$$

Пусть $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательности неотрицательных чисел,

$$\sum_{j=1}^\infty B_j = 1,$$

и при $N \to \infty$

$$\begin{aligned} A_N &= AN^{\rho}(1+\delta(N)), \qquad A>0, & (17)\\ B_N &= BN^{-\beta}(1+\delta_1(N)), \quad B>0, \quad 1<\beta<2. & (18)\end{aligned}$$

Для $x \in (0,1)$ определим последовательность $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ соотношениями

$$D_N = A_N + \sum_{0<j<xN} B_j D_{N-j}, \qquad N=1,2,\dots \tag{19}$$

(предполагается, что суммирование по пустому множеству индексов дает ноль).

Лемма 1. *Если выполнены условия* (17) *и* (18) *и* $\Theta(x,\rho,\beta)>0$, *то*

$$D_N = \gamma N^{\rho+\beta-1}(1+\delta(N)), \tag{20}$$

где

$$\gamma = A(B\Theta(x,\rho,\beta))^{-1}. \tag{21}$$

Доказательство. Представим величину D_N в виде

$$D_N = N^{\rho+\beta-1}(\gamma+\varepsilon(N)). \tag{22}$$

Подставив это выражение в (19) и поделив обе части получившегося соотношения на $N^{\rho+\beta-1}$, получаем равенство

$$\begin{aligned}\gamma+\varepsilon(N) &= AN^{1-\beta}(1+\delta(N)) + \gamma\sum_{0<j<xN} B_j\left(1-\frac{j}{N}\right)^{\rho+\beta-1}\\ &\quad + \sum_{0<j<xN} B_j\left(1-\frac{j}{N}\right)^{\rho+\beta-1}\varepsilon(N-j). \end{aligned}\tag{23}$$

Исследуем сначала асимптотическое поведение величины

$$R_N = \sum_{0<j<xN} B_j\left(1-\frac{j}{N}\right)^{\rho+\beta-1} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{g_l(\rho+\beta-1)}{N^l}\sum_{0<j<xN} B_j j^l.$$

В силу (18)

$$\sum_{0<j<xN} B_j = 1 - \sum_{j\geqslant xN} B_j = 1 - B(\beta-1)^{-1}(Nx)^{1-\beta}(1+\delta_0(N)),$$

в то время как при $l \geqslant 1$

$$\sum_{0<j<xN} B_j j^l = B(l+1-\beta)^{-1}(Nx)^{l+1-\beta}(1+\delta_l(N)).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} R_N &= 1 - BN^{1-\beta}\left(\frac{x^{1-\beta}}{\beta-1} - \sum_{l=1}^{\infty}\frac{g_l(\rho+\beta-1)}{l-\beta+1}x^{l+1-\beta}\right)(1+\delta(N))\\ &= 1 - B\Theta(x,\rho,\beta)N^{1-\beta}(1+\delta(N)) = 1 - A\gamma^{-1}N^{1-\beta}(1+\delta(N)). \end{aligned}\tag{24}$$

Подставляя это соотношение в (23) и производя очевидные упрощения, находим, что

$$\varepsilon(N)=\delta(N)N^{1-\beta}+\sum_{0<j<xN}B_j\left(1-\frac{j}{N}\right)^{\rho+\beta-1}\varepsilon(N-j). \tag{25}$$

Идея дальнейшего доказательства заимствована из [7–9]. Представим величину $\varepsilon(N)$ в виде

$$\varepsilon(N)=\sigma(N)/\log N. \tag{26}$$

Очевидно, что при $j\leqslant xN$

$$\frac{\log N}{\log(N-j)}=\left(1+\frac{\log(1-j/N)}{\log N}\right)^{-1}=1+O\left(\frac{j}{N\log N}\right),$$

что позволяет переписать (25) следующим образом:

$$\sigma(N)=\delta_1(N)N^{1-\beta}\log N+\sum_{0<j<xN}B_j\left(1-\frac{j}{N}\right)^{\rho+\beta-1}\left(1+O\left(\frac{j}{N\log N}\right)\right)\sigma(N-j)$$

или, полагая $y(N)=|\sigma(N)|$,

$$y(N)\leqslant\delta_1(N)N^{1-\beta}\log N+\sum_{0<j<xN}B_j\left(1-\frac{j}{N}\right)^{\rho+\beta-1}\left(1+\frac{cj}{N\log N}\right)y(N-j). \tag{27}$$

