

# Диаграммы Юнга, пути на решётке и метод отражений

М. А. Берштейн\*, Г. А. Мерзон

## ВВЕДЕНИЕ

В статье решаются несколько задач перечислительной комбинаторики, связанных с диаграммами Юнга. А именно выводятся формулы для количеств

- стандартных таблиц Юнга данной формы («формула крюков»);
- полустандартных таблиц Юнга данной формы, или, эквивалентно, таблиц Гельфанда — Цетлина («формула Вейля»);
- трёхмерных диаграмм Юнга («формулы Макмагона»).

Все эти задачи интересны не только с точки зрения комбинаторики. Первые две произошли из теории представлений симметрической группы  $S_N$  и полной матричной группы  $GL_n(\mathbb{C})$  соответственно. Трёхмерные диаграммы Юнга сейчас возникают в моделях математической физики и в теории представлений бесконечномерных алгебр.

В статье мы показываем, как перечисленные выше классические задачи решаются при помощи одного и того же метода. Строится биекция между изучаемыми комбинаторными объектами и некоторыми наборами путей на квадратной решётке. Для подсчёта числа этих путей используется *метод отражений*.

Видимо, самым простым и известным применением этого метода является вывод формулы для чисел Каталана (с него мы и начинаем). Излагаемый вывод формулы крюков принадлежит Зильбергеру [18], применения к трёхмерным диаграммам Юнга — Гесселю и Вьено [13].

Другая цель статьи — показать на конкретных примерах важные математические понятия: определители, диаграммы Юнга,  $q$ -биномиальные коэффициенты, производящие функции.

---

\* Работа частично поддержана грантами РФФИ 12-01-00836а и 12-01-31236-мол\_а.

В статье довольно много упражнений; в упражнения, в частности, вынесена часть доказательств. Мелким шрифтом выделены вставки для более подготовленного читателя. Они несущественны для понимания остальной части текста.

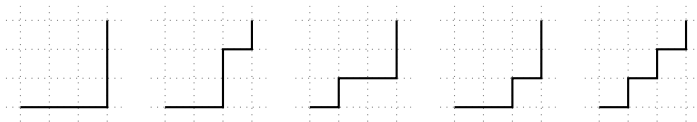
Мы благодарны О. Берштейн и В. Горину, прочитавшим предварительный текст статьи и предложившим много улучшений. Также мы благодарны В. Клепцыну, Е. Смирнову, Б. Фейгину за полезные обсуждения.

## § 1. ЧИСЛА КАТАЛАНА

### 1.1.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** *Путиами Дика* называются пути на клетчатой бумаге, идущие вверх и вправо и не поднимающиеся выше прямой  $y = x$ . Количество путей Дика из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n, n)$  называется  $n$ -м *числом Каталана* и обозначается  $C_n$ .

Например, третье число Каталана (количество путей из  $(0, 0)$  в  $(3, 3)$ ) равно 5:



Начало последовательности чисел Каталана выглядит следующим образом:  $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, \dots$

Помимо путей Дика существует много других комбинаторных объектов, количества которых даются числами Каталана. Один нужный для нас пример приведён в упражнении 1, множество других примеров (включая триангуляции, деревья, неассоциативные произведения) можно найти в статьях Доценко [2] и в упражнении 6.19 книги Стенли [7].

**УПРАЖНЕНИЕ 1.** Установите биекцию между путями Дика и «стандартными таблицами»  $2 \times n$ , т. е. таблицами  $2 \times n$ , заполненными натуральными числами от 1 до  $2n$  так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают,

1	2	3	1	2	5	1	3	4	1	2	4	1	3	5
4	5	6	3	4	6	2	5	6	3	5	6	2	4	6

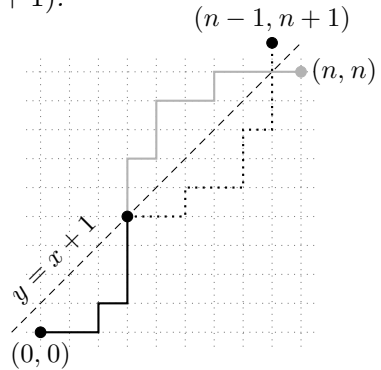
1.2. Существует несколько способов доказать явную формулу для чисел Каталана. Мы приведём один из них, основанный на *методе отражений*.

Любой путь из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n, n)$  состоит из  $n$  ходов вправо и  $n$  ходов вверх. Поэтому общее число таких путей равно числу способов выбрать из чисел от 1 до  $2n$  номера ходов, идущих вверх, т. е. биномиальному

коэффициенту  $\binom{2n}{n}$ . Осталось найти число «плохих» путей, т. е. путей, заходящих выше диагонали  $y = x$ .

**ЛЕММА 1** (лемма об отражении). *Количество путей из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n, n)$ , поднимающихся выше диагонали  $y = x$ , равно количеству всех путей из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n - 1, n + 1)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Установим взаимно однозначное соответствие между этими двумя множествами путей. Любой путь из  $(0, 0)$  в  $(n, n)$ , поднимающийся выше диагонали  $y = x$ , пересекает прямую  $y = x + 1$ . Рассмотрим *первую* точку пересечения пути с этой прямой и отразим весь оставшийся путь относительно прямой  $y = x + 1$ . Тогда получим путь из  $(0, 0)$  в  $(n - 1, n + 1)$ . Обратное отображение строится аналогично.  $\square$



Любой путь из  $(0, 0)$  в  $(n - 1, n + 1)$  состоит из  $n - 1$  ходов вправо и  $n + 1$  ходов вверх. Значит, количество таких путей равно количеству способов выбрать из чисел от 1 до  $2n$  номера ходов, идущих вверх, т. е. биномиальному коэффициенту  $\binom{2n}{n + 1}$ .

Таким образом, мы доказали следующую формулу для чисел Каталана:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n - 1} = \frac{(2n)!}{n!(n + 1)!} = \frac{1}{n + 1} \binom{2n}{n}.$$

Описанный метод доказательства формулы для чисел Каталана восходит к работе Андре 1887 года [10] (в действительности Андре использовал несколько другой вариант этого рассуждения, подробности можно найти в статье [17]).

На самом деле мы доказали даже две формулы для чисел Каталана: одну в виде разности, а другую в виде произведения. Конечно, формально одна из другой легко следует, но можно сказать, что приведённое доказательство *объясняет* только первую из них. Для объяснения второй формулы нужны другие методы.

**1.3.** После приведённого выше доказательства естественно спросить, насколько оно может быть обобщено. Нет ли каких-то других задач, которые можно решить этим красивым методом?

Легко понять, что тем же методом можно найти число путей Дика из точки  $(0, 0)$  в точку  $(a, b)$  (для любых  $a \geq b$ ). Действительно, всего путей по сетке между этими точками  $\binom{a + b}{a}$ . Из них нам не подходят пути,

поднимающиеся выше диагонали, т. е. задевающие прямую  $y = x + 1$  — поэтому их количество равно (проверьте!) количеству всех путей из точки  $(0, 0)$  в точку  $(b - 1, a + 1)$ , т. е.  $\binom{a+b}{a+1}$ . Окончательно получаем ответ

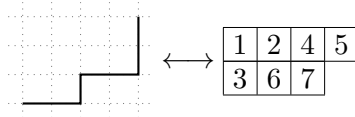
$$\binom{a+b}{a} - \binom{a+b}{a+1} = \frac{(a+b)!}{(a+1)!b!}(a-b+1). \tag{1}$$

Отметим, что ответ, полученный в виде разности, снова хорошо переписывается в виде произведения.

1.4. Мы увидели, что количество путей Дика из  $(0, 0)$  в  $(a, b)$  можно считать аналогично тому, как считалось количество чисел Каталана. Можно сформулировать аналогичное утверждение и на языке таблиц.

**ЛЕММА 2.** *Количество путей Дика из  $(0, 0)$  в  $(a, b)$  равно количеству таблиц из двух строк длин  $a$  и  $b$ , заполненных числами от 1 до  $a + b$  так, что числа в каждой строке и каждом столбце возрастают.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим какой-то путь Дика и будем по нему заполнять таблицу числами от 1 до  $a + b$ , по возрастанию: если  $k$ -й ход проходит по горизонтали, то будем писать число  $k$  в первую строчку, иначе — во вторую.



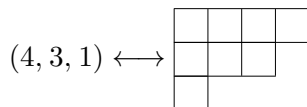
Легко видеть, что это соответствие является взаимно однозначным. □

Достоинство интерпретации через таблицы состоит в том, что видно естественное направление, куда двигаться дальше. А именно, можно не ограничиваться таблицами из двух строк, а рассматривать произвольные таблицы.

## § 2. СТАНДАРТНЫЕ ТАБЛИЦЫ И ПУТИ

### 2.1.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  — набор натуральных чисел, упорядоченный так, что  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ . *Диаграммой Юнга* формы  $\lambda$  называется таблица из  $k$  строк из соответственно  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  клетками.



*Стандартной таблицей* формы  $\lambda$  называется заполнение клеток диаграммы  $\lambda$  числами от 1 до  $N = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$  так, что числа в каждой строке и каждом столбце возрастают.

На рисунке ниже изображены все 16 стандартных таблиц формы  $(3, 2, 1)$ .

