УДК 517.95

А. П. СОЛДАТОВ

СМЕШАННО-КОНТАКТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. Постановка задачи. В открытом множестве D с кусочно-гладкой границей Γ рассмотрим эллиптическую систему второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

с действительными кусочно-постоянными в D $l \times l$-матричными коэффициентами. Под кусочно-постоянной в D функцией a понимается функция, сохраняющая постоянное значение $a(D_0)$ в каждой (связной) подобласти $D_0 \subseteq D$.

Условимся $2l \times 2l$-матрицы x представлять в 2×2-блочном виде, обозначая ее соответствующие элементы $x_{(k,r)}$, $k, r = 1, 2$. С системой (1) свяжем $2l \times 2l$-матрицу a с блочными элементами $a_{(11)} = 0$, $a_{(12)} = 1$, $a_{(2r)} = a_r$, $r = 1, 2$. Корни $\nu_1, \ldots, \nu_l, \bar{\nu}_1, \ldots, \bar{\nu}_l$ характеристического уравнения $\det(z^2 - a_2 z - a_1) = 0$, соответствующего (1), являются собственными значениями матрицы a, причем их кратности совпадают. Условие эллиптичности системы означает, что эти корни не лежат на действительной прямой. Для определенности считаем, что $\operatorname{Im} \nu_j > 0$, $j = 1, \ldots, l$. Заметим, что семейство (ν_j), как и все связанные с a величины, является кусочно-постоянным в D.

Обозначим

$$b^{-1}ab = \operatorname{diag}(J, \bar{J}), \qquad J = \nu + J_0, \tag{2}$$

жорданову нормальную форму матрицы a. Здесь $\nu = (\nu_i \delta_{ij})_1^l$, J_0 составлено из нильпотентных клеток Жордана, в пределах которых ν_i не зависят от i. В блочной форме первое равенство может быть переписано как $(b^{-1}ab)_{(kr)} = 0$, $k \neq r$, $(b^{-1}ab)_{(11)} = \overline{(b^{-1}ab)_{(22)}} = J$. Матрицу b можно подчинить дополнительному условию $\bar{b}_{(k,2)} = b_{(k1)}$, $k = 1, 2$.

Пусть действительная локально-постоянная в D $2l \times 2l$-матрица d связана с коэффициентами системы (1) соотношениями

$$d_{(12)} a_1 = d_{(21)}, \qquad d_{(12)} a_2 = d_{(22)} - d_{(11)}. \tag{3}$$

Назовем заданную в D l-вектор-функцию $v(x, y)$ d-сопряженной к решению $u(x, y)$ системы (1), если $\nabla v = d \nabla u$; здесь и ниже используются обозначения $\nabla u = ((\nabla u)_1, (\nabla u)_2)$, $(\nabla u)_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $(\nabla u)_2 = \dfrac{\partial u}{\partial y}$. Согласно [1, 2], существование такой функции $v(x, y)$ обеспечивается условием (3), при этом для некоторого решения U канонической системы

$$\frac{\partial U}{\partial y} - J \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

справедливы представления

$$(\nabla u)_k = \operatorname{Re} b_{(k1)} U', \qquad (\nabla v)_k = \operatorname{Re} (db)_{(k1)} U', \qquad k = 1, 2, \quad U' = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{5}$$

В проинтегрированном виде

$$u = \operatorname{Re} b_{(1,1)} U, \qquad v = \operatorname{Re} (db)_{(11)} U + \text{const}. \tag{6}$$

По определению кусочно-гладкая кривая $\Gamma = \partial D$ может быть представлена в виде объединения семейства (Γ_j) гладких дуг, которые по-

парно могут пересекаться лишь по своим концам. Точки τ, являющиеся концами одной или нескольких дуг Γ_j, назовем узлами Γ, множество всех узлов обозначим F. Запишем семейство (Γ_j) в виде трех семейств:

$$(\Gamma_{\mathrm{I},j})_{j=1}^{m_{\mathrm{I}}}, \qquad (\Gamma_{\mathrm{II},j})_{j=1}^{m_{\mathrm{II}}}, \quad (\Gamma_{K,j})_{j=1}^{m_K}. \tag{7}$$

Кусочно-гладкие кривые, полученные объединением дуг соответствующих семейств, обозначим Γ_{I}, Γ_{II}, Γ_K. Случай, когда одно (или два) из этих трех множеств пусто, не исключается. При этом предполагается, что D лежит по одну сторону от $\Gamma_{\mathrm{I}}\cup\Gamma_{\mathrm{II}}$ и по обе стороны от Γ_K. Дуги, составляющие $\Gamma_{\mathrm{I}}\cup\Gamma_{\mathrm{II}}$, ориентируются так, чтобы D оставалось слева, дуги кривой Γ_K ориентируются произвольно. В соответствии с этим для заданной в D функции $u(x, y)$ можно говорить о граничных значениях u^+ на $\Gamma_{\mathrm{I}}\cup\Gamma_{\mathrm{II}}$ и $u^\pm$ на Γ_K.

Пусть заданы две действительные l-вектор-функции φ на $\Gamma_{\mathrm{I}}\cup\Gamma_K$ и ψ на $\Gamma_{\mathrm{II}}\cup\Gamma_K$ из классов

$$\varphi', \psi\in H_{\mu,\lambda-1}, \qquad 0<\lambda<1; \tag{8}$$

здесь и ниже штрих означает дифференцирование по длине дуги на $\Gamma\backslash F$ (в соответствии с принятой ориентацией Γ). Относительно определения пространства $H_{\mu,\lambda}$ функций, заданных на Γ или D, см. [1].

