Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ж. А. Балкизов, Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченной области,
Матем. моделирование и краев. задачи, 2008, часть 3, 23–28

https://www.mathnet.ru/mmkz1100

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.90
22 января 2026 г., 23:49:39

3. *Andrianov, D. L.* Difference equations and the elaboration of computer systems for monitoring and forecasting socio-economic development of the country and territories [Text] / D. L. Andrianov // Proc. of Conf. on Differential and Difference Equations and Applications. — New York: Hindawi Publishing Corporation, 2006. — P. 1231–1237.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №06–01–00744-а), Администрации Пермского края (проект №07–01–96060-р-урал-а) и ЗАО «ПРОГНОЗ»

Пермский государственный университет, г. Пермь

simonov@econ.psu.ru

УДК 517.946

Ж. А. Балкизов

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В данной работе доказывается однозначная разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченной области. Единственность решения доказывается методом от противного, а существование методом разделения переменных (методом Фурье).

В области $D = \{(x,\, y) : 0 < x < \infty,\, 0 < y < b\}$ рассматривается уравнение

$$u_{xxx} - u_{yy} + \mu\, u = 0, \tag{1}$$

которое при $\mu = 0$ рассматривалось во многих работах. Среди последних работ в данном направлении отметим работу [1], где доказана однозначная разрешимость первой краевой задачи для уравнения (1) при $\mu = 0$ в неограниченных областях.

Для уравнения (1) рассмотрим следующую задачу.

Задача А. Требуется найти регулярное в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,\, 0) = u(x,\, b) = 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

$$u(0,\, y) = \varphi(y), \qquad 0 < y < b, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,\, y) = \lim_{x\to+\infty} u_x(x,\, y) = 0, \tag{4}$$

где $\varphi(y) \in C^1[0,\, b]$, причём выполнено условие согласования $\varphi'(0) = \varphi(b) = 0$.

Теорема. *Пусть $\mu \geqslant 0$. Тогда задача A имеет единственное решение.*

Доказательство. Предположим, что задача A имеет два различных решения $u_1(x,\, y)$ и $u_2(x,\, y)$. Тогда их разность $u\,(x,\, y) = u_1\,(x,\, y) - u_2\,(x,\, y)$ будет решением соответствующей однородной задачи. Имеет место тождество

$$u(u_{xxx} - u_{yy} + \mu u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(uu_x - \frac{u_x^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(uu_y) + u_y^2 + \mu u^2. \tag{5}$$

Интегрируя тождество (5) по области $D_{\varepsilon d} = \{(x,\, y) : \varepsilon < x < d,\, 0 < y < b\}$, будем иметь равенство

$$\int\limits_0^b \left[u\,(d,\, y)\, u_{xx}\,(d,\, y) - u(\varepsilon,\, y)u_{xx}(\varepsilon,\, y) - \right.$$

$$\left. - \frac{u_x^2(d,\, y)}{2} + \frac{u_x^2(\varepsilon,\, y)}{2}\right] dy +$$

$$+ \int\limits_\varepsilon^d \left[u\,(x,\, 0)\, u_y\,(x,\, 0) - u\,(x,\, b)\; u_y\,(x,\, b)\right] dx +$$

$$+ \iint\limits_{D_{\varepsilon d}} \left[u_y^2 + \mu u^2\right] dxdy = 0. \tag{6}$$

Переходя в (6) к пределу при $\varepsilon \to 0$, $d \to +\infty$, получим, что $D_{\varepsilon d} \to D$. С учётом однородных краевых условий из (6) имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^b u_x^2\,(0,\, y)\, dy + \iint\limits_D \left[u_y^2 + \mu u^2\right] dxdy = 0.$$

Последнее равенство может иметь место только в том случае, когда $u_x(0,\, y) = 0$, $u_y(x,\, y) = 0$, $u(x,\, y) = 0$. Следовательно, справедливо равенство $u_1(x,\, y) = u_2(x,\, y)$, т. е. задача A имеет только одно решение.

Докажем теперь существование решения задачи А. Будем искать решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2)–(4) и представимое в виде произведения

$$u(x,\, y) = X(x)Y(y). \tag{7}$$

Подставляя (7) в уравнение (1) и, разделяя переменные, получим

$$\frac{X'''}{X} + \mu = \frac{Y''}{Y} = -\lambda,$$

откуда для определения искомых функций X и Y приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям вида

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad Y(y) \neq 0, \tag{8}$$

$$X''' + (\lambda + \mu)X = 0, \quad X(x) \neq 0. \tag{9}$$

Условия (2) при этом принимают вид

$$Y'(0) = Y(b) = 0. \tag{10}$$

Собственные значения задачи (8) с условиями (10) имеют вид

$$\lambda_n = \Big(\frac{\pi(2n+1)}{2b}\Big)^2, \quad n = 0,\, 1,\, \ldots,$$

а собственными функциями указанной задачи будут функции

$$Y_n(y) = C\cos\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2b}\Big)y. \tag{11}$$

Общее решение уравнения (9) при этом можно записать в виде

$$X_n(x) = C_1\exp(-k_n x) + C_2\exp\Big(\frac{k_n x}{2}\Big)\cos\Big(\frac{\sqrt{3}k_n x}{2}\Big) + \\ + C_3\exp\Big(\frac{k_n x}{2}\Big)\sin\Big(\frac{\sqrt{3}k_n x}{2}\Big),$$

где $k_n = \sqrt[3]{\lambda_n + \mu}$; C_1, C_2, C_3 — произвольные константы.