1	2	3	1	2	3	1	2	4	1	2	4	1	2	5	1	2	5	1	2	6	1	2	6
4	5	4	6	3	5	3	6	3	4	3	6	3	4	3	5	3	4	3	5	3	5	3	5
6		5		6		5		6		4		5		4		5		4		4		4	

1	3	4	1	3	4	1	3	5	1	3	5	1	3	6	1	3	6	1	4	5	1	4	6
2	5	2	6	2	4	2	6	2	4	2	5	2	6	2	5	2	6	2	6	2	5	2	5
6		5		6		4		5		4		3		4		3		3		3		3	

Как мы видели, количество стандартных таблиц формы  $(a, b)$  вычисляется методом отражений и даётся формулой (1). Естественно попытаться обобщить это рассуждение на произвольные диаграммы Юнга.

Аналогично доказательству леммы 2 можно перейти от задачи со стандартными таблицами к задаче про пути. Например, число стандартных таблиц формы  $(a, b, c)$  равно числу путей на трёхмерной решётке из точки  $(0, 0, 0)$  в точку  $(a, b, c)$ , каждым ходом сдвигающихся на  $+1$  по какой-то из координат и не выходящих из области  $x \geq y \geq z$ . Подобным образом можно проинтерпретировать количество стандартных таблиц любой формы.

2.2. Работать с путями в сложной области многомерного пространства не очень удобно. Рассуждения упростятся, если заменить движение одной фишки в  $k$ -мерном пространстве на движение  $k$  фишек в одномерном пространстве (рассмотреть проекции фишки).

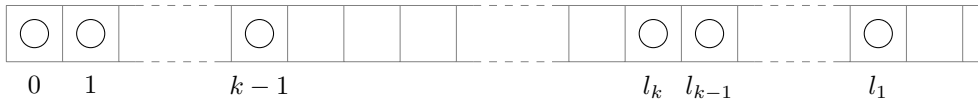
**ЛЕММА 3.** Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ . Количество стандартных таблиц формы  $\lambda$  равно количеству способов переместить  $k$  (пронумерованных) фишек из клетки 0 в клетки с номерами  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  соответственно, передвигая за ход по одной фишке в следующую клетку так, чтобы фишка с большим номером не обгоняла фишку с меньшим номером.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По каждому такому пути строится стандартная таблица нужной формы: если очередной ход сделала  $i$ -я фишка, запишем номер этого хода в первую свободную клетку  $i$ -й строки. При этом числа по строкам возрастают автоматически, а по столбцам — в силу того, что мы запретили обгоны.

Легко видеть, что это соответствие является взаимно однозначным.  $\square$

Вместо запрета обгонов удобнее запретить фишкам занимать одну и ту же клетку. Для этого достаточно предварительно сдвинуть  $(k - 1)$ -ю фишку на 1 клетку вперёд,  $(k - 2)$ -ю — на две клетки вперёд, и так далее. Таким образом,  $i$ -я фишка будет теперь идти из клетки  $k - i$  в клетку  $\lambda_i + k - i$ .

Предложение 4. Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , а  $l_i = \lambda_i + k - i$ . Количество стандартных таблиц формы  $\lambda$  равно количеству *правильных перемещений*  $k$  фишек из клеток  $(k - 1, \dots, 0)$  в клетки  $(l_1, \dots, l_k)$ .



Здесь и далее под *правильным перемещением* мы понимаем перемещение, в котором за ход можно передвинуть одну фишку на следующую клетку при условии, что эта клетка свободна.

2.3. Итак, чтобы найти количество стандартных таблиц формы  $\lambda$ , нужно найти количество правильных перемещений  $k$  фишек из клеток  $(k - 1, \dots, 0)$  в клетки  $(l_1, \dots, l_k)$ .

Для простоты начнём со случая  $k = 3$ . В любом перемещении трёх фишек из клеток  $(2, 1, 0)$  в  $(l_1, l_2, l_3)$  первая фишка делает  $l_1 - 2$  хода, вторая делает  $l_2 - 1$  ход, третья делает  $l_3$  ходов. Поэтому если убрать условие, что фишки не встречаются, то любое перемещение будет кодироваться перестановкой  $l_1 - 2$  единиц,  $l_2 - 1$  двоек и  $l_3$  троек. Количество таких перестановок равняется мультиномиальному коэффициенту

$$\binom{N}{l_1 - 2, l_2 - 1, l_3} = \frac{N!}{(l_1 - 2)!(l_2 - 1)!l_3!},$$

где  $N = (l_1 - 2) + (l_2 - 1) + l_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$  — общее число клеток в диаграмме.

Теперь надо подсчитать количество «плохих» перемещений (перемещений, при которых фишки встречаются). Подобно лемме 1 об отражении легко подсчитать количество перемещений, при которых встречаются первая и вторая фишка. В самом деле, рассмотрим их *первую* встречу и заменим весь дальнейший путь первой фишки на путь второй и наоборот. Мы получим перемещение из  $(2, 1, 0)$  в  $(l_2, l_1, l_3)$ , т. е. первая фишка придёт в  $l_2$ , а вторая в  $l_1$ . Количество таких путей задаётся мультиномиальным коэффициентом.

Аналогично количество перемещений из  $(2, 1, 0)$  в  $(l_1, l_2, l_3)$ , при которых встречаются вторая и третья фишка, равно количеству перемещений из  $(2, 1, 0)$  в  $(l_1, l_3, l_2)$ . Это количество также задаётся мультиномиальным коэффициентом. Получаем разность

$$\binom{N}{l_1 - 2, l_2 - 1, l_3} - \binom{N}{l_2 - 2, l_1 - 1, l_3} - \binom{N}{l_1 - 2, l_3 - 1, l_2}.$$

Но это ещё не окончательный ответ, так как есть перемещения, в которых и первая фишка встречается со второй, и вторая с третьей — эти переме-

щения мы вычли два раза. Пытаясь учесть подобные эффекты, можно догадаться до ответа:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Количество правильных перемещений из  $(2, 1, 0)$  в  $(l_1, l_2, l_3)$  равно

$$\binom{N}{l_1-2, l_2-1, l_3} - \binom{N}{l_2-2, l_1-1, l_3} - \binom{N}{l_1-2, l_3-1, l_2} + \\ + \binom{N}{l_2-2, l_3-1, l_1} + \binom{N}{l_3-2, l_1-1, l_2} - \binom{N}{l_3-2, l_2-1, l_1}.$$

Отметим, что количество правильных перемещений для двух фишек (левую часть формулы (1)) можно переписать в похожем виде:

$$\binom{N}{l_1-1, l_2} - \binom{N}{l_2-1, l_1}.$$

2.4. Приведённые выше ответы для  $k = 2, 3$  наводят на мысль, что в общем случае ответ даётся суммой по всем перестановкам чисел  $l_1, \dots, l_k$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Перестановкой*  $k$  элементов называется биекция множества  $\{1, 2, \dots, k\}$  на себя. *Умножением* перестановок называется их последовательное выполнение. Множество всех перестановок обозначают  $S_k$ , всего перестановок  $k!$ , перестановки обычно обозначаются греческими буквами, например  $\sigma$ .

Для перестановки  $\sigma$  будем называть *инверсией* пару чисел  $i, j$  такую, что  $i < j$ , но  $\sigma(i) > \sigma(j)$  (большее число стоит раньше меньшего). Количество инверсий будем обозначать  $|\sigma|$ . *Чётностью* перестановки называется чётность числа инверсий.

*Транспозицией* называется перестановка, которая меняет местами два элемента и не перемещает остальные.

Можно доказать, что умножение любой перестановки на транспозицию меняет чётность этой перестановки. В частности, если перестановка представлена в виде произведения транспозиций, то чётность числа сомножителей совпадает с чётностью перестановки.

ТЕОРЕМА 1. *Количество правильных перемещений из  $(k-1, k-2, \dots, 0)$  в  $(l_1, l_2, \dots, l_k)$  равно*

$$\sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{|\sigma|} \binom{N}{l_{\sigma(1)} - k + 1, l_{\sigma(2)} - k + 2, \dots, l_{\sigma(k)}}. \quad (2)$$

Легко видеть, что эта теорема является обобщением приведённых выше формул для случаев двух и трёх строк.

Отметим, что числа  $l_{\sigma(i)} - k + i$  в формуле (2) могут оказаться отрицательными. Соответствующие мультиномиальные коэффициенты нужно

считать равными нулю. Например, при  $\lambda = (3, 2, 1)$

$$\begin{aligned} \binom{6}{3, 2, 1} - \binom{6}{1, 4, 1} - \binom{6}{3, 0, 3} + \binom{6}{1, 0, 5} + \binom{6}{-1, 4, 3} - \binom{6}{-1, 2, 5} = \\ = 60 - 20 - 30 + 6 = 16. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Каждое слагаемое в сумме (2) имеет ясный комбинаторный смысл: количество перемещений из  $(k - 1, k - 2, \dots, 0)$  в  $(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, \dots, l_{\sigma(k)})$ . То есть сумма (2) считает количество способов переместить фишки из точек  $\{k - 1, \dots, 0\}$  в точки  $\{l_1, \dots, l_k\}$  со знаками, зависящими от того, какая фишка в какую точку приходит.

Разобьём все *неправильные* перемещения (т. е. перемещения, при которых фишки встречаются) на пары. А именно пусть первыми встречаются фишки, которые выходят из  $k - i$  и  $k - j$ . Поменяем их пути после первого пересечения. После такой замены фишка  $k - i$  придёт в поле  $l_{\sigma(j)}$ , а фишка  $k - j$  придёт в поле  $l_{\sigma(i)}$ .