Смешанно-контактная задача заключается в отыскании решения u системы (1) из класса $\{\nabla u\in H_{\mu,\lambda-1}(D; F)\}$, $0<\lambda<1$, по краевым условиям

$$\begin{aligned} &u^+=\varphi \quad \text{на} \quad \Gamma_{\mathrm{I}}, \qquad &&(v^+)'=\psi \quad \text{на} \quad \Gamma_{\mathrm{II}},\\ &u^+-u^-=\varphi, \qquad &&(v^+-v^-)'=\psi \quad \text{на} \quad \Gamma_K, \end{aligned} \tag{9}$$

где $v(x, y)$ — d-сопряженная к $u(x, y)$ функция.

Задачи такого типа возникают, например, в плоской теории упругости [3]. При $\Gamma_{\mathrm{II}}=\Gamma_K=\varnothing$ получаем задачу Дирихле (первую краевую задачу), а при $\Gamma_{\mathrm{I}}=\Gamma_K=\varnothing$ — задачу типа Неймана (вторую краевую задачу). При $\Gamma_{\mathrm{I}}=\Gamma_{\mathrm{II}}=\varnothing$ множество D совпадает с дополнением к Γ на всей плоскости и (9) является аналогом задачи линейного сопряжения.

Если множество D не ограничено и, следовательно, содержит некоторую окрестность бесконечно удаленной точки ∞, то ∇u дополнительно подчиняется оценке $|(\nabla u)(x, y)|\leqslant \mathrm{const}\,(x^2+y^2)^{-1}$ в этой окрестности.

Условие $\nabla u\in H_{\mu,\lambda-1}$, $0<\lambda<1$, накладывает определенные ограничения на предельные значения в узлах τ кусочно-непрерывной функции φ в правой части (9). Чтобы описать эти ограничения, рассмотрим различные возможные комбинации краевых условий (9) вблизи узлов. При достаточно малом $\varepsilon>0$ пересечение $D\cap\{z|\ |\tau-z|<\varepsilon,\ \tau\in F\}$ распадается на m связных компонент $S_1, \ldots, S_m$, которые назовем криволинейными секторами. Эти сектора имеют своими вершинами узлы, а их боковыми сторонами служат соответствующие отрезки дуг, составляющих Γ. Ясно, что понимать под раствором θ_j сектора S_j. Заметим, что

$$m=m_{\mathrm{I}}+m_{\mathrm{II}}+2m_K. \tag{10}$$

Заменяя в предыдущем определении D на $\tilde{D}=D\cup\Gamma_K$, аналогичным образом получим семейство криволинейных секторов $\tilde{S}_j$, $1\leqslant j\leqslant\tilde{m}$. Каждое $\tilde{S}_j$ составлено из некоторого числа секторов S_i с общей вершиной, последовательно примыкающих друг к другу по общим боковым сторонам. Возможны четыре типа (X), где X пробегает символы I, II, I—II и K, секторов $\tilde{S}_j$.

Пусть τ — вершина сектора $\tilde{S}_j$. Пересечение замыкания $\tilde{S}_j$ с Γ состоит из некоторого числа дуг $\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_r$ с общим концом τ. Возможны два случая: либо $\tilde{S}_j$ совпадает с кругом $\{|z-\tau|<\varepsilon\}$, либо $\tilde{S}_j$ является

сектором в обычном смысле. В первом случае $\tilde{S}_j$ отнесем к типу (K), так как на всех дугах $\tilde{\Gamma}_s$ заняты только последние два (контактных) условия (9). Во втором случае $r \geqslant 2$ и две из дуг $\tilde{\Gamma}_s$ являются боковыми сторонами $\tilde{S}_j$, пусть это будет $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_2$. На дугах $\tilde{\Gamma}_j$, $j \geqslant 3$, заняты контактные условия (9), а на каждой из дуг $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_2$ — одно из первых двух краевых условий (9). В зависимости от выбора этих условий и определяются три остальных типа (I), (II) и (I—II) сектора $\tilde{S}_j$. Для сектора $\tilde{S}_j$ типа (X) удобно записать также $j \in \{X\}$. Полученные четыре множества определяют разбиение множества номеров $\{1, \ldots, \tilde{m}\}$. Число элементов множества $\{X\}$ обозначим n_X. Легко видеть, что справедливы соотношения

$$2m_{\mathrm{I}} = 2n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{I-II}}, \qquad 2m_{\mathrm{II}} = 2n_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{I-II}}. \tag{11}$$

Условие согласования, которому должна удовлетворять правая часть φ в (9), касается секторов $\tilde{S}_j$ типа (I) или (K). В этом случае каждая из дуг $\tilde{\Gamma}_s$ содержится в области определения $\Gamma_{\mathrm{I}} \cup \Gamma_K$ функции φ. Условие согласования состоит в соотношении

$$\sum_{s=1}^{r} \pm \varphi(\tau; \tilde{\Gamma}_s) = 0, \tag{12}$$

где $\varphi(\tau, \tilde{\Gamma}_s)$ — предельное значение φ в точке τ по дуге $\tilde{\Gamma}_s$ и выбирается знак $+(-)$, если дуга $\tilde{\Gamma}_s$ выходит из τ (входит в τ) в соответствии с принятой ориентацией Γ. Для доказательства заметим, что соотношение (12) инвариантно относительно выбора ориентации на Γ. Поэтому ее можно выбрать так, чтобы все знаки в (12) были одинаковыми. Тогда это соотношение проверяется непосредственно исходя из (9).