Если $\sup_N y(N)<\infty$ то, очевидно, утверждение леммы справедливо. Пусть теперь $\sup_N y(N)=\infty$. Положим

$$m_1=1,\quad m_{t+1}=\min\{k\colon y(k)>y(m_t)\},\quad t=1,2,\ldots$$

Ясно, что $m_t\to\infty$, $t\to\infty$. Рассмотрим последовательность $y(m_t)$. Опуская для простоты индекс t и используя неравенство (27), находим, что

$$y(m)\leqslant\delta_1(m)m^{1-\beta}\log m+y(m)\sum_{0<j<xm}B_j\left(1-\frac{j}{m}\right)^{\rho+\beta-1}\left(1+\frac{cj}{m\log m}\right).$$

Отсюда, вспоминая (24) и принимая во внимание условие (18) и неравенства $0<1-x\leqslant1-jm^{-1}\leqslant1$, получаем, что для достаточно больших m

$$\begin{aligned}y(m)&\leqslant\delta_1(m)m^{1-\beta}\log m+y(m)\left((1-A\gamma^{-1}m^{1-\beta}(1+\delta_2(m))+\frac{c_2}{m\log m}\sum_{0<j<xm}jB_j\right)\\&\leqslant\delta_1(m)m^{1-\beta}\log m+y(m)(1-A(2\gamma)^{-1}m^{1-\beta}).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$y(m)\leqslant\delta(m)\log m=o(\log m).$$

Отсюда вытекает, что

$$\sigma(m_t)=o(\log m_t),\qquad t\to\infty,$$

или, в силу определения (26),

$$\varepsilon(m_t) = \delta(m_t).$$

Покажем, что $\varepsilon(N) \to 0$ при $N \to \infty$. В самом деле, пусть $m_t \leqslant N < m_{t+1}$. Тогда $|\sigma(N)| \leqslant |\sigma(m_t)|$ и, следовательно,

$$|\varepsilon(N)| = \frac{|\sigma(N)|}{\log N} \leqslant \frac{|\sigma(m_t)|}{\log m_t} = o(1), \quad N \to \infty. \tag{28}$$

Объединяя (22) и (28), приходим к (20).

Лемма 1 доказана.

Следствие 2. *Если выполнены условия леммы* 1 *и* $x = 1/2$, $\beta = 3/2$, $t(\rho+1/2) > 0$ *(см.* (9)*), то*

$$D_N = A(Bt(\rho + 1/2))^{-1} N^{\rho+1/2}(1 + \delta(N)).$$

Положим $\nu(T(a_0)) = \nu(T) = \nu$,

$$K_N(\tau) = \mathbf{E}\left(e^{i\tau M(T(a_0))}; \nu = N\right), \qquad Q(\tau) = \mathbf{E}e^{i\tau\eta(N)}.$$

Если $a_0 = r, a_1, \ldots, a_{L(T)}$ — ствол дерева T и $k = |n(a_0)|$ — количество вершин, смежных с a_0, то через $\nu^{(1)} = \nu(T(b_1)), \ldots, \nu^{(k)} = \nu(T(b_k))$ мы обозначаем количество вершин в деревьях, порожденных вершинами $b_j \in n(a_0)$. Из определения величины $n(a_0)$ и равенства (3) нетрудно вывести, что

$$\mathbf{P}\{|n(a_0)| = k\} = h_k = \mathbf{P}\{\xi = k\}$$

и что при $k \geqslant 2$

$$\mathbf{P}\{\nu^{(2)} + \ldots + \nu^k = N\} = \operatorname{coef}_{x^N} Y^{k-1}(x).$$

Пусть, далее,

$$d_N \Rightarrow \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant|n(a_0)|} \nu^{(j)} \leqslant \frac{N}{2}, \sum_{j=1}^{|n(a_0)|} \nu^{(j)} = N - 1\right\}$$

и $b_j = \operatorname{coef}_{x^{j-1}} H'(Y(x))$. В силу (8) $b_1 + b_2 + \ldots = H'(Y(1)) = 1$.

Лемма 2. *При $N \geqslant 2$ справедливо рекуррентное соотношение*

$$K_N(\tau) = Q_N(\tau)\left(d_N + \sum_{1\leqslant j\leqslant N/2} b_j K_{N-j}(\tau)\right). \tag{29}$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$K_N(\tau) = \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{E}\left(e^{i\tau M(T(a_0))}; |n(a_0)| = k, \nu^{(1)} + \ldots + \nu^{(k)} = N - 1\right)$$

$$= Q_N(\tau)\left(d_N + \sum_{j>N/2}\sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{E}\left(e^{i\tau M(T(a_1))}; |n(a_0)| = k, \max_{1\leqslant l\leqslant k} \nu^{(l)} = j, \nu^{(1)} + \ldots + \nu^{(k)} = N - 1\right)\right).$$