Другими словами, новая перестановка  $\sigma'$  отличается от  $\sigma$  на транспозицию. В частности, эти перестановки имеют разную чётность и соответствующая пара перемещений входит в сумму 2 с противоположными знаками и сокращается.

Остаются только слагаемые, соответствующие *правильным* перемещениям. □

Можно перейти назад от перемещений  $k$  фишек к движению одной фишки в  $k$ -мерном пространстве. Тогда разбиение на пары, использованное в доказательстве, будет геометрически задаваться отражениями относительно гиперплоскостей, как в лемме 1.

Такое доказательство формулы для числа стандартных таблиц придумал Зильбергер в 1983 году [18].

Отметим, что материал этого пункта связан с теорией представлений группы  $S_N$ . Неприводимые комплексные представления  $R_\lambda$  группы  $S_N$  параметризуются диаграммами Юнга  $\lambda$ , состоящими из  $N$  клеток (см., например, [8, гл. 7]). При этом размерность представления  $R_\lambda$  равна количеству стандартных таблиц формы  $\lambda$ .

Мультиномиальный коэффициент  $\binom{N}{i_1, i_2, \dots, i_k}$  равен размерности представления группы  $S_N$ , индуцированного с тривиального представления подгруппы  $S_{i_1} \times S_{i_2} \times \dots \times S_{i_k} \subset S_N$ . Поэтому выражение (2) является аргументом в пользу существования комплекса, состоящего из прямых сумм индуцированных представлений  $S_N$ , гомологии которого равны неприводимому представлению  $R_\lambda$ . Знакопеременная сумма (2) тогда возникала бы как эйлерова характеристика этого комплекса. Разбиение на пары, использованное в доказательстве, может рассматриваться как комбинаторный аналог дифференциала комплекса.

Такой комплекс представлений группы  $S_N$  построен в статье [3].

## § 3. ФОРМУЛА КРЮКОВ

3.1. На формулу (2) можно смотреть как на обобщение аддитивной формулы для чисел Каталана

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Оказывается, есть соответствующее обобщение и у мультипликативной формулы

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Начнём со случая диаграмм из  $k=3$  строк. В этом случае ответ задаётся формулой из леммы 5. Вынесем за скобки общий множитель  $N!$  и приведём все дроби к общему знаменателю  $l_3! l_2! l_1!$ .

Останется сумма шести слагаемых вида  $l_i(l_i - 1)l_j = l_i^2 l_j - l_i l_j$ . Члены вида  $l_i l_j$  сокращаются. Поэтому мы получаем выражение

$$\frac{N!}{l_1! l_2! l_3!} (l_1^2 l_2 - l_2^2 l_1 - l_1^2 l_3 + l_2^2 l_3 + l_3^2 l_1 - l_3^2 l_2).$$

Выражение в скобках можно разложить на множители. Таким образом, количество стандартных таблиц из трёх строк может быть вычислено по формуле

$$\frac{N!}{l_1! l_2! l_3!} (l_1 - l_2)(l_1 - l_3)(l_2 - l_3).$$

Теперь нетрудно угадать и общий ответ.

**ТЕОРЕМА 2** (формула Фробениуса — Юнга). *Количество стандартных таблиц формы  $\lambda$  равно*

$$\frac{N!}{l_1! \dots l_k!} \cdot \prod_{i < j} (l_i - l_j),$$

где  $N$  — количество клеток диаграммы,  $\lambda_i$  — длины строк, а  $l_i = \lambda_i + k - i$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Нам нужно вычислить сумму

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{|\sigma|} \binom{N}{l_{\sigma(1)}-k+1, l_{\sigma(2)}-k+2, \dots, l_{\sigma(k)}} &= \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{|\sigma|} \frac{N!}{(l_{\sigma(1)}-k+1)! (l_{\sigma(2)}-k+2)! \dots l_{\sigma(k)}!}. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему вынесем за скобку множитель  $\frac{N!}{l_1! l_2! \dots l_k!}$  и перепишем выражение в виде

$$\frac{N!}{l_1! l_2! \dots l_k!} \Delta(l_1, \dots, l_k), \quad (3)$$

где

$$\Delta(l_1, \dots, l_k) := \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{|\sigma|} l_{\sigma(1)}^{\downarrow k-1} \cdot l_{\sigma(2)}^{\downarrow k-2} \cdot \dots \cdot l_{\sigma(k-1)} \cdot 1,$$

а  $x^{\downarrow m}$  обозначает<sup>1)</sup> убывающую факториальную степень,

$$x^{\downarrow m} = x(x-1) \dots (x-m+1).$$

ЛЕММА 6.  $\Delta(l_1, \dots, l_k) = \prod_{i < j} (l_i - l_j)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Заметим, что при перестановке любых  $l_i$  и  $l_j$  многочлен  $\Delta(l_1, \dots, l_k)$  меняет знак. В частности, он обращается в нуль при  $l_i = l_j$ . Следовательно,  $\Delta(l_1, \dots, l_k)$  делится на многочлен  $(l_i - l_j)$  при любых  $i \neq j$ , а значит, делится и на произведение  $\prod_{i < j} (l_i - l_j)$ .

С другой стороны,  $\Delta(l_1, \dots, l_k)$  и это произведение — многочлены одной и той же степени

$$1 + 2 + \dots + (k-1) = \binom{k}{2}.$$

Поэтому

$$\Delta(l_1, \dots, l_k) = c \prod_{i < j} (l_i - l_j),$$

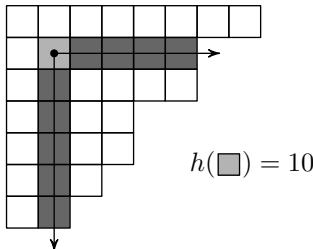
где  $c$  — некоторое число.

Сравнив коэффициенты при мономе  $l_1^{k-1} l_2^{k-2} \dots l_{k-1}$  в левой и правой частях, видим, что  $c = 1$ . □

Из формулы (3) и леммы 6 следует утверждение теоремы. □

3.2. Чтобы переписать доказанную в последней теореме формулу в ещё более замечательном виде, нам потребуется следующее определение.

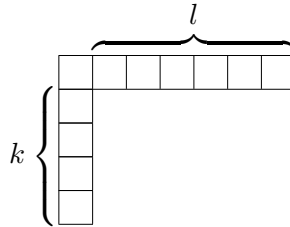
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Крюк* клетки  $s$  в диаграмме Юнга  $\lambda$  состоит из этой клетки и всех клеток, лежащих строго под ней или строго справа от неё. Количество клеток в крюке называется длиной крюка, обозначается  $h_\lambda(s)$  или просто  $h(s)$ .



<sup>1)</sup> В литературе также используются обозначения  $x^{\underline{m}}$ ,  $(x)_m$  и др.

ТЕОРЕМА 3 (формула крюков). *Количество стандартных таблиц формы  $\lambda$  равно  $\frac{N!}{\prod_{s \in \lambda} h(s)}$ , где произведение берётся по клеткам диаграммы  $\lambda$ ,  $N$  — общее количество клеток.*

Например, для диаграммы  $(3, 2, 1)$  получаем  $\frac{6!}{5!(3!)^2} = 16$ .



В качестве другого примера рассмотрим диаграмму  $\lambda$  в виде уголка с плечами  $k$  и  $l$ . Формула (2) даёт ответ в виде суммы  $(k+1)!$  слагаемых, а по формуле крюков мы сразу получаем

$$\frac{(k+l+1)!}{(k+l+1) \cdot k! \cdot l!} = \binom{k+l}{k}.$$

Этот ответ легко доказать и непосредственно.

Запомнить формулу крюков может помочь следующее рассуждение. Всего способов расставить последовательные числа по клеткам таблицы  $\lambda$  ровно  $N!$ . Стандартными таблицами являются в точности те расстановки, в которых число в каждой клетке является наибольшим в своём крюке. Вероятность такого события для клетки  $s$  равна  $1/h(s)$ . Значит, вероятность того, что случайная расстановка чисел является стандартной таблицей, есть  $1/\prod h(s)$ , а число стандартных таблиц данной формы даётся формулой крюков.

К сожалению, это рассуждение не является доказательством. Можно заметить, например, что в нём можно было бы вместо крюков клеток говорить об «антикрюках» длины  $i+j-1$  (где  $i$  — номер строки, а  $j$  — столбца) — но получающаяся при этом формула почти никогда не верна.

Проблема, конечно, в том, что в рассуждении перемножаются вероятности событий, которые совершенно не являются независимыми.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Выведите формулу крюков из формулы Фробениуса — Юнга.

Формула крюков была предложена в работе Фрейма, Робинсона и Трелла [12]. Существует много разных доказательств этой формулы. Доступное изложение ещё одного из них можно найти в статье Спивака [6].

3.3. Можно заметить, что формула (2) фактически выражает число стандартных таблиц в виде определителя.

Напомним, что *матрицей*  $n \times n$  называется квадратная таблица этого размера, заполненная числами. Удобно их нумеровать двумя индексами — номером строки и номером столбца:  $a_{ij}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Определителем* матрицы  $A$  называется выражение

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \quad (4)$$

Определители матриц  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$  имеют вид:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Подробнее про определители и их применения можно прочитать в любом учебнике алгебры, например [1]. В следующих двух упражнениях мы приведём нужные нам свойства определителей (их легко вывести из определения). В упражнении 5 для полноты картины приведена геометрическая интерпретация.