2. Критерий нётеровости. Исследование задачи (9) основывается на результатах [4] относительно общей контактной задачи Римана. В соответствии с этим границу $\Gamma = \partial D$ подчиним принятым в [4] условиям: составляющие Γ дуги Γ_j не образуют в узлах точек возврата и принадлежат классу $H^1_{\mu_1}$, $\mu < \mu_1 < 1$ (класс гладкости дуги определяется по отношению к ее параметризации). Для удобства напомним еще некоторые построения [5].

Все дуги (7) занумеруем единым образом, взяв третье семейство $(\Gamma_{K,j})$ в двух экземплярах. Тогда, согласно (10), получим m дуг $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Выберем семейство прилегающих подобластей $D_j \subseteq D$, $j = 1, \ldots, m$, так, чтобы $D_i \cap D_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\Gamma \cap \partial D_i = \Gamma_i$. Обозначим через G разбиение множества $\{1, \ldots, m\}$ на одноэлементные $\{i\}$, $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{\mathrm{I}} \cup \Gamma_{\mathrm{II}}$, и двухэлементные $\{i, j\}$, $\Gamma_i = \Gamma_j \subseteq \Gamma_K$, подмножества. Двухэлементные подмножества упорядочим, считая, что D_i лежит слева, а D_j — справа от $\Gamma_i = \Gamma_j$. Тогда с учетом принятой ориентации $\Gamma_{\mathrm{I}} \cup \Gamma_{\mathrm{II}}$ сигнатура e определяется условиями $e_i = 1$ для $\{i\}$ и $e_i = 1$, $e_j = -1$ для $\{i, j\}$.

Боковые стороны всех секторов S_j занумеруем единым образом $\Gamma_{(1)}, \ldots, \Gamma_{(2m)}$, считая, что $\Gamma_{(2i-1)}$, $\Gamma_{(2i)}$ являются окрестностями соответственно левого и правого концов дуги Γ_i, $i = 1, \ldots, m$. Сектору S_j соответствует пара номеров $P_j = \{k, r\}$, где $\Gamma_{(k)}$, $\Gamma_{(r)}$ — боковые стороны S_j. Согласно п. 1, сектор $\tilde{S}_i$ составлен из некоторых секторов S_j, соответственно пусть $\tilde{P}_i$ означает множество, образованное парами P_j. В результате получаем разбиение $\tilde{P}$ множества $\{1, \ldots, 2m\}$, причем разбиение $P = (P_j)_1^m$ — измельчение $\tilde{P}$. Кроме того, введем разбиение $\tilde{G}$ на одно- и двухэлементные подмножества, индуцированное G. Именно элементам $\{i\}$ и $\{i, j\}$ разбиения G соответствуют элементы $\{2i-1\}$, $\{2i\}$ и $\{2i-1, 2j-1\}$, $\{2i, 2j\}$ разбиения $\tilde{G}$. Эквивалентное определение: $\tilde{G}$ составлено из элементов $\{k\}$, $\Gamma_{(k)} \subseteq \Gamma_{\mathrm{I}} \cup \Gamma_{\mathrm{II}}$ и $\{k, r\}$, $\Gamma_{(k)} = \Gamma_{(r)} \subseteq \Gamma_K$. Отсюда, в частности, видно, что $\tilde{G}$ также является измельчением $\tilde{P}$.

Исходя из кусочно-постоянных в D матриц b, d, фигурирующих в (5), (6), введем кусочно-постоянную на Γ матрицу c, имеющую порядок l на $\Gamma_{\mathrm{I}} \cup \Gamma_{\mathrm{II}}$ и $2l$ на Γ_K, полагая

$$\begin{gathered} c = b^{+}_{(11)} \text{ на } \Gamma_{\mathrm{I}}, \qquad c = (db)^{+}_{(11)} \text{ на } \Gamma_{\mathrm{II}}, \\ c_{(11)} = b^{+}_{(11)},\ c_{(21)} = (db)^{+}_{(11)},\ c_{(12)} = -\bar{b}^{-}_{(11)},\ c_{(22)} = -(\overline{db})^{-}_{(11)} \text{ на } \Gamma_K, \end{gathered} \tag{13}$$

где черта означает комплексное сопряжение. Задачу (9) отнесем к нормальному типу, если

$$\det c \neq 0 \text{ всюду на } \Gamma. \tag{14}$$

Символом c удобно также обозначать $m \times m$-матрицу $(c_{ij})_1^m$ с элементами

$$\begin{gathered} c_{ii} = c|_{\Gamma_i}, \qquad \Gamma_i \subseteq \Gamma_{\mathrm{I}} \cup \Gamma_{\mathrm{II}}, \\ c_{i_k i_r} = c_{(k,r)}|_{\Gamma_i}, \quad \Gamma_i = \Gamma_{i_k} \subseteq \Gamma_K, \\ k, r = 1, 2, \quad e_{i_1} = 1, \quad e_{i_2} = -1, \\ c_{ij} = 0 \text{ в остальных случаях.} \end{gathered} \tag{15}$$

В предположении (14) введем далее $2m \times 2m$-матрицу $\tilde{c} = (\tilde{c}_{kr})_1^{2m}$ с элементами

$$\begin{gathered} \tilde{c}_{2i-1,2j-1} = (\bar{c}^{-1} c)_{ij}, \\ \tilde{c}_{2i,2j} = (c^{-1} \bar{c})_{ij}, \\ \tilde{c}_{kr} = 0 \text{ в остальных случаях.} \end{gathered} \tag{16}$$

Очевидно, матрица c блочно-диагональна относительно разбиения G, а матрица $\tilde{c}$ — относительно разбиения $\tilde{G}$ и, значит, разбиения $\tilde{P}$.

