4. *Фокичева В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые биллиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела // Докл. РАН. 2015. **465**, № 2. 150–153.
5. *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические биллиарды // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. **83**, № 5. 3–43.
6. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
7. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 1999.
8. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. **52**, № 2. 378–407.
9. *Фоменко А.Т.* Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи матем. наук. 1989. **44** (**265**), № 5. 145–173.
10. *Ведюшкина В.В., Кибкало В.А., Фоменко А.Т.* Топологическое моделирование интегрируемых систем биллиардами: реализация числовых инвариантов // Докл. РАН. 2020. **493**, № 1. 9–12.
11. *Ведюшкина В.В., Кибкало В.А.* Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2020. № 4. 22–28.
12. *Ведюшкина В.В.* Интегрируемые биллиарды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе // Матем. сб. 2020. **211**, № 1. 46–73.
13. *Fomenko A.T., Vedyushkina V.V.* Implementation of integrable systems by topological, geodesic billiards with potential and magnetic field // Russ. J. Math. Phys. 2019. **26**, N 3. 320–333.
14. *Ведюшкина В.В., Харчёва И.С.* Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. **209**, № 12. 17–56.
15. *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т., Харчёва И.С.* Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими биллиардами // Докл. РАН. 2018. **479**, № 6. 607–610.

Поступила в редакцию
26.09.2019

УДК 517.518.126

О ВЛИЯНИИ ВЫБОРА КЛАССА МАСШТАБНЫХ ФУНКЦИЙ НА СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА ХЕНСТОКА–КУРЦВЕЙЛЯ

С. Н. Копылов[1]

Рассматриваются свойства интеграла Хенстока–Курцвейля при наложении ограничений на масштабную функцию. Представлено доказательство утверждения о связи классов интегрируемых функций и классов масштабных функций в ряде частных случаев.

Ключевые слова: теория функций, теория интегрирования, интеграл Хенстока–Курцвейля.

Properties of the Henstock–Kurzweil integral are considered with a gauge under imposed restrictions. A proof of the assertion on interrelations between classes of integrable functions and classes of gauges is presented for several particular cases.

Key words: real analysis, theory of integration, gauge integral.

Одним из обобщений интеграла Лебега на отрезке является интеграл Хенстока–Курцвейля. Его конструкция схожа с конструкцией интеграла Римана, однако в определении используются понятия масштабной функции и δ-разбиения (см. [1, ч. 1, гл. 2, § 1]). Необходимое и достаточное условие интегрируемости в смысле Хенстока–Курцвейля (см. [1, ч. 2, гл. 8, § 2]) определяет класс интегрируемых функций.

---

[1] *Копылов Сергей Николаевич* — асп. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ksergei16@yandex.ru.

Kopylov Sergei Nikolaevich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

В работе [2] поставлен вопрос о том, сохранит ли интеграл свои свойства, если ограничиться только лишь измеримыми масштабными функциями. В [3] на этот вопрос дается положительный ответ.

В работе [4] показано, что можно ограничиться масштабными функциями, которые являются полунепрерывными сверху при сужении на множество с дополнением нулевой меры. В [5] этот результат обобщается на случай интегрирования в $\mathbb{R}^n$.

В настоящей работе исследуются свойства интеграла Хенстока–Курцвейля при некоторых ограничениях на класс масштабных функций.

Определение 1. Пусть $[a,b]$ — отрезок, а $\delta(x)$ — положительная функция, определенная на нем. Система $\tau = \{(\xi_i, \Delta_i)\}_{i=1}^n$ называется *δ-разбиением Хенстока*, если выполняются следующие условия:

1) $\xi_i \in \Delta_i \subset \big(\xi_i - \delta(\xi_i),\ \xi_i + \delta(\xi_i)\big)$ для всех $i = 1, \ldots, n$;

2) $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ — система неперекрывающихся отрезков;

3) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i = [a,b]$.

Существование такого разбиения немедленно следует из леммы Гейне–Бореля о конечном покрытии. Функцию $\delta(x)$ обычно называют масштабом.