УПРАЖНЕНИЕ 3. а) Докажите, что при умножении строки матрицы на число  $x$  определитель также умножается на  $x$ . Аналогично со столбцами.

б) Докажите, что при перестановке двух строк матрицы определитель меняет знак. В частности, определитель матрицы с одинаковыми строками равен нулю.

в) Докажите, что если к одной строке матрицы прибавить другую, умноженную на  $\lambda$ , то определитель матрицы не изменится. Аналогично со столбцами.

УПРАЖНЕНИЕ 4. *Транспонированием* называется отражение матрицы относительно диагонали, соединяющей левый верхний и правый нижний углы. Докажите, что при транспонировании определитель не меняется.

УПРАЖНЕНИЕ 5. а) На плоскости с началом координат  $O$  даны две точки  $A$  и  $B$  с координатами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  соответственно. Докажите, что площадь треугольника  $OAB$  равна

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|.$$

б) В трёхмерном пространстве с началом координат  $O$  даны три точки  $A, B, C$  с координатами  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$  соответственно.

Докажите, что объём тетраэдра  $OABC$  равен

$$\frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Вернёмся теперь к задаче о подсчёте числа стандартных таблиц. Выражение (2) можно переписать в виде:

$$N! \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{1}{(l_1-k+1)!} & \frac{1}{(l_2-k+1)!} & \cdots & \frac{1}{(l_k-k+1)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(l_1-1)!} & \frac{1}{(l_2-1)!} & \cdots & \frac{1}{(l_k-1)!} \\ \frac{1}{l_1!} & \frac{1}{l_2!} & \cdots & \frac{1}{l_k!} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Можно воспользоваться упражнением 3, переставить строки и вынести максимальный знаменатель из каждого столбца. Тогда выражение примет вид

$$(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{N!}{l_1! l_2! \dots l_k!} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ l_1 & l_2 & \dots & l_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_1^{\downarrow k-1} & l_2^{\downarrow k-1} & \dots & l_k^{\downarrow k-1} \end{pmatrix}.$$

На языке определителей лемма 6 означает, что

$$\det(l_j^{\downarrow i-1}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ l_1 & l_2 & \dots & l_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_1^{\downarrow k-1} & l_2^{\downarrow k-1} & \dots & l_k^{\downarrow k-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (l_j - l_i) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \Delta(l_1, l_2, \dots, l_k). \quad (6)$$

Этот определитель называется *определителем Вандермонда*, он нам ещё пригодится.

Отметим, что в стандартном определении матрица Вандермонда состоит из обычных, а не убывающих степеней:

$$\det(l_j^{i-1}) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \Delta(l_1, l_2, \dots, l_n).$$

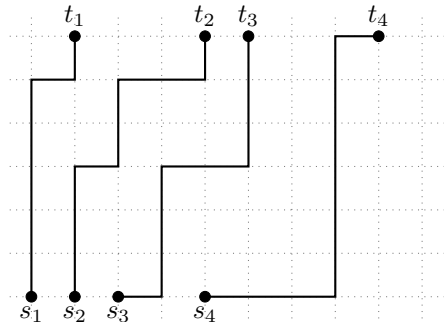
Но легко видеть, что одна матрица получается из другой преобразованиями из упражнения 3в. Также часто матрицей Вандермонда называют транспонированную матрицу  $(l_i^{j-1})$ , определитель у неё такой же по упражнению 4.

§ 4. НЕПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПУТИ

4.1. Рассмотрим теперь другую, быть может более известную задачу, которую помогает решить метод отражений.

Рассмотрим плоскость, разбитую на единичные квадратики. Пусть на одной горизонтальной линии выбраны  $n$  начальных вершин  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , на другой выбраны  $n$  конечных вершин  $t_1, t_2, \dots, t_n$  (точки занумерованы слева направо). Мы хотим посчитать количество *непересекающихся путей* из начальных вершин в конечные, таких, что пути идут по линиям сетки вверх и вправо.

Введём обозначения: через  $P(s \rightarrow t)$  обозначим количество путей из вершины  $s$  в вершину  $t$  (от английских слов path — путь, source — исток, target — цель). Аналогично через  $P(S \rightarrow T)$  обозначим число путей, которые ведут из вершин  $s_1, s_2, \dots, s_n$  в вершины  $t_1, t_2, \dots, t_n$  соответственно. Понятно, что



$$P(S \rightarrow T) = P(s_1 \rightarrow t_1) \cdot P(s_2 \rightarrow t_2) \cdot \dots \cdot P(s_n \rightarrow t_n).$$

Мы хотим посчитать количество непересекающихся путей, это количество мы обозначим  $P_{nc}(S \rightarrow T)$  (индекс “nc” от английского non-crossing).

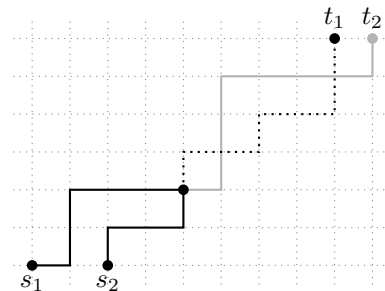
Случай одной точки тривиален: если точка  $t$  лежит на  $k$  выше и на  $l$  правее точки  $s$ , то

$$P_{nc}(s_1 \rightarrow t_1) = P(s_1 \rightarrow t_1) = \binom{k+l}{k}.$$

Случай двух точек уже более интересен. Общее число путей равно

$$P(s_1 \rightarrow t_1) \cdot P(s_2 \rightarrow t_2).$$

Среди этих путей есть пересекающиеся, метод отражений поможет нам их учесть. Аналогично доказательству леммы об отражениях (лемма 1) можно переставить пути после *первого* пересечения и получить пару путей, которые ведут из  $s_1, s_2$  в  $t_2, t_1$  соответственно.



Таким образом,

$$P_{nc}(s_1, s_2 \rightarrow t_1, t_2) = P(s_1 \rightarrow t_1) \cdot P(s_2 \rightarrow t_2) - P(s_1 \rightarrow t_2)P(s_2 \rightarrow t_1).$$

Последний ответ удобно переписать в виде определителя матрицы  $2 \times 2$ :

$$P_{nc}(s_1, s_2 \rightarrow t_1, t_2) = \det \begin{pmatrix} P(s_1 \rightarrow t_1) & P(s_1 \rightarrow t_2) \\ P(s_2 \rightarrow t_1) & P(s_2 \rightarrow t_2) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Рассуждая по методу отражений, нам нужно учесть пути, которые ведут из множества  $S$  в множество  $T$ , но с некоторой перестановкой. Для перестановки  $\sigma \in S_n$  будем обозначать через  $P(S \rightarrow \sigma(T))$  количество путей, которые ведут из  $s_1, s_2, \dots, s_n$  в  $t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}$  соответственно.

**ТЕОРЕМА 4.** *Количество непересекающихся путей может быть найдено по формуле*

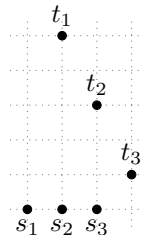
$$\begin{aligned} P_{nc}(S \rightarrow T) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} P(S \rightarrow \sigma(T)) = \\ &= \det \begin{pmatrix} P(s_1 \rightarrow t_1) & P(s_1 \rightarrow t_2) & \dots & P(s_1 \rightarrow t_n) \\ P(s_2 \rightarrow t_1) & P(s_2 \rightarrow t_2) & \dots & P(s_2 \rightarrow t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(s_n \rightarrow t_1) & P(s_n \rightarrow t_2) & \dots & P(s_n \rightarrow t_n) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Сумма (7) считает пути из  $S$  в  $\sigma(T)$  со знаками  $(-1)^{|\sigma|}$ .

Разобьём все пути с пересечениями на пары. Пусть  $i$  — наименьшее такое число, что путь, выходящий из  $s_i$ , пересекает какой-то другой путь. Пусть его первое пересечение происходит с путём, выходящим из вершины  $s_j$ . Тогда поменяем местами эти пути после их первого пересечения. Теперь путь из  $s_i$  ведёт в  $t_{\sigma(j)}$ , а из  $s_j$  в  $t_{\sigma(i)}$ .

Другими словами, новая перестановка  $\sigma'$  отличается от  $\sigma$  на одну транспозицию  $\sigma(i) \leftrightarrow \sigma(j)$ . Поэтому у  $\sigma'$  и  $\sigma$  разный знак, соответственно эти слагаемые в сумме (2) сокращаются. Остаются только слагаемые, отвечающие непересекающимся путям.  $\square$

4.2. В предыдущем пункте мы предполагали, что начала  $s_i$  и концы  $t_i$  расположены на горизонтальных прямых. Однако в доказательстве это мало использовалось. Рассмотрим следующий пример:



Количество непересекающихся путей из  $s_1, s_2, s_3$  в  $t_1, t_2, t_3$  снова равно определителю

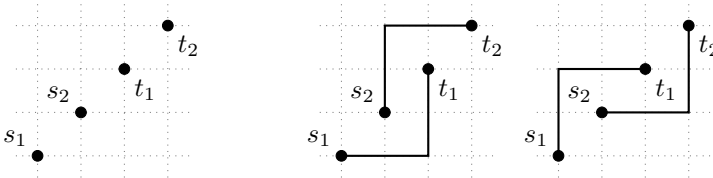
$$\det \begin{pmatrix} P(s_1 \rightarrow t_1) & P(s_1 \rightarrow t_2) & P(s_1 \rightarrow t_3) \\ P(s_2 \rightarrow t_1) & P(s_2 \rightarrow t_2) & P(s_2 \rightarrow t_3) \\ P(s_3 \rightarrow t_1) & P(s_3 \rightarrow t_2) & P(s_3 \rightarrow t_3) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \binom{6}{1} & \binom{5}{2} & \binom{4}{3} \\ \binom{5}{0} & \binom{4}{1} & \binom{3}{2} \\ 0 & \binom{3}{0} & \binom{2}{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 14.$$

(То, что в ответе получилось число Каталана  $C_3 = 14$ , не случайно, см. упражнение 17.)