Аналогично [4] введем $l \times l$-матрицу-функцию $v_j(\zeta)$ (с поправкой на кусочно-постоянные коэффициенты системы (1)). Именно пусть $\Gamma_{(k)}$ и $\Gamma_{(r)}$ — боковые стороны сектора S_j с вершиной τ_j. Пусть q_k и q_r — комплексные числа, геометрически представляющие собой единичные касательные векторы в точке τ_j к дугам $\Gamma_{(k)}$ и $\Gamma_{(r)}$ соответственно. Пару $P_j = \overline{k, r}$ упорядочим, считая, что поворот от q_k к q_r внутри сектора S_j осуществляется по часовой стрелке. Пусть $J(S_j)$ — значение фигурирующей в (2) кусочно-постоянной матрицы J в секторе S_j.

Обозначим $q_k(J) = \operatorname{Re} q_k + (\operatorname{Im} q_k)\ J(S_j)$, и пусть $q_r(J)$ имеет аналогичный смысл. Тогда по определению

$$v_j(\zeta) = [q_k(J) q_r^{-1}(J)]^{\zeta}, \qquad P_j = \overline{k, r}, \tag{17}$$

где степенная функция фиксируется ветвью $0 < \arg z \leqslant 2\pi$ аргумента. Остановимся на структуре матрицы-функции $v_j(\zeta)$ подробнее. В соответствии с разложением $J(S_j) = \nu + J_0$ матрицы $J(S_j)$ на диагональную и нильпотентные части имеем $q_k(J) q_r^{-1}(J) = q_k(\nu) q_r^{-1}(\nu) + J_1$, где $q_k(\nu)$ — диагональная матрица с элементами $q_k(\nu_s) = \operatorname{Re} q_k + \nu_s \operatorname{Im} q_k$, $s = 1, \ldots, l$, вдоль диагонали, а J_1 — нильпотентная треугольная матрица. Поэтому по определению функции от матриц [6]

$$v_j(\zeta) = [q_k(\nu) q_r^{-1}(\nu)]^{\zeta} p_j(\zeta). \tag{18}$$

Здесь $p_j(\zeta)$ является многочленом степени не выше $r-1$, где r — максимальный порядок входящих в J клеток Жордана, причем, как и $l \times l$-матрица, p_j треугольна и все ее элементы на главной диагонали равны 1. В частности, $\det p_j \equiv 1$ и p_j^{-1} имеет тот же вид, что и p_j. Ясно также, что p_j коммутирует с J. Обратимся к первому множителю в (18). Матрица $q_k(\nu) q_r^{-1}(\nu)$ диагональна с элементами $q_k(\nu_s) q_r^{-1}(\nu_s)$ вдоль диагонали, $s = 1, \ldots, l$. В силу принятого порядка элементов пары P_j аргумент $\arg [q_k(\nu_s) q_r^{-1}(\nu_s)]$ совпадает с раствором сектора $S_j(\nu_s)$, являющегося образом S_j при аффинном преобразовании $x + iy \to x + \nu_s y$ комплексной

плоскости. В частности, когда раствор сектора S_j равен 2π, то $q_k=q_r$ и первый множитель в (18) равен $\exp(2\pi i\zeta)$ (поскольку $0<\arg z\leqslant 2\pi$ в определении степенной функции).

Введем теперь $2m\times 2m$-матрицу $\tilde{v}=(\tilde{v}_{kr})_1^{2m}$ с элементами

$$\tilde{v}_{kr}=v_j,\quad \tilde{v}_{rk}=\bar{v}_j^{-1},\quad \overline{k,r}=P_j,$$
$$j=1,\dots,m; \tag{19}$$
$$\tilde{v}_{kr}=0 \text{ в остальных случаях.}$$

Здесь и ниже используется обозначение $\bar{x}(\zeta)=\overline{x(\bar{\zeta})}$, где черта в правой части означает комплексное сопряжение.

По определению матрица $\tilde{v}$ блочно-диагональна относительно разбиения P и, значит, относительно $\tilde{P}$.

Рассмотрим $2m\times 2m$-матрицу $\tilde{v}+\tilde{c}$, которую назовем концевым символом задачи (9). Она блочно-диагональна относительно разбиения $\tilde{P}$, и аналогично [4] введем целочисленную функцию $s_j(\zeta)$ — характеристику нулей $\det(\tilde{v}+\tilde{c})(\zeta,\tilde{P}_j)$, $j=1,\dots,\tilde{m}$.