Из условий (4) следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} X(x) = \lim_{x\to+\infty} X'(x) = 0,$$

и для регулярности решения $u(x,\, y)$ необходимо положить $C_2 = C_3 = 0$. Тогда

$$X_n(x) = C_1 \exp(-k_n x). \tag{12}$$

Подставляя найденные значения функций $X_n(x)$ и $Y_n(y)$ из (12) и (11), соответственно, в формулу (7) находим частные решения уравнения (1):

$$u_n(x,\, y) = C_n \exp(-k_n x) \cos\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2b} y\Big), \quad n = 0,\, 1,\, \ldots.$$

В силу линейности и однородности уравнения (1), сумма частных решений

$$u(x,\, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n C_n \exp(-k_n x) \cos\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2b} y\Big), \tag{13}$$

где C_n — произвольные постоянные, будет являться также решением уравнения (1), и удовлетворять условиям (2). Для вычисления значений C_n воспользуемся граничным условием (3). Допустим, что функцию $\varphi(y)$ можно разложить в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0;\, b]$:

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \cos\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2b} y\Big), \quad y \in [0;\, b],$$

где

$$\varphi_0 = \frac{2}{b} \int\limits_0^b \varphi(y)\, dy,$$

$$\varphi_k = \frac{1}{b} \int\limits_0^b \varphi(y) \cos\Big(\frac{\pi(2k+1)}{2\,b} y\Big)\, dy, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots.$$

Тогда из условия (3) имеем

$$u(0,\, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2b} y\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \cos\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2b} y\Big),$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(C_n-\varphi_n)\cos\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2b}y\Big)=0 \text{ или } C_n=\varphi_n,$$

где φ_n, $(n=0,\,1,\,\dots)$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi(y)$, значения которых приведены выше.

Подставляя найденные значения коэффициентов C_n в общее решение (13), находим решение задачи А в виде

$$u(x,\,y)=\frac{1}{b}\int\limits_0^b\Bigg\{2+\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-k_nx)\cos\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2b}y\Big)\times$$
$$\times\cos\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2b}\eta\Big)\Bigg\}\varphi(\eta)\,d\eta. \quad (14)$$

Докажем теперь, что ряд (14) сходится равномерно и, что его можно дифференцировать три раза по x и два раза по y при любом $y>\overline{y}\geqslant 0$.

Действительно, справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^3u_n}{\partial x^3}\right|\leqslant|C_n|\,k_n^3\exp(-k_nx),\qquad \left|\frac{\partial^2u_n}{\partial y^2}\right|\leqslant|C_n|\,\lambda_n\exp(-k_nx). \quad (15)$$

Пусть функция $\varphi(y)$ ограничена некоторым числом M, т. е. при $y>\overline{y}\geqslant 0$ имеет место неравенство $|\varphi(y)|<M$. Тогда $|C_n|<2M$, и оценки (15) можно переписать в следующем виде:

$$\left|\frac{\partial^3u_n}{\partial x^3}\right|<2Mk_n^3\exp(-k_nx),\qquad \left|\frac{\partial^2u_n}{\partial y^2}\right|<2M\lambda_n\exp(-k_nx).$$

Равномерная сходимость рядов

$$2M\sum_{n=0}^{\infty}k_n^3\exp(-k_nx)\ \text{ и }\ 2M\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\exp(-k_nx)$$

устанавливается с помощью признака Даламбера. Полученное решение будет непрерывным. Действительно, данное утверждение вытекает из равномерной сходимости ряда (13) и того факта, что $\varphi(y)\in C^1[0,\,b]$, причём выполнено условие согласования $\varphi'(0)=$ $=\varphi(b)=0$. $\square$

1. *Апаков, Ю. П.* К решению краевых задач для уравнения $u_{xxx} - u_{yy} = 0$ в неограниченных областях [Текст] / Ю. П. Апаков // ДАН Респ. Узбек. — 2006. — № 3. — С. 17–20.

Кабардино-Балкарский государственный университет

им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик

eleev@yandex.ru

УДК 514.957; 519.633.6

В. В. Башуров, Н. А. Ваганова, М. Ю. Филимонов

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЁТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ ОТ ЗАГЛУБЛЁННОГО ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОГО ТРУБОПРОВОДА

Введение. В настоящее время методы неразрушающего контроля, основанные на реакции материалов на тепловое воздействие, а также измерении лучистой энергии, излучаемой какими-либо поверхностями, приобретают все большее значение. К задачам такого рода относятся и задачи диагностики состояния магистральных трубопроводов, в частности, определение возможных областей повреждения теплоизоляции трубопровода и трещин. Как правило, интересует целостность трубопровода, а также общая изношенность его оболочки. Также важной задачей является обнаружение утечки или несанкционированной врезки. Для такой диагностики осуществляется съёмка тепловых полей на дневной поверхности, находящейся над трубопроводом [1]. Обычно съёмка осуществляется с вертолёта с помощью тепловизора (современные тепловизоры имеют разрешимость до сотых долей градуса), позволяющего выделить на дневной поверхности неоднородности тепловых полей. Основными достоинствами теплового контроля являются высокая безопасность работы, незначительные эксплуатационные затраты, недорогое техническое обслуживание, низкие инспекционные расходы. Сравнение с идеальной моделью рассеивания тепла позволяет определить все отклонения температуры, важные для режимов эксплуатации. Таким обра-