И. Л. Гуревич, Плоское течение жидкости в канале с упругими стенками,
Тр. сем. по краев. задачам, 1979, выпуск 16, 59–63

КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 16 *Труды семинара по краевым задачам* *1979*

УДК 532.5.539.3

ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ

И. Л. Гуревич

В плоскости $z = x + iy$ рассматривается стационарное течение идеальной невесомой жидкости в канале с упругими стенками, которые в ненапряженном состоянии совпадают с прямыми $y = 0$ и $y = H$. Стенки жестко закреплены соответственно в точках $z = \lambda n$ и $z = \lambda n + iH$ $(n = \pm 1, \pm 2 \ldots)$. Течение считаем периодическим; область, занимаемая одним периодом, изображена на рис. 1. Отметим, что в работе [1] рассматривался случай $H = \infty$, то есть имелась лишь одна упругая пластина.

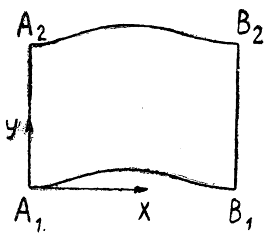

Рис. 1.

Введем обозначения: $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал; ψ_0 — расход; $\varphi_0 = \varphi(B_k) - \varphi(A_k)$; S_k — дуговая абсцисса на A_kB_k; $L_k = S_k(B_k) - S_k(A_k)$; v_k и θ_k — модуль и аргумент вектора скорости; M_k и T_k — переменные изгибающий момент и сила натяжения в точках дуги A_kB_k; h_k — толщина стенки A_kB_k; E_k — модуль упругости; γ_k — коэффициент Пуассона; $D_k = E_kh_k^3/[12(1-\gamma_k^2)]$, $G_k = (1-\gamma_k^2)/(E_kh_k)$; ρ и p — плотность и давление жидкости; p_0 — давление в точке торможения; p_k — внешнее давление за стенкой A_kB_k; $\alpha_k = \lambda\rho\varphi_0^2/ /(16\pi^2 D_k)$; $\beta_k = 2\lambda^2(p_0 - p_k)/(\rho\varphi_0^2)$.

Справедливы следующие соотношения (см. [2, 3], стр. 477);

$$M_k = D_k(1 - G_kT_k)^{-1}\dot{\theta}_k, \quad T_k = [\ddot{M}_k + (-1)^k(p - p_k)]/\dot{\theta}_k, \tag{1}$$

$$T_k + \int_0^{S_k} \dot{\theta}_k \dot{M}_k ds_k = C_k = \text{const}, \quad \int_0^{L_k} (1 + G_kT_k)^{-1} ds_k = \lambda. \tag{2}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по S_k.

Из (2) нетрудно сделать вывод, что C_k, T_k — величины не ниже второго порядка малости относительно θ_k. Исключая M_k из (1) и отбрасывая величины выше второго порядка малости относительно θ_k, получим

$$\dddot{\theta}_k = (-1)^{k+1} D^{-1} (p-p_k). \tag{3}$$

При интегрировании уравнения (3) будем учитывать условия

$$\theta_k(0) = 0, \ \ddot{\theta}_k(L_k/2) = 0; \tag{4}$$

последнее из них есть следствие предполагаемой симметрии течения относительно прямой $x = \lambda/2$.

Отобразим прямоугольник $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0$ в плоскости w, соответствующий изображенной на рис. 1 части течения, на кольцо $r_0 \leqslant r \leqslant 1$ с разрезом вдоль отрезка $r_0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ в плоскости параметрического переменного $\xi = re^{\sigma}$ функцией $w = \varphi_0 \ln\zeta/(2\pi i)$. Здесь $r_0 = \exp(-2\pi\psi_0/\varphi_0)$, окружность $|\zeta| = 1$ соответствует стенке A_2B_2, а $|\xi| = r_0$ — стенке A_1B_1. Пусть $dw/dz \equiv ve^{-i\theta} = \varphi_0 e^{\omega}/\lambda$, где $\omega(\xi) = \tau - i\theta$ в силу периодичности аналитически продолжима через разрез. Тогда нетрудно получить следующие соотношения:

$$v = \varphi_0 e^{\tau}/\lambda, \ ds_k = \lambda e^{-\tau_k} d\sigma/(2\pi),$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-\tau_k} ds = 2\pi L_k/\lambda, \quad \int_0^{2\pi} e^{-\tau_k} \cos\theta_k d\sigma = 2\pi, \tag{5}$$

где $\tau_1(\sigma) = \tau(r_0 e^{i\sigma})$, $\tau_2(\sigma) = \tau(e^{i\sigma})$. Введем представление $\tau_k = B_0 + \tau_{k0}$, где τ_{k0} выражается через $\theta'_k = d\theta_k/d\sigma$ известным способом (см., например, [4]):

$$\tau_{k0}(\sigma) = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\sigma \int_0^{2\pi} \left(\frac{\theta'_k}{\nu_n} - 2\frac{\theta'_{k\pm 1}}{\mu_n} \right) \cos n\sigma' d\sigma', \tag{6}$$

$$\nu_n = n \frac{r_0^{-n} - r_0^n}{r_0^{-n} + r_0^n}, \ \mu_n = n(r_0^{-n} - r_0^n).$$