Отметим попутно, что, согласно (16), (19), $\bar{\tilde{c}}=\tilde{c}^{-1}$, $\bar{\tilde{v}}=\tilde{v}^{-1}$, и поэтому для $x=\tilde{v}+\tilde{c}$ получаем соотношение $\bar{x}=\tilde{v}^{-1}x\tilde{c}^{-1}$. Отсюда вытекает свойство симметричности $s_j(\bar{\zeta})=s_j(\zeta)$ функции s_j, причем величина $s_j(\zeta)$ для действительных ζ четна. В следующей ниже теореме условие нормальности (14) и характеристики s_j целиком определяют характер нётеровости задачи (4). Здесь же для удобства приведем и аналогичное [4] предложение о гладкости решений задачи.

Как обычно, нётеровость и индекс задачи понимаются по отношению к оператору $R:X\to Y$, определяемому краевыми условиями (9). Здесь X — пространство всех решений u, $\nabla u\in H_{\mu,\lambda-1}$, системы (1), а Y — пространство правых частей (φ,ψ), удовлетворяющих условиям (8), (12). Относительно соответствующих норм эти пространства банаховы, а оператор R ограничен $X\to Y$.

Теорема 1. *а) Задача (9) нётерова тогда и только тогда, когда она принадлежит к нормальному типу и*

$$s_j(\zeta)=0,\quad \operatorname{Re}\zeta=\lambda(\tilde{P}_j),\quad j=1,\dots,\tilde{m}. \tag{20}$$

При условии нётеровости ее индекс $\varkappa$ дается формулой

$$\varkappa=\sum_{j=1}^{\tilde{m}}\left[\frac{l}{2}k(\tilde{P}_j)-\frac{l}{2}|\tilde{P}_j/P|-\sum_{0<\operatorname{Re}\zeta<\lambda(\tilde{P}_j)}s_j(\zeta)-\frac{1}{2\pi}\arg y_j(\zeta)\Big|_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\right], \tag{21}$$

где $|\tilde{P}_j/P|$ — число пар P_i, укладывающихся в множестве $\tilde{P}_j$, величина $k(\tilde{P}_j)$ принимает значения $1,2,0$ соответственно случаям $j\in\{\mathrm{I}\}\cup\{\mathrm{II}\}$, $j\in\{K\}$, $j\in\{\mathrm{I}-\mathrm{II}\}$ (обозначения см. п. 1), $\varepsilon>0$ достаточно мало и для краткости положено $y_j(\zeta)=\det[(\tilde{v}+\tilde{c})(\tilde{v}+1)^{-1}](\zeta,\tilde{P}_j)$.

в) Пусть для некоторого целого $r\geqslant 0$ составляющие Γ дуги принадлежат классу $H_{\mu_1}^{r+1}$. Пусть выполнено условие нормальности (14), а (8) и (20) заменены более сильными условиями $\varphi',\psi\in H_{\mu,\delta-1}^r$, $\lambda\leqslant\delta<1$, и $s_j(\zeta)=0$ при $\lambda(\tilde{P}_j)\leqslant\operatorname{Re}\zeta\leqslant\delta(\tilde{P}_j)$, $j=1,\dots,\tilde{m}$. Тогда для любого решения и задачи $\nabla u\in H_{\mu,\delta-1}^r$.

Доказательство. Выберем параметризацию $\gamma_j:[0,1]\to\Gamma_j$ дуги Γ_j (в соответствии с принятой ее ориентацией). Можно считать, что $\gamma_j\in H_{\mu_1}^1[0,1]$, $|\gamma_j'(0)|=|\gamma_j'(1)|=1$ и $\gamma_i=\gamma_j$ при $\Gamma_i=\Gamma_j\subseteq\Gamma_K$. Для заданной в D функции Φ обозначим через $(\Phi\circ\gamma_j)_1^m$ вектор граничных значений, снесенный параметризацией γ на $(0,1)$. Более точно, пусть

$\Phi\circ\gamma_j=\Phi^+\circ\gamma_j$, $\Gamma_j\subseteq\Gamma_{\rm I}\cup\Gamma_{\rm II}$ и $\Phi\circ\gamma_j=\Phi^\pm\circ\gamma_j$, $\Gamma_j\subseteq\Gamma_K$, $e_j=\pm 1$, где кружок справа означает суперпозицию функций.

Введем, далее, оператор Q, который паре (φ, ψ), фигурирующей в правой части (9), ставит в соответствие m-вектор-функцию $\tilde\varphi=(\tilde\varphi_j)_1^m$ на $(0, 1)$ по правилу

$$\begin{aligned} &\tilde\varphi_i=(\varphi\circ\gamma_i)', \qquad \Gamma_i\subseteq\Gamma_{\rm I} \text{ или } \Gamma_i\subseteq\Gamma_K,\ e_i=1,\\ &\tilde\varphi_i=|\gamma_i'|\psi\circ\gamma_i,\ \ \Gamma_i\subseteq\Gamma_{\rm II} \text{ или } \Gamma_i\subseteq\Gamma_K,\ e_i=-1. \end{aligned} \tag{22}$$

Применяя эту операцию к (9), получим краевую задачу

$$\begin{gathered} (u\circ\gamma_i)'=\tilde\varphi_i,\quad \Gamma_i\subseteq\Gamma_{\rm I};\qquad (v\circ\gamma_i)'=\tilde\varphi_i,\ \Gamma_i\subseteq\Gamma_{\rm II},\\ (u\circ\gamma_i-u\circ\gamma_j)'=\tilde\varphi_i,\quad (v\circ\gamma_i-v\circ\gamma_j)'=\tilde\varphi_j,\\ \Gamma_i=\Gamma_j\subseteq\Gamma_K,\quad e_i=1,\quad e_j=-1, \end{gathered} \tag{23}$$

которая является частным случаем общей контактной задачи Римана [4]. Единственное отличие состоит в том, что коэффициенты системы (1) кусочно-постоянны. Результаты [4] сохраняют свою силу и в этом случае, нужно только внести необходимую поправку в выражение для концевого символа, определяя v_j, как в (18). Точно так же матрицы d_{ij} в контактном условии [4] можно считать кусочно-постоянными.