Но при $N/2 < j \leqslant N-1$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left(e^{i\tau M(T(a_1))}; |n(a_0)| = k, \max_{1\leqslant l\leqslant k} \nu^{(l)} = j, \nu^{(1)} + \ldots + \nu^{(k)} = N-1\right)\\
&= \quad kh_k \mathsf{E}\left(e^{i\tau M(T(a_1))}; \nu^{(1)} = j, \nu^{(2)} + \ldots + \nu^k = N-j-1\right)\\
&= \quad kh_k \mathsf{P}\{\nu^{(2)} + \ldots + \nu^{(k)} = N-j-1\} \mathsf{E}\left(e^{i\tau M(T(a_1))}; \nu^{(1)}(T(a_1)) = j\right)\\
&= \quad K_j(\tau)\,\mathrm{coef}_{x^{N-j-1}}\, kh_k Y^{k-1}(x).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
K_N(\tau) &= Q_N(\tau)\left(d_N + \sum_{N/2<j<N} K_j(\tau) \sum_{k=1}^{N-1} kh_k\, \mathrm{coef}_{x^{N-j-1}}\, Y^{k-1}(x)\right)\\
&= Q_N(\tau)\left(d_N + \sum_{1\leqslant j\leqslant N/2} b_j K_{N-j}(\tau)\right).
\end{aligned}
$$

Лемма доказана.

Пусть

$$S_N(p) = \mathsf{E}\eta^p(N), \qquad L_N(p) = \mathsf{E}\,(M^p(T); \nu = N)\,.$$

Дифференцируя (29) по τ в точке $\tau = 0$ нужное количество раз, получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *При $N \geqslant 2$ справедливы соотношения*

$$L_N(1) = y_N S_N(1) + \sum_{1\leqslant j\leqslant N/2} b_j L_{N-j}(1), \tag{30}$$

и при $p \geqslant 1$

$$
\begin{aligned}
L_N(p+1) &= y_N S_N(p+1) + \sum_{m=2}^{p} C_{p+1}^m S_N(m) \sum_{1\leqslant j\leqslant N/2} b_j L_{N-j}(p+1-m)\\
&\quad + (p+1)S_N(1) \sum_{1\leqslant j\leqslant N/2} b_j L_{N-j}(p) + \sum_{1\leqslant j\leqslant N/2} b_j L_{N-j}(p+1). \qquad (31)
\end{aligned}
$$

Лемма 3 ([5]). *Если выполнено условие* (8) *и распределение случайной величины ξ имеет шаг* 1, *то*

$$y_N = \mathsf{P}\{\nu = N\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} N^{-3/2}(1+\delta(N)), \tag{32}$$

$$b_N = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} N^{-3/2}(1+\delta(N)). \tag{33}$$

2. Доказательство основных результатов

Перейдем к доказательству теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Покажем, что в условиях теоремы для любого фиксированного $m = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{N\to\infty} N^{-(\omega+1/2)m+3/2} L_N(m) = \left(\frac{q}{\sigma}\right)^m d_m(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}. \tag{34}$$

При $m = 1$ из (30), (32) и условий теоремы вытекает соотношение

$$L_N(1) = \frac{q}{\sigma\sqrt{2\pi}} N^{\omega-3/2}(1+\delta(N)) + \sum_{1\leqslant j\leqslant N/2} b_j L_{N-j}(1).$$

Отсюда, вспоминая (33) и используя лемму 1 при $x = 1/2$, $\beta = 3/2$ и $\rho = \omega - 3/2$, находим, что

$$L_N(1) = \frac{q}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \frac{1}{t(\omega-1)} N^{\omega-1}(1+\delta(N)) = \frac{q}{\sigma} d_1 N^{(\omega+1/2)-3/2}(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}(1+\delta(N)),$$

что доказывает (34) при $m = 1$. Пусть теперь (34) верно при всех $m = 1, 2, \ldots, p$. Тогда при $N \to \infty$

$$\begin{aligned} &y_N S_N(p+1) + \sum_{m=2}^{p} C_{p+1}^m S_N(m) \sum_{1\leqslant j\leqslant N/2} b_j L_{N-j}(p+1-m) \\ &= O\left(\sum_{m=2}^{p} N^{\omega m} \sum_{1\leqslant j\leqslant N/2} b_j (N-j)^{(\omega+1/2)(p+1-m)} + N^{\omega(p+1)-3/2}\right) \\ &= O\left(\sum_{m=2}^{p+1} N^{(\omega+1/2)(p+1)-(m+3)/2}\right) = O\left(N^{(\omega+1/2)(p+1)-5/2}\right), \end{aligned}$$