Не обязательно даже рассматривать пути на квадратной решётке. Можно взять любой ориентированный граф  $\Gamma$  без циклов (последнее условие нужно для того, чтобы числа  $P(s \rightarrow t)$  были конечны).

Однако ситуация не совсем простая даже на квадратной решётке, как показывает следующий пример:



Легко видеть, что существует два непересекающихся пути, ведущих из  $s_1, s_2$  в  $t_1, t_2$ . Но вычисления с определителем дают совсем другой ответ:

$$\det \begin{pmatrix} P(s_1 \rightarrow t_1) & P(s_1 \rightarrow t_2) \\ P(s_2 \rightarrow t_1) & P(s_2 \rightarrow t_2) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \binom{4}{2} & \binom{6}{3} \\ \binom{2}{2} & \binom{4}{2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = -4.$$

Причина в том, что в этом случае есть непересекающиеся пути, ведущие из  $s_1$  в  $t_2$ , а из  $s_2$  в  $t_1$ . Таких путей 6, и определитель как раз и вычисляет разность  $2 - 6 = -4$ .

Мы видим, что надо учесть ещё непересекающиеся пути, ведущие из  $s_1, s_2, \dots, s_n$  в  $t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}$ . Естественно, количество таких путей мы будем обозначать  $P_{nc}(S \rightarrow \sigma(T))$ . Если граф и набор начальных и конечных вершин таковы, что набор непересекающихся путей существует только для тривиальной перестановки  $\sigma$ , то будем называть такой граф *неперестановочным*. Легко видеть, что случай, описанный в предыдущем пункте и первом примере этого пункта, является неперестановочным.

ТЕОРЕМА 5. Дан ориентированный граф  $\Gamma$  без ориентированных циклов,  $n$  начальных вершин  $s_1, \dots, s_n$  и  $n$  конечных вершин  $t_1, \dots, t_n$ . Обозначим через  $P$  матрицу

$$P = (P(s_i \rightarrow t_j)) = \begin{pmatrix} P(s_1 \rightarrow t_1) & P(s_1 \rightarrow t_2) & \dots & P(s_1 \rightarrow t_n) \\ P(s_2 \rightarrow t_1) & P(s_2 \rightarrow t_2) & \dots & P(s_2 \rightarrow t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(s_n \rightarrow t_1) & P(s_n \rightarrow t_2) & \dots & P(s_n \rightarrow t_n) \end{pmatrix}.$$

а) Если граф  $\Gamma$  является неперестановочным, то количество непересекающихся путей задаётся формулой

$$P_{nc}(S \rightarrow T) = \det P.$$

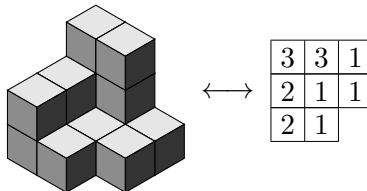
б) В общем случае

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} P_{nc}(S \rightarrow \sigma(T)) = \det P.$$

Несмотря на несложное в общем доказательство, эта теорема является относительно новой. Она независимо появилась в статьях Карлина и Макгрегора 1959 года [14] и Линдстрема 1975 года [15]. Эта теорема стала очень популярна после статей Гесселя и Вьено 1980-х годов [13], в которых при помощи неё были решены несколько знаменитых комбинаторных задач. Двум таким задачам посвящены следующие параграфы статьи.

## § 5. ТРЁХМЕРНЫЕ ДИАГРАММЫ ЮНГА

Трёхмерная диаграмма Юнга — это башня из кубиков, лежащих в углу. Для формального определения удобно отождествить их с плоскими разбиениями — прямоугольными таблицами целых неотрицательных чисел, в которых числа нестрого убывают по строкам и столбцам. Представим, что такая таблица лежит на столе, а на клетке, на которой написано число  $t$ , стоит башня из  $t$  единичных кубиков. Возникающее трёхмерное тело и называется трёхмерной диаграммой Юнга.

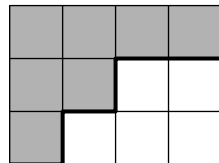


Ряд замечательных результатов про трёхмерные диаграммы Юнга был получен английским математиком Перси Макмагоном в начале XX века [16]. Например, он доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Количество трёхмерных диаграмм, лежащих внутри параллелепипеда размера  $a \times b \times c$ , может быть найдено по формуле*

$$\prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{i+j+c-1}{i+j-1}. \quad (8)$$

В этом параграфе мы докажем формулу Макмагона. Начнём со случая параллелепипеда высоты 1. Соответствующие трёхмерные диаграммы Юнга суть (утолщённые) двумерные диаграммы, лежащие внутри прямоугольника  $a \times b$ . Количество таких диаграмм равно количеству путей из точки  $(0, -b)$  в точку  $(a, 0)$ , идущих вправо и вверх по линиям сетки, т. е. биномиальному коэффициенту  $\binom{a+b}{b}$ .



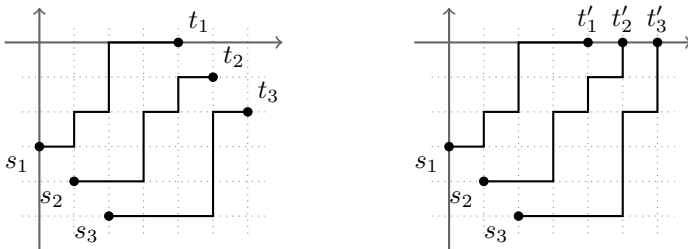
Обобщением этого лёгкого рассуждения на случай параллелепипеда высоты  $c$  является следующая лемма.

ЛЕММА 7. *Количество трёхмерных диаграмм Юнга, лежащих внутри параллелепипеда  $a \times b \times c$ , равно количеству наборов непересекающихся путей из точек  $s_i = (i-1, -b-i+1)$  в точки  $t_j = (a+j-1, -j+1)$ , где  $1 \leq i, j \leq c$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим взаимно однозначное соответствие между соответствующими множествами. Для этого разобьём трёхмерную диаграмму Юнга на горизонтальные слои. Слоёв всего получится  $c$ , каждый слой будет диаграммой Юнга, вписанной в прямоугольник  $a \times b$ . Построим по верхней диаграмме путь из  $s_1$  в  $t_1$ , по второй сверху диаграмме путь из  $s_2$  в  $t_2$  и так далее, нижней диаграмме соответствует путь из  $s_c$  в  $t_c$ .

Как легко видеть, то, что пути не пересекаются, равносильно тому, что каждый верхний слой не больше нижнего, т. е. эти слои действительно образуют трёхмерную диаграмму Юнга.  $\square$

На рисунке слева отмечены начальные и конечные вершины для случая  $a = 4, b = 3, c = 3$ .



Посчитать количество непересекающихся путей нам поможет теорема 5. Легко видеть, что данный набор входов и выходов является непереставля-

емым, и поэтому количество непересекающихся путей равно определителю матрицы  $(P(s_i \rightarrow t_j))$ . Чтобы его посчитать, удобно немного изменить конечные точки, продлив пути до оси абсцисс. А именно можно рассматривать пути, ведущие из точек  $s_i = (i - 1, -b - i + 1)$  в точки  $t'_j = (a + j - 1, 0)$ ,  $(1 \leq i, j \leq c)$ , см. рисунок справа. Ясно, что существует биекция между такими путями и путями из леммы 7.

Таким образом, количество трёхмерных диаграмм Юнга, лежащих внутри параллелепипеда  $a \times b \times c$ , равно определителю

$$\begin{aligned} \det(P(s_i \rightarrow t'_j)) &= \det\left(\binom{a+b+j-1}{b+i-1}\right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b+1}{b} & \cdots & \binom{a+b+c-1}{b} \\ \binom{a+b}{b+1} & \binom{a+b+1}{b+1} & \cdots & \binom{a+b+c-1}{b+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{a+b}{b+c-1} & \binom{a+b+1}{b+c-1} & \cdots & \binom{a+b+c-1}{b+c-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Так как  $\binom{n}{k} = \frac{n \downarrow k}{k!}$ , это есть

$$\det\left(\frac{(a+b+j-1) \downarrow b+i-1}{(b+i-1)!}\right) = \prod_{i=1}^c \frac{1}{(b+i-1)!} \cdot \det((a+b+j-1) \downarrow b+i-1).$$

Напомним, что в § 3 мы вычислили определитель Вандермонда, т. е. доказали, что

$$\det(x_j \downarrow i-1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(см. формулу (6)). Полученный у нас определитель сводится к определителю Вандермонда, если воспользоваться формулой  $x \downarrow k+l = x \downarrow k \cdot (x-k) \downarrow l$ :

$$\begin{aligned} \det((a+b+j-1) \downarrow b+i-1) &= \det((a+b+j-1) \downarrow b (a+j-1) \downarrow i-1) = \\ &= \prod_{j=1}^c \frac{(a+b+j-1)!}{(a+j-1)!} \cdot \det((a+j-1) \downarrow i-1) = \\ &= \prod_{j=1}^c \frac{(a+b+j-1)!}{(a+j-1)!} \cdot (-1)^{\frac{c(c-1)}{2}} \Delta(a, a+1, \dots, a+c-1). \end{aligned}$$

Мы получили явное выражение в виде произведения для количества трёхмерных диаграмм Юнга внутри коробки  $a \times b \times c$ . Осталось преобразовать его к виду (8).