В силу (13), (15), (16) в обозначениях [4], соответствующих задаче (23), следует положить $\tilde d^e=c$, $x=\tilde v+\tilde c$, $E=\tilde P$. Поэтому на основании теоремы а) из [4] заключаем, что условия (14), (20) необходимы и достаточны для нётеровости задачи (23), а ее индекс $\tilde\varkappa$ дается равенством

$$\tilde\varkappa=-\sum_{j=1}^{\tilde m}\Big[\sum_{0<\operatorname{Re}\zeta<\lambda(\tilde P_j)} s_j(\zeta)+\frac{1}{2\pi}\arg y_j(\zeta)\,\Big|_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\Big]. \tag{24}$$

По определению операторы R, $\tilde R$ задач соответственно (9), (23) связаны равенством $\tilde R=QR$. Оператор Q является нётеровым, поэтому на основании хорошо известных свойств нётеровых операторов заключаем, что задачи (9) и (24) свойством нётеровости обладают одновременно, а их индексы связаны соотношением

$$\tilde\varkappa=\varkappa+\operatorname{ind} Q. \tag{25}$$

Оператор Q действует из пространства Y пар (φ, ψ), определяемых условиями (8), (12), в пространство Z правой части (23), определяемое условиями $\tilde\varphi_i\in H_{\mu,\lambda^i-1}([0, 1]; 0, 1)$, $i=1, \dots, m$, где $\lambda^i(0)=\lambda_{2i-1}$, $\lambda^i(1)=\lambda_{2i}$. Если Q рассматривать на пространстве $\tilde Y$, которое задается только условием (8), то в этом более широком пространстве он обратим справа и его ядро состоит из пар $(\chi, 0)$, где χ — кусочно-постоянный l-вектор на $\Gamma_{\rm I}\cup\Gamma_K$. Размерность данного ядра равна $l(m_{\rm I}+m_K)$ и эта же величина есть индекс Q как оператора $\tilde Y\to Z$. Пространство Y выделяется из $\tilde Y$ условиями (12) и его коразмерность равна $l(n_{\rm I}+n_K)$, поскольку $n_{\rm I}+n_K$ есть число секторов $\tilde S_j$, фигурирующих в (12). Поэтому индекс Q как оператора $Y\to Z$ уменьшается на $l(n_{\rm I}+n_K)$:

$$\operatorname{ind} Q=l(m_{\rm I}+m_K-n_{\rm I}-n_K).$$

Согласно (11), $m_{\rm I}-m_{\rm II}=n_{\rm I}-n_{\rm II}$. Отсюда с учетом (10) имеем $2(m_{\rm I}+m_K)=m+n_{\rm I}-n_{\rm II}$ и, следовательно,

$$\operatorname{ind} Q=\frac{l}{2}(m-n_{\rm I}-n_{\rm II}-2n_K). \tag{26}$$

С другой стороны, вспоминая определение (см. п. 1) величин $n(X)$, $X=$ I, II, K, и пользуясь обозначениями (21), получим

$$m=\sum_{j=1}^{\tilde m}|\tilde P_j/P|,\qquad n_{\rm I}+n_{\rm II}+2n_K=\sum_{j=1}^{\tilde m}k(\tilde P_j). \tag{27}$$

Подставляя эти выражения в (26), с учетом (24), (25) приходим к формуле (21).

Что касается предположения b) теоремы, то оно получается применением аналогичного предположения теоремы из [4] к задаче (23). В одном частном случае последнее слагаемое в (21) вычисляется явно.

Лемма 1. *Если функция $y_j(\zeta)$ в (21) обладает свойством четности: $y_j(-\zeta)=\mathrm{const}\, y_j(\zeta)$, $\mathrm{const}\neq 0$, то*

$$\frac{1}{2\pi}\arg y_j(\zeta)\,|_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}=\frac{1}{2}\Big[\sum_{\mathrm{Re}\,\zeta=0}s_j(\zeta)-l|\tilde P_j/P|\Big], \tag{28}$$

где $\varepsilon>0$ достаточно мало.

Доказательство. Выберем $\varepsilon>0$ по условию $s_j(\zeta)=0$, $0<|\mathrm{Re}\,\zeta|\leqslant\varepsilon$, и для краткости обозначим через r^+ величину в левой части (28). Пусть r^- имеет аналогичный смысл по отношению к прямой $\mathrm{Re}\,\zeta=-\varepsilon$. В силу свойства четности функции $y_j(\zeta)$

$$r^++r^-=0. \tag{29}$$

С другой стороны, по теореме Руше

$$r^+-r^-=\sum_{\mathrm{Re}\,\zeta=0}[s_j(\zeta)-s_j^0(\zeta)], \tag{30}$$

где $s_j^0(\zeta)$ — характеристика нулей $\det(\tilde v+1)(\zeta;\tilde P_j)$. Для вычисления этой характеристики найдем сначала выражение для определителя $\det(\tilde v+1)(\zeta;S_j)$, $S_j=\overline{k,r}$. Согласно (19),