в то время как

$$\begin{aligned} &(p+1)S_N(1) \sum_{1\leqslant j\leqslant N/2} b_j L_{N-j}(p) \\ &= (p+1) q N^{\omega}(1+\delta(N)) \sum_{1\leqslant j\leqslant N/2} b_j d_p \left(\frac{q}{\sigma}\right)^p (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}(N-j)^{p(\omega+1/2)-3/2} \\ &= (p+1)\frac{q^{p+1}}{\sigma^p}(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} d_p N^{(p+1)(\omega+1/2)-2}(1+\delta(N)). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (31) можно записать в виде

$$L_N(p+1) = (p+1)\frac{q^{p+1}}{\sigma^p}(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} d_p N^{(p+1)(\omega+1/2)-2}(1+\delta(N)) + \sum_{1\leqslant j\leqslant N/2} b_j L_{N-j}(p+1),$$

и применение леммы 1 дает равенство

$$\begin{aligned} L_N(p+1) &= \frac{p+1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{q^{p+1}}{\sigma^{p+1}} \frac{d_p\sqrt{2\pi}}{t((p+1)(\omega+1/2)-3/2)} N^{(p+1)(\omega+1/2)-3/2}(1+\delta(N)) \\ &= d_{p+1}\left(\frac{q}{\sigma}\right)^{p+1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} N^{(p+1)(\omega+1/2)-3/2}(1+\delta(N)), \end{aligned}$$

что доказывает (34). Из (34) и (32) в свою очередь следует, что при любом фиксированном $m = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}\left(\left(\frac{\sigma M(T)}{qN^{\omega+1/2}}\right)^m \mid \nu = N\right) = d_m = d_m(\omega). \qquad (35)$$

Заметим теперь, что стандартное применение метода Лапласа дает соотношение

$$t(b) = 2\sqrt{\pi b}(1 + \delta(b)), \qquad b \to \infty,$$

и, следовательно,

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m}(d_m)^{1/m} \leqslant \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m}(m!)^{1/m} < \infty.$$

Поэтому существует единственное распределение, последовательность моментов которого есть d_m, $m = 1, 2, \ldots$

Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Из (35) и (10) следует, что для $\omega = 0$

$$\mathbf{E}(M(T) \mid \nu(T) = N) = \frac{q}{\sigma}\sqrt{N}\frac{\sqrt{2\pi}}{t(-1)}(1+\delta(N)) = \frac{q\sqrt{2\pi}}{\sigma(2\sqrt{2} - \log(3 + 2\sqrt{2}))}\sqrt{N}(1+\delta(N)).$$

Это, в частности, доказывает гипотезы из [5] и [6], если положить $M(T) = L(T)$.

Доказательство теоремы 2. В силу теоремы 1

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\sigma L(T)}{\sqrt{N}} \leqslant y \mid \nu = N\right\} = G_0(y).$$

Отсюда, используя закон больших чисел, находим, что

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{L(T)-1} \eta(|T(a_j)|) \leqslant y \mid \nu = N\right\} = G_0\left(\frac{y}{\mu}\right).$$

Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Колчин В. Ф. *Случайные отображения.* Наука, Москва, 1984.
2. Shreve R. L. Infinite topologically random channel networks. *J. Geology* (1967) **77**, 178–186.
3. Smart J. S. Statistical properties of stream length. *Water Resour. Res.* (1968) **4**, 1001–1014.
4. Troutman B. M., Karlinger M. R. On the expected width function for topologically random channel networks. *J. Appl. Probab.* (1984) **24**, №4, 836–849.
5. Meir A., Moon J. W. On major and minor branches of rooted trees. *Canad. J. Math.* (1987) **39**, №3, 673–693.
6. Troutman B. M., Karlinger M. R. A note on subtrees rooted along the primiry path of a binary tree. *Discrete Applied Math.* (1993) **42**, №1, 87–93.
7. Севастьянов Б. А. Асимптотика вероятности продолжения критического ветвящегося процесса. *Теория вероятностей и ее применения* (1967) **12**, №1, 179–183.
8. Севастьянов Б. А. Предельные теоремы для ветвящихся процессов с превращениями, зависящими от возраста частиц. *Теория вероятностей и ее применения* (1968) **13**, №2, 243–265.
9. Ватутин В. А. Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса Беллмана–Харриса. *Матем. сб.* (1979) **109**, №3, 440–452.
10. Ватутин В. А. Распределение расстояния до корня минимального поддерева, содержащего все вершины данной высоты. *Теория вероятностей и ее применения* (1993) **38**, №2, 273–287.
11. Павлов Ю. Л. Некоторые свойства плоских деревьев с висячими корнями. *Дискретная математика* (1992) **4**, №2, 61–65.

Статья поступила 11.05.93.