Последнее из соотношений (5) дает

$$e^{B_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\tau_{k0}} \cos\theta_k d\sigma. \tag{7}$$

Из (3) — (5) и уравнения Бернулли получим

$$\theta'_k = e^{-\tau_k}(R_k - P_k), \ R_k = \int_0^{2\pi} P_k e^{-\tau_k} d\sigma \left(\int_0^{2\pi} e^{-\tau_k} d\sigma \right)^{-1},$$

$$P_k = (-1)^k \alpha_k \int_0^\sigma e^{-\tau_k} d\sigma \int_\pi^\sigma (\beta_k e^{-\tau_k} - e^{\tau_k}) d\sigma. \tag{8}$$

Равенства (6)—(8) вместе с $\tau_k = B_0 + \tau_{k0}$ образуют нелинейную систему уравнений относительно функций θ_k', $k=1, 2$, зависящую от параметров r_0, α_k, β_k. Мы исследуем зависимость малых решений этой системы от параметров α_k, β_k, считая r_0 фиксированным.

Заметим, что при любых α_k и при $\beta_k = 1$ система допускает нулевое решение. Положим $\alpha_k = g_k + r_k\varepsilon$, $\beta_k = 1 + q_k\varepsilon$, $u_k(\sigma) = \theta_k'(\sigma)$. Перепишем нашу систему в виде

$$u_1(\sigma) = 2g_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\sigma}{n^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{u_1(\sigma')}{\nu_n} - 2\frac{u_2(\sigma')}{\mu_n} \right) \cos n\sigma' d\sigma' + \Phi_1, \tag{9}$$

$$u_2(\sigma) = 2g_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\sigma}{n^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{u_2(\sigma')}{\nu_n} - 2\frac{u_1(\sigma')}{\mu_n} \right) \cos n\sigma' d\sigma' + \Phi_2,$$

где $\Phi_k(u_1, u_2, \varepsilon)$ — операторы, содержащие члены выше первого порядка относительно u_1, u_2, а также члены, исчезающие при $\varepsilon = 0$. Пусть $u = \{u_1, u_2\}$, $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2\}$, $P(u)$ — линейный интегральный оператор в (9). Перепишем (9) в виде

$$u = P(u) + \Phi(u, \varepsilon). \tag{10}$$

Оператор P имеет положительные собственные числа t_{2n-1}, t_{2n} ($n = 1, 2, \ldots ; t_{2n-1} < t_{2n}$), определяемые из уравнения

$$t^2 (4g_1g_2/n^6) - 2t(g_1 + g_2)/(\nu_n n^2) + 1 = 0,$$

и соответствующие им собственные вектор-функции

$$w_{2n-1} = \{m_{2n-1}, l_{2n-1}\} \cos n\sigma, \quad w_{2n} = \{m_{2n}, l_{2n}\} \cos n\sigma,$$

где
$$m_{2n-1} = 4g_1 t_{2n-1}/(\mu_n n^2), \quad m_{2n} = 4g_1 t_{2n}/(\mu_n n^2),$$
$$l_{2n-1} = 2g_1 t_{2n-1}/(\nu_n n^2) - 1, \quad l_{2n} = 2g_1 t_{2n}/(\nu_n n^2) - 1.$$

Уравнение (10) преобразуем к виду

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_i(u) w_i/t_i + \Phi(u, \varepsilon). \tag{11}$$

где
$$\Gamma_{2n-1}(u) = [(uw_{2n-1})(w_{2n}w_{2n}) - (uw_{2n})(w_{2n-1}w_{2n})]/\Delta_n,$$
$$\Gamma_{2n}(u) = [(uw_{2n})(w_{2n-1}w_{2n-1}) - (uw_{2n-1})(w_{2n-1}w_{2n})]/\Delta_n,$$
$$\Delta_n = (w_{2n-1}w_{2n-1})(w_{2n}w_{2n}) - (w_{2n-1}w_{2n})^2 = 4g_1(t_{2n} - t_{2n-1})/(\mu_n n^2),$$

а скалярное произведение вектор-функций $u=\{u_1, u_2\}$ и $v=\{v_1, v_2\}$ определяется равенством

$$(u\, v)=\int\limits_0^{2\pi}(u_1v_1+u_2v_2)d\sigma.$$

При выводе (11) учтено, что $(w_kw_i)\neq 0$ лишь при $k=2n-1$, $i=2n$, $g_1\neq g_2$.