$$(\tilde v+1)(S_j)=\begin{pmatrix}1 & v_j\\ \bar v_j^{-1} & 1\end{pmatrix}.$$

Вспоминая обсуждение формулы (18), получим

$$\det(\tilde v+1)(\zeta,S_j)=\prod_{s=1}^{l}[1-\exp(2i\theta_j(\nu_s)\zeta)].$$

Поскольку в $\tilde S_j$ укладывается $|\tilde P_j/P|$ пар P_i, отсюда приходим к выводу, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ функция $s_j^0(\zeta)$ всюду равна нулю в полосе $|\mathrm{Re}\,\zeta|\leqslant\varepsilon$, за исключением точки $\zeta=0$, где $s_j^0(0)=l|\tilde P_j/P|$. В соединении с (29), (30) это завершает доказательство (28).

Применяя к задаче (23) лемму из [4], получим аналогичное предложение и для задачи (9).

Лемма 2. *Пусть $2m\times 2m$-матрицы $y=(y_{sr})_1^{2m}$ и $x(\zeta)=(x_{sr}(\zeta))_1^{2m}$ определяются следующим образом: $y_{2i-1,2j-1}=y_{2i,2j}=(\tilde c^e)_{ij}$, $i,j=1,\dots,m$, $y_{sr}=0$ в остальных случаях, $x_{sk}(\zeta)=y_{sk}v_j(\zeta)+y_{sr}$, $x_{sr}(\zeta)=\bar x_{s,k}(\zeta)$ для $k,r=P_j$, $j=1,\dots,m$, $s=1,\dots,2m$. Пусть x_0 определяется аналогично по отношению к $y=1$. Тогда в утверждениях теоремы 1 можно $\tilde v+\tilde c$ и $\tilde v+1$ заменить на соответственно x, x_0.*

Значение этой леммы состоит в том, что в отличие от (16) определение $x(\zeta)$ не требует обращения матрицы c, что существенно в конкретных вычислениях.

3. Разрешимость видоизмененной задачи. Результаты [4] включают и описание условий разрешимости задачи (23). Последняя соответствует видоизмененной задаче (9), которая получается добавлением к правой части φ кусочно-постоянной функции. Более точно, эта задача состоит в отыскании пары (u,χ), где u — решение системы (1), $\nabla u\in H_{\mu,\lambda-1}(D;F)$, $0<\lambda<1$, а χ — кусочно-постоянный на $\Gamma_{\rm I}\cup\Gamma_K$ l-вектор, по краевому условию

$$u^+ + \chi = \varphi \text{ на } \Gamma_{\mathrm{I}}, \qquad (v^+)' = \psi \text{ на } \Gamma_{\mathrm{II}},$$
$$(u^+ - u^-) + \chi = \varphi, \qquad (v^+ - v^-)' = \psi \text{ на } \Gamma_K. \tag{31}$$

Как и в [4], с этой задачей свяжем союзную однородную задачу. Пусть $D^1, \dots, D^r$ — связные компоненты множества D, n^j — число связных компонент границы ∂D^j и $n = n^1 + \dots + n^r$ — суммарный порядок связности D. Аналогично [2], где роль n играет d, введем систему гладких простых контуров $\Gamma'_j \subseteq D$, $j = 1, \dots, n-r$, охватывающих связные компоненты ∂D, и положим $D' = D \setminus \Gamma'$, $\Gamma' = \bigcup \Gamma'_j$. Введем еще операцию $x^* = (x^{\blacktriangledown})^{-1}$ для обратимых числовых матриц x, где $\blacktriangledown$ означает транспонирование. Пусть условия нётеровости (14), (20) задачи (9) выполнены. Тогда союзная однородная задача состоит в отыскании решений $V \in H_{\mu,-\lambda}(D', F)$ союзной к (4) системы

$$\frac{\partial V}{\partial y} - J^{\blacktriangledown} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{32}$$

по краевым условиям

$$\operatorname{Re} c^* V^+ = \varphi \text{ на } \Gamma_{\mathrm{I}} \cup \Gamma_{\mathrm{II}},$$
$$\operatorname{Re} [(c)^*_{(k,1)} V^+ + (\bar{c}^*)_{(k2)} V^-] = 0 \text{ на } \Gamma_K, \ k = 1, 2, \tag{33}$$

и дополнительному условию

$$V^+ - V^- = \xi \text{ на } \Gamma' \tag{34}$$

с некоторым кусочно-постоянным на Γ' вектором $\xi \in C^l$, $b^*_{(k,1)}\xi = 0$, $k = 1, 2$. Если D не ограничено, то к этим условиям присоединяется требование ограниченности функции $V(x, y)$ в окрестности ∞.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (14), (20). Тогда класс решений однородной задачи (32)—(34) конечномерен и содержится в $H_{\mu,-\lambda+\varepsilon}(D', F)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, а видоизмененная задача (31) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности*

$$\operatorname{Im} \Big[\int_{\Gamma_{\mathrm{I}}} \varphi'(c^* V) |dt| + \int_{\Gamma_{\mathrm{II}}} \psi(c^* V) |dt| + \int_{\Gamma_K} \varphi'(c^*_{(11)} V^+ - \bar{c}^*_{(12)} V^-) |dt| +$$
$$+ \int_{\Gamma_K} \psi(c^*_{(21)} V^+ - \bar{c}^*_{(22)} V^-) |dt| \Big] = 0 \tag{35}$$

ко всем элементам V этого класса.