УПРАЖНЕНИЕ 6. Завершите доказательство формулы Макмагона.

Интересно, что хотя и задача, и итоговая формула симметричны по  $a$ ,  $b$  и  $c$ , в доказательстве эта симметрия нарушается: высота играет выделенную роль.

### § 6. ПОЛУСТАНДАРТНЫЕ ТАБЛИЦЫ И ТАБЛИЦЫ ГЕЛЬФАНДА — ЦЕТЛИНА

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.** *Полустандартной таблицей* формы  $\lambda$  называется заполнение клеток диаграммы Юнга  $\lambda$  числами от 1 до  $n$ , такое что числа в каждом столбце возрастают, а в каждой строке — не убывают.

Количество заполнений, конечно, зависит от  $n$ . Очевидно, что если  $n$  меньше, чем количество строк, то число полустандартных таблиц равно нулю. Для примера внизу приведены 3 полустандартные таблицы формы  $(4, 3, 1)$ , заполненные числами от 1 до 5 (отметим, что не обязательно использовать все числа):

1	2	2	3
2	3	5	
4			

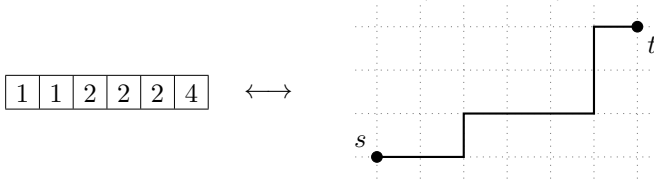
1	2	3	3
2	3	4	
4			

2	2	2	3
4	4	5	
5			

А всего таких таблиц 1050.

В этом параграфе мы найдём явную формулу для количества полустандартных таблиц. И сделаем это при помощи метода отражений.

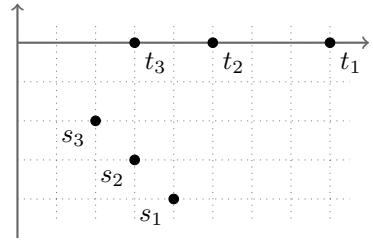
Сначала посмотрим на первую строку. Там стоит (записанный в неубывающем порядке) произвольный набор из  $\lambda_1$  чисел от 1 до  $n$ . Геометрически такие наборы соответствуют путям на квадратной решётке, делающим  $n - 1$  шагов вверх и  $\lambda_1$  вправо: количество единиц соответствует числу горизонтальных ходов на высоте 1, количество двоек — числу горизонтальных ходов на высоте 2 и т. д. Всего существует  $\binom{\lambda_1 + n - 1}{n - 1}$  таких наборов.



Во второй строке стоит набор из  $\lambda_2$  чисел от 2 до  $n$ . Количество таких наборов равно количеству путей, делающих  $n - 2$  ходов вверх и  $\lambda_2$  вправо. Но на числа во второй строке наложено условие: каждое из них должно быть больше стоящего над ним числа из первой строки. Оказывается (при правильном выборе начальных точек), это условие эквивалентно тому, что соответствующие пути не пересекаются.

УПРАЖНЕНИЕ 7. Докажите, что количество полустандартных таблиц формы  $\lambda$  равно количеству непересекающихся путей из точек  $s_i = (n - i, i - n)$  в точки  $t_j = (l_j, 0)$ , где  $l_j = \lambda_j + n - j$ .

На рисунке отмечены начальные и конечные вершины для случая  $\lambda = (4, 3, 1)$ ,  $n = 5$ . Количество вершин равно  $k$  — количеству строк диаграммы.

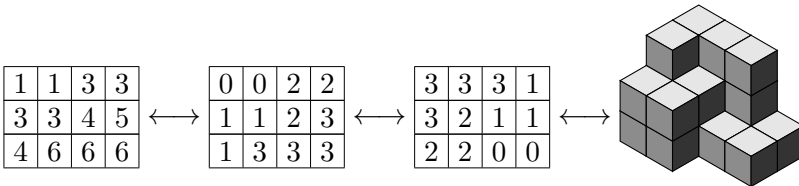


Таким образом, количество полустандартных таблиц равно определителю, в котором на месте  $(i, j)$  стоит  $P(s_i \rightarrow t_j) = \binom{l_j}{n - i}$ . Этот определитель сводится к определителю Вандермонда, как в предыдущем параграфе. Удобно считать, что в диаграмме всего  $n$  строк, последние  $n - k$  из которых пустые. На языке путей это означает, что мы добавляем новые  $n - k$  начал и концов  $s_i = (n - i, i - n)$ ,  $t_i = (n - i, 0)$ , где  $k < i \leq n$ . Количество непересекающихся путей от этого не меняется.

УПРАЖНЕНИЕ 8. Докажите, что количество полустандартных таблиц формы  $\lambda$  может быть найдено по формуле

$$\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (l_i - l_j)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)}. \tag{9}$$

Аналогия с рассуждениями в предыдущем параграфе не случайна. Есть простая биекция между полустандартными таблицами прямоугольной формы  $a \times b$ , заполненными числами от 1 до  $n$ , и трёхмерными диаграммами Юнга внутри параллелепипеда  $a \times b \times (n - b)$ : нужно просто вычестить из всех чисел в  $i$ -й строке по  $i$  — получится (перевёрнутое) плоское разбиение.



Материал этого параграфа связан с теорией представлений группы  $GL_n(\mathbb{C})$ . Конечномерные неприводимые представления этой группы параметризуются наборами из  $n$  целых чисел  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  (старший вес). В этом представлении существует базис, занумерованный полустандартными таблицами формы  $\lambda$ . Формула (9) для количества полустандартных таблиц совпадает с формулой Вейля для размерности неприводимого представления.

Приведём в виде упражнения другой способ описывать такую комбинаторику.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Треугольная таблица из  $n(n + 1)/2$  целых чисел, в которой каждое число не меньше левого верхнего и не больше правого верхнего соседа, называется *таблицей Гельфанда — Цетлина*.

$$\begin{array}{cccccc}
 a_1 & & a_2 & & \dots & & a_{n-1} & & a_n \\
 & a_{12} & & a_{23} & & \dots & & a_{n-1n} & \\
 & & \dots & & \dots & & \dots & & \\
 & & & a_{1n-1} & & a_{2n} & & & \\
 & & & & a_{1n} & & & & 
 \end{array}$$

Можно задаться вопросом, сколько существует таблиц Гельфанда — Цетлина с первой строкой  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . По такой строке можно построить диаграмму Юнга, в которой  $\lambda_i = a_{n+1-i}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 9. Количество таблиц Гельфанда — Цетлина с верхней строкой  $a$  совпадает с количеством полустандартных таблиц формы  $\lambda$ , заполненных числами от 1 до  $n$ .

### § 7. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

В предыдущей части статьи мы решали несколько задач перечислительной комбинаторики: считали количества элементов в разных множествах. Часто эти множества могут быть разбиты на части, и естественно считать количества элементов в частях. Наиболее простой пример такой ситуации: множество всех подмножеств  $n$ -элементного множества разбивается на части, состоящие из  $k$ -элементных подмножеств.

В этом параграфе мы будем рассматривать пример такого разбиения: будем считать количество трёхмерных диаграмм Юнга с данным числом кубиков.

Ответ удобно искать в виде производящей функции. Никаких знаний про производящие функции мы использовать не будем, но читатель, впервые встретившийся с этим понятием, может посмотреть [9, гл. 1].

#### 7.1. Мы хотим найти производящую функцию

$$\mathbb{Y}_{a,b,c}(q) = \sum_{Y \subset a \times b \times c} q^{|Y|},$$

где сумма берётся по всем трёхмерным диаграммам Юнга  $Y$  внутри параллелепипеда  $a \times b \times c$ , через  $|Y|$  обозначено число кубиков в диаграмме  $Y$ . Другими словами, мы считаем количество трёхмерных диаграмм  $Y$  с весом  $q^{|Y|}$ .

Естественно начать с двумерной задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Производящая функция диаграмм Юнга внутри прямоугольника  $a \times b$  называется  $q$ -биномиальным коэффициентом и обозначается

$$\begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix}_q := \sum_{Y \subset a \times b} q^{|Y|}$$

(через  $|Y|$  обозначено число клеток диаграммы  $Y$ ). Иногда  $q$ -биномиальные коэффициенты называют ещё *многочленами Гаусса*.