Определение 2 (*интеграл Хенстока–Курцвейля*). Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$, интегрируема на нем в смысле Хенстока–Курцвейля со значением I, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой масштаб $\delta(x) > 0$, что для любого δ-разбиения $\tau = \{(\xi_i, \Delta_i)\}_{i=1}^n$ выполняется следующее неравенство:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|\Delta_i| - I \right| < \varepsilon,$$

интеграл I записывается в виде $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и интегрируема на нем в смысле Хенстока–Курцвейля: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I$. Определим семейство $\mathcal{D}(f,[a,b],\varepsilon)$, соответствующее данной функции f, отрезку $[a,b]$ и положительному числу ε, как набор всех таких масштабных функций $\delta(x)$, определенных на $[a,b]$, что для любого δ-разбиения $\tau = \{(\xi_k, \Delta_k)\}_{k=1}^n$ отрезка $[a,b]$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k| - \int_a^b f\,dx \right| < \varepsilon.$$

Лемма. *Если функция f является интегрируемой в смысле Хенстока–Курцвейля на отрезке $[a,b]$, то*

$$\sup_{c,d\in[a,b]} \left| \int_c^d f\,dx \right| < \infty. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть F — неопределенный интеграл функции f. Допустим, что неравенство (1) не выполняется. Тогда для любого C найдется такой отрезок $[c,d]$, что

$$\left| \int_c^d f\,dx \right| = |F(d) - F(c)| > C.$$

Но в таком случае функция F не является ограниченной на отрезке $[a,b]$, а значит, не является непрерывной. Однако неопределенный интеграл Хенстока–Курцвейля есть непрерывная функция (см. [1, ч. 1, гл. 3, § 2]). Таким образом,

$$\sup_{c,d\in[a,b]} \left| \int_c^d f\,dx \right| < \infty.$$

Лемма доказана.

Перейдем к выводу основного результата статьи.

Теорема. *Для любого фиксированного* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *при ограничении в выборе масштабных функций* $\delta(x)$ *такими функциями, что* $\frac{1}{\delta(x)} \in L_p([a,b])$, *существует конструкция интеграла, класс интегрируемых функций которого целиком лежит в* $L_p([a,b])$.

Доказательство. Пусть $s = \sup\limits_{c,d\in[a,b]} \left|\int\limits_c^d f\ dx\right|$. По лемме эта величина конечна.

1) $1 \leqslant p < \infty$. Пусть функция $f(x) \notin L_p([a,b])$ и интегрируема в смысле Хенстока–Курцвейля. Из интегрируемости следует, что функция f измерима (см. [6, гл. 8, § 8.8]). Допустим, существует такое $\varepsilon > 0$, что $\mathcal{D}(f,[a,b],\varepsilon)$ содержит функцию $\delta(x)$, такую, что $\frac{1}{\delta(x)} \in L_p([a,b])$. Без ограничения общности считаем, что $\delta(x) \leqslant b-a$ на $[a,b]$.

Так как $f(x)$ не принадлежит $L_p([a,b])$, то не существует такого C, что для любого $x \in [a,b]$

$$|f(x)| < C\frac{1}{\delta(x)},$$

поскольку иначе для любого $x \in [a,b]$

$$|f(x)|^p < C^p\left|\frac{1}{\delta(x)}\right|^p$$

и тогда $f(x)$ лежала бы в $L_p([a,b])$ как измеримая функция, ограниченная по модулю функцией из $L_p([a,b])$. Поэтому найдется такая точка x_0, что

$$|f(x_0)| > 2(s+\varepsilon)\left|\frac{1}{\delta(x_0)}\right|.$$

То есть

$$|f(x_0)|\frac{\delta(x_0)}{2} > s+\varepsilon.$$

Возьмем δ-разбиение τ, такое, что в него будет входить точка x_0 с соответствующим ей отрезком разбиения Δ_0 длины $\frac{\delta(x_0)}{2}$. Такой отрезок поместится в пересечении интервала $\big(x_0-\delta(x_0), x_0+\delta(x_0)\big)$ и отрезка $[a,b]$. Действительно,

$$\mu\Big([a,b]\cap\big(x_0-\delta(x_0), x_0+\delta(x_0)\big)\Big) = \min\big(x_0-a, \delta(x_0)\big) + \min\big(b-x_0, \delta(x_0)\big) =$$

$$= \min\big(b-a, x_0-a+\delta(x_0), b-x_0+\delta(x_0), 2\delta(x_0)\big) \geqslant \min\big(b-a, \delta(x_0)\big) \geqslant \delta(x_0).$$

Учитывая это, можем написать

$$\left|f(x_0)|\Delta_0| - \int\limits_{\Delta_0} f\ dx\right| \geqslant \left|f(x_0)|\Delta_0|\right| - \left|\int\limits_{\Delta_0} f\ dx\right| > s+\varepsilon-s = \varepsilon.$$