Доказательство проводится путем применения к задаче (23) предложения (c) теоремы из [4]. Согласно этому предложению, задача (23) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности

$$\operatorname{Im} \sum_{i,j=1}^{m} \int_0^1 \tilde{\varphi}_i (\tilde{\tilde{d}}_{ij} e_j V \circ \gamma_j) = 0 \tag{36}$$

ко всем решениям $V \in H_{\mu,-\lambda}$ системы (32), удовлетворяющим краевым условиям

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \tilde{\tilde{d}}_{ij} (V \circ \gamma_j) = 0, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{37}$$

и дополнительному условию (34). Здесь $\tilde{\tilde{d}}^e = (\tilde{d}^e)^*$ и, как было отмечено при доказательстве теоремы 1, $\tilde{d}^e = c$. Аналогично (15) от $m \times m$-матрицы $\tilde{\tilde{d}}^e = c^*$ перейдем к кусочно-постоянной на Γ матрице, имеющей порядок l на $\Gamma_{\mathrm{I}} \cup \Gamma_{\mathrm{II}}$ и $2l$ на Γ_K. Тогда краевое условие (37) запишется в форме (33), а условия ортогональности (36) с учетом (22) перейдут в (35), что завершает доказательство.

Очевидно, условия (35) являются необходимыми и для задачи (9). Однако, как показывает следующая лемма, для разрешимости задачи (9) этих условий, вообще говоря, не достаточно.

Лемма 3. *Пусть* ρ — *максимальное число линейно независимых решений и системы (1),* $\nabla u \in H_{\mu,\lambda-1}$, *удовлетворяющих краевым условиям*

$$(u^+)'=0 \text{ на } \Gamma_{\mathrm{I}}, \qquad (v^+)'=0 \text{ на } \Gamma_{\mathrm{II}},$$
$$(u^+-u^-)'=(v^+-v^-)'=0 \text{ на } \Gamma_K \tag{38}$$

и не являющихся решениями однородной задачи (9) (когда $\varphi=\psi=0$). *Тогда*

$$0\leqslant\rho\leqslant\rho_0, \qquad \rho_0=l(m_{\mathrm{I}}+m_K-n_{\mathrm{I}}-n_K), \tag{39}$$

и для разрешимости задачи (9) необходимо и достаточно добавления к (35) $\rho_0-\rho$ *некоторых линейно независимых условий ортогональности на правую часть* (φ, ψ).

В частности, если кривые Γ_{I}, Γ_{II}, Γ_K *являются попарно непересекающимися контурами, то любое решение задачи (38) является решением однородной задачи (9), а условия (35) необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи (9).*

Доказательство. Обозначим через $R:X\to Y$ и $\tilde{R}:\tilde{X}\to\tilde{Y}$ операторы, определяемые левыми частями соответственно (9) и (31). Пространство $\tilde{X}$ является расширением пространства X на $l(m_{\mathrm{I}}+m_K)$ измерений, если элементы последнего отождествить с парами $(u, 0)$. В определении $\tilde{Y}$ выполнение условий согласования (12) не предполагается, поэтому $\tilde{Y}$ является расширением Y на $l(n_{\mathrm{I}}+n_K)$ измерений. Поэтому с учетом обозначения (39) индексы операторов R, $\tilde{R}$ связаны соотношением $\operatorname{ind}\tilde{R}=\operatorname{ind}R+\rho_0$. Пусть r и k — размерности ядра и коядра оператора R и пусть $\tilde{r}$ и $\tilde{k}$ имеют аналогичный смысл по отношению к $\tilde{R}$. Легко видеть, что $\tilde{r}$ совпадает с числом линейно независимых решений задачи (38), так что по определению $\tilde{r}-r=\rho$. С другой стороны, соотношение для индексов означает, что $\tilde{r}-\tilde{k}=r-k+\rho_0$ или $k-\tilde{k}=\rho_0-\rho$. Поскольку $k\geqslant\tilde{k}$ и $\tilde{k}$ — число линейно независимых условий ортогональности (35), отсюда следует первое утверждение леммы.

Пусть выполнено условие на Γ ее второго утверждения. Тогда $m_{\mathrm{I}}=n_{\mathrm{I}}$, $m_K=n_K$ и, значит, $\rho_0=0$. В силу (39) отсюда $\rho=0$, так что остается воспользоваться первым утверждением.

Отметим, что, согласно доказательству теоремы 1, величина ρ_0 совпадает с правой частью (26), поэтому с учетом (27)

$$\rho_0=\frac{l}{2}\sum_{j=1}^{\tilde{m}}\left[|\tilde{P}_j/P|-k(\tilde{P}_j)\right].$$

Если $j\in\{K\}$, то $|\tilde{P}_j/P|\geqslant 2$. Поэтому $|\tilde{P}_j/P|\geqslant k(\tilde{P}_j)$ для всех j и, значит, $\rho_0\geqslant 0$, что согласуется с неравенством (39).

Литература

1. Солдатов А. П. // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 800—804.
2. Солдатов А. П. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 136—144.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1986.
4. Солдатов А. П. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 10. С. 1828—1830.
5. Солдатов А. П. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 1. С. 825—828.
6. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М., 1970.

Владимирский государственный педагогический институт им П. И. Лебедева-Полянского

Поступила в редакцию 12 декабря 1988 г.