Рассмотрим сначала регулярный случай, когда $t_i\neq 1$ при всех i. Тогда оператор $I-P$ (I — тождественный оператор) обратим. Применяя к (11) оператор $(I-P)^{-1}$, получим:

$$u=\sum_{i=1}^{\infty} w_i\Gamma_i[\Phi(u, \varepsilon)]/(1-1/t_i). \tag{12}$$

Решение уравнения (12) ищем в виде ряда по степеням ε методом неопределенных коэффициентов. Были найдены два приближения:

$$u_k=\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\cos n\sigma+\varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty} b_{kn}\cos n\sigma,$$

$$a_{kn}=2(g_1q_1\delta_{k2n}-g_2q_2\delta_{k1n})/(n^2\Delta_n'),$$

$$\Delta_n'=4g_1g_2/n^6-2(g_1+g_2)/(\nu_nn^2)+1\neq 0,$$

$$\delta_{kin}=1-2g_i/(\nu_nn^2) \text{ при } k\neq i,\ \delta_{kkn}=-4g_k/(\mu_nn^2).$$

Выражения для b_{kn} не приводятся ввиду их громоздкости.

Рассмотрим теперь случай ветвления (см. [5]). Пусть $t_1=1$ — простое собственное число оператора P. Перепишем (11) в виде

$$u=\xi w_1+P_0(u)+\Phi(u, \varepsilon), \tag{13}$$

где $\xi=\Gamma_1(u)$, $P_0(u)=P(u)-t_1\Gamma_1(u)$. Оператор $(I-P_0)$ обратим. Применим к (13) оператор $(I-P_0)^{-1}$:

$$u=\xi w_1+\Gamma_1[\Phi(u, \varepsilon)]w_1+\sum_{i=2}^{\infty} w_i\Gamma_i[\Phi(u, \varepsilon)]/(1-1/t_i). \tag{14}$$

Ищем решение (14) в виде ряда

$$u=\xi w_1+\varepsilon u_{10}+\sum_{i+m\geqslant 2}\xi^m\varepsilon^iu_{im}. \tag{15}$$

Найдя u_{im} (при $q_1=q_2=0$, $i>1$ $u_{im}=0$), подставим (15) в равенство $\xi=\Gamma_1(u)$ и получим уравнение разветвления:

$$\varepsilon L_{10}+\sum_{i+m\geqslant 2}L_{im}\varepsilon^i\xi^m=0. \tag{16}$$

Здесь

$$L_{10} = -2(g_1 q_1 l_2 + g_2 q_2 m_2)/\Delta_1,$$

$$L_{02} = \frac{g_1 l_2}{\Delta_1}\left[4\left(\frac{m_1}{\nu_1} - 2\frac{l_1}{\mu_1}\right)^2 - \frac{m_1^2}{2}\right] - \frac{g_2 m_2}{\Delta_1}\left[4\left(\frac{l_1}{\nu_1} - \frac{2m_1}{\mu_1}\right)^2 - \frac{l_1^2}{2}\right],$$

$$L_{11} = \frac{2}{\Delta_1}\left[r_1 l_2\left(\frac{m_1}{\nu_1} - 2\frac{l_1}{\mu_1}\right) - r_2 m_2\left(\frac{l_1}{\nu_1} - 2\frac{m_1}{\mu_1}\right)\right] + L'_{11}.$$

Если $q_1 = q_2 = 0$, то все $L_{im} = 0$ при $i > 1$, а также $L'_{11} = 0$.

Пусть g_k таковы, что $L_{02} \neq 0$. Если и $L_{10} \neq 0$ (при этом хотя бы одно из чисел q_1, q_2 не равно нулю), то характер малых решений уравнения (16) определяется уравнением $L_{02}\xi^2 + L_{10}\varepsilon = 0$, которое не имеет решений при $\varepsilon L_{10}/L_{02} > 0$ и имеет два решения при $\varepsilon L_{10}/L_{02} < 0$: $\xi = \pm|\varepsilon L_{10}/L_{02}|^{1/2}$. При этом $u = \pm|\varepsilon L_{10}/L_{02}|^{1/2} w_1 + 0(\varepsilon)$. Если $q_1 = q_2 = 0$ (при этом $L_{10} = L'_{11} = 0$), то (16) эквивалентно уравнению $\xi(L_{11}\varepsilon + L_{02}\xi) = 0$, которое имеет решения $\xi = 0$ и $\xi = -\varepsilon L_{11}/L_{02}$. При этом $u = 0$ и $u = -\varepsilon(L_{11}/L_{02}) w_1 + 0(\varepsilon^2)$.

Аналогичные формулы можно получить при $t_i = 1$, $i > 1$. Можно показать, в частности, что при $g_1 = g_2$ и $t_1 = 1$ стенки A_1B_1 и A_2B_2 прогибаются в одну сторону, а при $g_1 = g_2$ и $t_2 = 1$ они прогибаются в противоположные стороны, и течение симметрично относительно прямой $y = H/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич И. Л. О бифуркации решений одной задачи гидроупругости. — Труды семинара по краевым задачам. Вып. 15. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1978.
2. Киселев О. М., Рапопорт Э. Ф. О струйном обтекании упругой пластины. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 4.
3. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М., Физматгиз, 1966.
4. Секерж-Зенькович Я. И. О составных установившихся капиллярно-гравитационных волнах конечной амплитуды на поверхности жидкости конечной глубины. — ПММ, т. 39, вып. 6, 1975.
5. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., „Наука“, 1969.

Доложено на семинаре 1 февраля 1978 г.