Но по лемме Сакса–Хенстока (см. [1, ч. 1, гл. 3, § 2]) имеем

$$\left|f(x_0)|\Delta_0| - \int\limits_{\Delta_0} f\ dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\frac{1}{\delta(x)}$ не лежит в $L_p([a,b])$. Таким образом, $\mathcal{D}(f(x),[a,b],\varepsilon)$ не содержит такой функции $\delta(x)$, что $\frac{1}{\delta(x)}$ лежит в $L_p([a,b])$, если $f(x)$ не лежит в $L_p([a,b])$ ($1 \leqslant p < \infty$).

2) $p = \infty$. Предположим, что существует $\varepsilon > 0$, такое, что $\mathcal{D}(f(x),[a,b],\varepsilon)$ содержит $\delta(x)$ при $\frac{1}{\delta(x)} \in L_\infty([a,b])$. Без ограничения общности считаем, что $\delta(x) \leqslant b-a$ на $[a,b]$. Пусть

$$r = \operatorname*{ess\,sup}_{[a,b]} \frac{1}{\delta(x)}.$$

Так как $f(x)$ не является ограниченной почти всюду на $[a, b]$, то для любого C всегда можно взять такую точку x_0, что $|f(x_0)| > C$, а $\frac{1}{\delta(x_0)} \leqslant r$. Тогда

$$\left|f(x_0)\right|\frac{\delta(x_0)}{2} \geqslant \frac{C}{2r}.$$

В силу произвольности C можно считать, что $\frac{C}{2r} > s + \varepsilon$. Теперь можно выбрать пару (x_0, Δ_0) с $|\Delta_0| = \frac{\delta(x_0)}{2}$. Далее доказательство полностью повторяет рассуждение из п. 1. Мы получаем неравенство

$$\left|f(x_0)|\Delta_0| - \int\limits_{\Delta_0} f\ dx\right| \geqslant \left|f(x_0)|\Delta_0|\right| - \left|\int\limits_{\Delta_0} f\ dx\right| > s + \varepsilon - s = \varepsilon,$$

которое приводит к противоречию с леммой Сакса–Хенстока. Таким образом, $\frac{1}{\delta(x)} \notin L_\infty([a, b])$.

Утверждение теоремы непосредственно следует из п. 1 доказательства при $1 \leqslant p < \infty$ и п. 2 при $p = \infty$.

Работа выполнена при оказании финансовой поддержки участникам конкурса работ, способствующих решению задач Программы развития Московского университета, в номинации "Выдающиеся научные школы Московского университета".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукашенко Т.П., Скворцов В.А., Солодов А.П.* Обобщенные интегралы. 2-е изд. М.: Книжный дом "Либроком", 2011.
2. *Bullen P.* Queries 178 // Real Analysis Exchange. 1986-87. **12**, N 2. 393.
3. *Foran J., Meinershagen S.* Some answers to a question of P. Bullen // Real Analysis Exchange. 1987–88. **13**, N 1. 265–277.
4. *Pfeffer W.F.* A note on the generalized Riemann integral // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. **103**, N 4. 1161–1166.
5. *Buczolich Z.* Nearly upper semicontinuous gauge functions in $\mathbb{R}^n$ // Real Analysis Exchange. 1987–88. **13**, N 2. 436–440.
6. *Burk F. E.* A garden of integrals. Washington: The Mathematical Association of America, 2007.

Поступила в редакцию
01.11.2019

УДК 517.982.256

ПЛОСКИЕ МНОЖЕСТВА, ЧЕБЫШЁВСКИЕ В КАКОЙ-ЛИБО НОРМЕ

К. С. Шкляев[1]

В статье описываются множества на плоскости, каждое из которых является чебышёвским в некоторой норме.

Ключевые слова: чебышёвское множество, нормированная плоскость.

We describe plane sets, each of which is Chebyshev in some norm.

Key words: Chebyshev set, normed plane.

Пусть $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ — нормированная плоскость.

[1] *Шкляев Константин Сергеевич* — асп. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ; лаб. "Многомерная аппроксимация и приложения", Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, e-mail: konstantin.shklyaev@inbox.ru.

Shklyaev Konstantin Sergeevich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis; Laboratory "Multivariate approximation and applications", Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.