Значение многочлена  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  при  $q = 1$  равно обычному биномиальному коэффициенту  $\binom{n}{k}$ , поэтому  $q$ -биномиальные коэффициенты можно рассматривать как обобщение обычных биномиальных коэффициентов. Нам будет нужно  $q$ -обобщение рекуррентного уравнения:

УПРАЖНЕНИЕ 10. Докажите, что

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q.$$

Здесь интересно, что у равенства  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  есть два разных  $q$ -обобщения (совпадающих при  $q = 1$ ). Из этих уравнений следует, что

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{1 - q^{n-k}}{1 - q^k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q.$$

Пользуясь последним соотношением, уже можно найти явную формулу для  $q$ -биномиальных коэффициентов. Из определения следует, что

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q^k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q = \frac{(1 - q^{n-k+1}) \cdot \dots \cdot (1 - q^{n-1})}{(1 - q^k) \cdot \dots \cdot (1 - q^2)} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = \\ &= \frac{(1 - q^{n-k+1}) \cdot \dots \cdot (1 - q^n)}{(1 - q^k) \cdot \dots \cdot (1 - q)}. \end{aligned} \quad (10)$$

На это можно смотреть как на часть некоторой игры в « $q$ -деформацию». Для натурального числа  $n$  естественно положить

$$[n]_q = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Далее можно положить  $[n]! = [1] \cdot [2] \cdot \dots \cdot [n]$  (индексы  $q$  здесь и далее обычно опускаются). Тогда доказанная выше формула для  $q$ -биномиальных коэффициентов может быть переписана в обычном виде:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n] \cdot [n-1] \cdot \dots \cdot [n-k+1]}{[k]!} = \frac{[n]!}{[k]! [n-k]!}.$$

Возникающие функции имеют отнюдь не только комбинаторный смысл. Иллюстрацией этого служат следующие два упражнения.

УПРАЖНЕНИЕ 11 ( $q$ -бином Ньютона). а) Докажите, что

$$(1+x)(1+xq) \cdot \dots \cdot (1+xq^{n-1}) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k.$$

б) Пусть переменные  $x, y$  не коммутируют, но удовлетворяют соотношению  $yx = qxy$ . Докажите, что

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 12. Пусть  $q$  — простое число (или степень простого числа). Докажите, что  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  равно числу  $k$ -мерных подпространств  $n$ -мерного векторного пространства над полем из  $q$  элементов.

Напомним, что грассманианом  $\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{F})$  называется многообразие, точками которого являются  $k$ -мерные подпространств  $n$ -мерного пространства над полем  $\mathbb{F}$ . Предыдущее упражнение означает, что количество точек  $\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{F}_q)$  равно  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ . Можно также показать, что  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{-1}$  равно эйлеровой характеристике  $\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{R})$ , а  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1$  равно эйлеровой характеристике  $\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{C})$ .

Интересные комбинаторные следствия упражнения 11 обсуждаются в брошюре [5]. Более подробно про  $q$ -аналоги («квантовые аналоги»), в частности хорошее решение упражнения 12, можно прочитать в статье [4].

7.2. Перейдём теперь к трёхмерным диаграммам Юнга. Мы хотим найти производящую функцию  $\mathbb{Y}_{a,b,c}(q)$  трёхмерных диаграмм Юнга внутри коробки  $a \times b \times c$ . Понятно, что если  $c = 1$ , то

$$\mathbb{Y}_{a,b,1}(q) = \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix}_q.$$

Рассмотрим следующий случай  $c = 2$ .

Аналогично доказательству леммы 7 разобьём трёхмерную диаграмму на слои, по верхнему слою построим путь из  $s_1 = (0, -b)$  в  $t_1 = (a, 0)$ , по нижнему — путь из  $s_2 = (1, -b-1)$  в  $t_1 = (a+1, 1)$ . Количество кубиков в трёхмерной диаграмме Юнга равно сумме количеств клеток в слоях, поэтому  $\mathbb{Y}(a, b, 2)$  равно  $\begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix}_q \cdot \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix}_q$  минус вклад от пересекающихся путей.

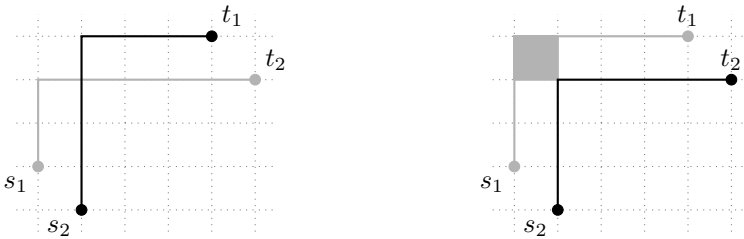
Производящую функцию для пересекающихся путей можно посчитать по методу отражения: отразить относительно первого пересечения и получить пару путей из  $s_1, s_2$  в  $t_2, t_1$ . Таким образом, получаем:

$$\mathbb{Y}(a, b, 2) \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix}.$$

К сожалению, эта формула неверна. Даже для простейшего случая коробки  $1 \times 1 \times 2$  она даёт

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = (1 + q)^2 - 1,$$

а должно получаться  $1 + q + q^2$ . Так как при  $q = 1$  всё сходится, причина должна быть в том, что пути считаются с весами. Действительно, легко видеть, что при отражении меняется вес пути. Это достаточно проверить для путей с наименьшим весом, а как видно из рисунка, для них при отражении вес меняется на 1.



Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}(a, b, 2) &= \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} - q \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{[a+b]!^2}{[a]![a+1]![b]![b+1]!} ([a+1][b+1] - q[a][b]) = \frac{[a+b]![a+b+1]!}{[a]![a+1]![b]![b+1]!}. \end{aligned}$$

Для большей высоты можно попробовать рассуждать аналогично и правильно учесть изменение веса при отражении. Один из способов это сделать описан в книге [11].

Мы поступим несколько по-другому. Как и в § 5, *удлиним пути*: будем рассматривать пути из точек  $s_i = (i - 1, -b - i + 1)$  в точки  $t'_j = (a + j - 1, 0)$ ,  $1 \leq i, j \leq c$ . Такое удлинение меняет вес, к каждой диаграмме Юнга добавляется несколько строчек длины  $a$ . Весь вес меняется на

$$q^{a(1+2+\dots+(c-1))} = q^{a \frac{c(c-1)}{2}}.$$

Но зато теперь отражения не меняют вес! Значит, справедлива

**ТЕОРЕМА 7.** *Производящая функция для трёхмерных диаграмм Юнга имеет вид*

$$\mathbb{Y}_{a,b,c}(q) = q^{-a \frac{c(c-1)}{2}} \det \left( \begin{bmatrix} a+b+j-1 \\ b+i-1 \end{bmatrix} \right)_q.$$

**УПРАЖНЕНИЕ 13.** Докажите формулу Макмагона:

$$\mathbb{Y}_{a,b,c}(q) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}}.$$

УКАЗАНИЕ. Можно рассуждать как в § 5. После вынесения общих множителей и сложений строк определитель сведётся к определителю Вандермонда для чисел  $[a]_q, [a+1]_q, \dots, [a+c-1]_q$  или, эквивалентно, для чисел  $q^{a+1}, q^{a+2}, \dots, q^{a+c}$ .

Можно вернуться назад, к неудлиненным путям. Нетрудно понять, что матрица  $(P(s_i \rightarrow t'_j))$  получается из матрицы  $(P(s_i \rightarrow t_j))$  элементарными преобразованиями столбцов. Можно провести обратные преобразования, используя рекуррентные соотношения из упражнения 10. Например, для матриц  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ :

$$\begin{aligned}
 & q^{-a} \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b+1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \\
 & = q^{-a} \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & q^{a+1} \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^a \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} \end{pmatrix} = q^1 \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^{-1} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \\
 & q^{-3a} \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+2 \\ b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b+1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+2 \\ b+1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b+2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b+2 \\ b+2 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \\
 & = q^{-3a} \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & q^{a+1} \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} & q^{a+2} \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b-1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^a \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & q^{a+1} \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+2 \end{bmatrix} & q^{a-1} \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^a \begin{bmatrix} a+b+1 \\ b+1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \\
 & = q^{-3a} \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & q^{a+1} \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} & q^{2a+4} \begin{bmatrix} a+b \\ b-2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^a \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & q^{2a+2} \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+2 \end{bmatrix} & q^{a-1} \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^{2a} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \\
 & = q^5 \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+b \\ b-2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^{-1} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} & q^{-2} \begin{bmatrix} a+b \\ b-1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a+b \\ b+2 \end{bmatrix} & q^{-2} \begin{bmatrix} a+b \\ b+1 \end{bmatrix} & q^{-4} \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Рассуждая таким образом для произвольного  $c$ , можно получить, что

$$\mathbb{Y}_{a,b,c}(q) = q^{\sum_{k=0}^{c-1} k^2} \det\left(q^{-(i-1)(j-1)} \begin{bmatrix} a+b \\ b+i-j \end{bmatrix}_q\right). \quad (11)$$

7.3. Мы уже видели, что производящая функция для диаграмм Юнга внутри прямоугольника  $a \times b$  равна  $\begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix}_q$ , т. е. коэффициент при  $q^n$  равен количеству диаграмм из  $n$  клеток внутри прямоугольника. Если теперь  $a$  и  $b$  становятся очень большими, то коэффициент при  $q^n$  становится равным количеству всех диаграмм Юнга из  $n$  клеток. Используя формулу (10) для  $\begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix}_q$ , легко доказать, что

$$\lim_{a,b \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix}_q = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^i}.$$

Последнюю формулу можно доказать и сразу комбинаторно (см., например, [9, теорема 1.1]). Удобно обозначить знаменатель через

$$(q)_{\infty} = \prod_{i=1}^{\infty} (1-q^i).$$

ТЕОРЕМА 8 (Макмагон). а) *Производящая функция трёхмерных диаграмм Юнга высоты не более  $h$  имеет вид*

$$\mathbb{Y}_h(q) = \prod_{i=1}^{h-1} (1-q^i)^{-i} \prod_{i=h}^{\infty} (1-q^i)^{-h}.$$

б) *Производящая функция для всех трёхмерных диаграмм Юнга имеет вид*

$$\mathbb{Y}(q) = \prod_{i=1}^{\infty} (1-q^i)^{-i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмём  $c=h$  и перейдём к пределу  $a, b \rightarrow \infty$  в формуле (11). Левая часть стремится к  $\mathbb{Y}_h(q)$ . С другой стороны, по показанному выше все  $q$ -биномиальные коэффициенты в правой части стремятся к  $1/(q)_{\infty}$ . Получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}_h(q) &= \frac{q^{\sum_{k=0}^{h-1} k^2}}{(q)_h^h} \det(q^{-(i-1)(j-1)}) = \frac{q^{\sum_{k=0}^{h-1} k^2}}{(q)_h^h} \Delta(1, q^{-1}, \dots, q^{-h+1}) = \\ &= \prod_{i=1}^{h-1} (1-q^i)^{-i} \prod_{i=h}^{\infty} (1-q^i)^{-h}. \end{aligned}$$

Пункт б) получается из пункта а) в пределе  $h \rightarrow \infty$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 14. Выведите теорему 8 из результата упражнения 13.

Отметим, что для диаграмм Юнга высших размерностей (4 и больше) аналогичные формулы для производящих функций не известны (см., например, [9, гл. 11]).

### § 8. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

УПРАЖНЕНИЕ 15 (теорема Бертрана о выборах). а) Докажите, что вероятность того, что на выборах с участием двух кандидатов, в которых первый набрал  $a$  голосов, а второй набрал  $b < a$ , первый будет опережать второго в течение всего времени подсчёта голосов равна  $\frac{a-b}{a+b}$ .

б) Докажите обобщение для случая, когда кандидатов  $k$  и они набрали  $a_1 > a_2 > \dots > a_k$  голосов соответственно.

УПРАЖНЕНИЕ 16 (косые диаграммы Юнга). Пусть диаграмма Юнга  $\mu$  лежит внутри диаграммы  $\lambda$ . Тогда разность  $\lambda \setminus \mu$  называется *косой диаграммой Юнга*. Найдите формулу для количества стандартных таблиц формы  $\lambda \setminus \mu$ . Ответ удобно переписать в виде определителя аналогично (5).

УПРАЖНЕНИЕ 17 (диаграммы внутри данной). Число диаграмм Юнга, лежащих внутри прямоугольника  $m \times n$ , равно  $\binom{m+n}{m}$ . Найдите число диаграмм Юнга, лежащих внутри произвольной диаграммы Юнга  $\lambda$ .

УКАЗАНИЕ. Установите взаимно однозначное соответствие между поддиаграммами и непересекающимися путями от точек  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $\dots$ ,  $(0, k-1)$  до точек  $(1, l_1)$ ,  $(2, l_2)$ ,  $\dots$ ,  $(k, l_k)$ , где  $l_i = \lambda_i + i - 1$ .

УПРАЖНЕНИЕ 18 (пути в полоске). Рассмотрим пути в полосе  $0 \leq y \leq d$ , состоящие из сдвигов либо на вектор  $(1, 1)$ , либо на вектор  $(1, -1)$ . Докажите, что число путей из точки  $(0, i)$  в точку  $(n, j)$ , где  $0 \leq i, j \leq d$ ,  $n + j - i$  чётно, имеет вид

$$\sum_{k \equiv \frac{n+j-i}{2}} \binom{n}{k} - \sum_{k \equiv \frac{n-i-j-2}{2}} \binom{n}{k}, \quad (12)$$

где сравнения берутся по модулю  $d + 2$ .

**Комментарий.** Если  $d = 0$ , то ясно, что путей нет. Если  $d = 1$ , то путь один. При больших  $d$  ответ не столь тривиален. Например, при  $d = 2$  получаются степени двойки, а при  $d = 3$  получаются числа Фибоначчи.

Таким образом, при  $d = 0$  выражение (12) для нулевого числа путей соответствует известному факту

$$\sum_{k \equiv 0 \pmod{2}} \binom{n}{k} = \sum_{k \equiv 1 \pmod{2}} \binom{n}{k}.$$

А при  $d = 1$  мы получаем, что три суммы

$$s_i = \sum_{k \equiv i \pmod{3}} \binom{n}{k}$$

попарно отличаются не более чем на 1 и, значит, равны  $2^n/3$ , округлённому в какую-то сторону.

УПРАЖНЕНИЕ 19 (формула крюков для полустандартных таблиц). Докажите, что количество полустандартных таблиц формы  $\lambda$  может быть найдено по формуле

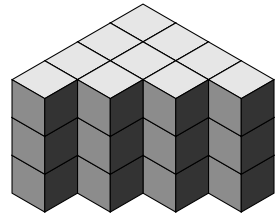
$$\prod_{s \in \lambda} \frac{n + i - j}{h(s)},$$

где  $i, j$  — координаты клетки  $s$ , а  $h(s)$  — длина крюка клетки.

УПРАЖНЕНИЕ 20 ( $q$ -аналог упражнения 8). Весом полустандартной таблицы назовём сумму чисел в ней. Найдите формулу для производящей функции всех полустандартных таблиц формы  $\lambda$ , заполненных числами от 1 до  $n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 21 (числа Каталана — Ганкеля). а) Обозначим через  $C_n^{(h)}$  определитель матрицы  $h \times h$

$$\begin{pmatrix} C_n & C_{n+1} & \dots & C_{n+h-1} \\ C_{n+1} & C_{n+2} & \dots & C_{n+h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n+h-1} & C_{n+h} & \dots & C_{n+2h-2} \end{pmatrix},$$



где  $C_k$  — числа Каталана. Докажите, что  $C_n^{(h)}$  равно количеству трёхмерных диаграмм Юнга внутри призмы высоты  $h$ , основание которой — диаграмма  $(n - 1, \dots, 2, 1)$ .

б) Докажите, что  $C_n^{(h)} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n-1} \frac{i+j+2h}{i+j}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вимберг Э. Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.
- [2] Доценко В. В. Числа Каталана и естественные отображения. Летние конференции Турнира городов. Избранные материалы. Вып. 1. М.: МЦНМО, 2009. С. 139–165. [http://www.maths.tcd.ie/~vdots/research/files/Catalan\\_Numbers.pdf](http://www.maths.tcd.ie/~vdots/research/files/Catalan_Numbers.pdf).
- [3] Зелевинский А. В. Резольвенты, дуальные пары и формулы для характеров // Функт. анализ и его прил. 1987. Т. 21, № 2. С. 74–75.

- [4] *Игнатъев М. В.* Квантовая комбинаторика // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 18. М.: МЦНМО, 2014. С. 66–111.
- [5] *Смирнов Е. Ю.* Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакопередающиеся матрицы. М.: МЦНМО, 2014.
- [6] *Спивак А. В.* Формула крюков // Квант. 2009. № 3. С. 44–47.
- [7] *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 2009. Фрагмент о числах Каталана доступен по ссылке <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catalan.pdf>.
- [8] *Фултон У.* Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии. М.: МЦНМО, 2006.
- [9] *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М.: Наука, 1982.
- [10] *André D.* Solution directe du problème résolu par M. Bertrand // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. 1887. V. 105. P. 436–437.
- [11] *Bressoud D. M.* Proofs and confirmations. The story of the alternating sign matrix conjecture // Math. Assoc. America and Cambridge University Press, 1999.
- [12] *Frame J. S., Robinson G. de B., Thrall R. M.* The hook graphs of the symmetric group // Canadian J. Math. 1954. V. 6. P. 316–324.
- [13] *Gessel I., Viennot G.* Binomial Determinants, Paths, and Hook Length Formulae // Advances in Mathematics. 1985. V. 58, № 3. 300–321.
- [14] *Karlin S., McGregor G.* Coincidence probabilities // Pacific J. Math. 1959. V. 9, № 4. P. 1141–1164.
- [15] *Lindström B.* On the vector representation of induced matroids // Bull. London Math. Soc. 1973. V. 5. P. 85–90.
- [16] *MacMahon P. A.* Combinatory analysis. 2 vols. Cambridge University Press, 1915–16.
- [17] *Renault M.* Lost (and Found) in Translation: André's Actual Method and Its Application to the Generalized Ballot Problem // Amer. Math. Monthly. 2008. V. 115, № 4. P. 358–363.
- [18] *Zeilberger D.* Andre's reflection proof generalized to the many-candidate ballot problem // Discrete Math. 1983. V. 44. P. 325–326.

---

М. А. Берштейн, ИТФ им. Ландау, ИППИ им. Харкевича, НМУ  
 mbersht@gmail.com

Г. А. Мерзон, МЦНМО  
 merzon@mcsme.ru