Л.В.Веселова, Н.М.Зобин

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

В настоящей работе развивается двойственный подход к теории интерполяции, предложенный в [2] и продолженный в [I]. Так как категория банаховых пар не замкнута относительно двойственности, естественным является рассмотрение в этой работе более общих объектов (пар диаграмм).

Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – две совокупности банаховых пространств, занумерованные одним и тем же множеством индексов A; Σ, Ω – отделимые топологические векторные пространства и $\sigma_\alpha : X_\alpha \to \Sigma$, $\omega_\alpha : Y_\alpha \to \Omega$ ($\alpha\in A$) – непрерывные линейные отображения.

Для двух банаховых пространств X, Y определим линейное пространство $X \circ Y$ формальных конечных сумм вида $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [x_i \circ y_i]$ ($x_i\in X$, $y_i \in Y$, $\lambda_i\in\mathbb{R}$). Обозначим через $\mathcal{F}(X\times Y)$ линейное пространство всех функций $\Phi : X\times Y \to \mathbb{R}$. Тогда формула

$$<\Phi, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i[x_i\circ y_i]> = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi(x_i, y_i)$$

задает двойственность между $X\circ Y$ и $\mathcal{F}(X\times Y)$, причем $\mathcal{F}(X\times Y)$ является алгебраически сопряженным к $X\circ Y$.

Пусть $R - \sigma(\mathcal{F}(\Sigma\times\Omega), \Sigma\circ\Omega)$ – замкнутое подпространство $\mathcal{F}(\Sigma\times\Omega)$ и пусть $\Sigma \overset{R}{\circ} \Omega = \Sigma\circ\Omega\big|_{R^\perp}$, где $R^\perp$ – ортогональное дополнение R в $\Sigma\circ\Omega$. Через $x\overset{R}{\circ} y$ обозначим класс эквивалентности в $\Sigma\overset{R}{\circ}\Omega$, которому принадлежит элемент $x\circ y$ ($x\in\Sigma$, $y\in\Omega$).

<u>Пример I</u>. Пусть X, Y – банаховы пространства. Обозначим через $B(X\times Y)$ пространство билинейных форм на $X\times Y$, тогда $X\circ Y\big|_{B^\perp(X\times Y)} = X\otimes Y$ – тензорное произведение пространств X, Y.

<u>Пример 2</u>. Обозначим через $\mathcal{F}_2(X\times Y)$ пространство функций Φ : $X\times Y\to\mathbb{R}$, линейных по второму аргументу. Фактор-пространство $X\circ Y\big|_{\mathcal{F}_2^\perp(X\times Y)}$ обозначим $X \circledS Y$ и назовем правым полутензорным произведением.

Через $\overline{\mathfrak{X}}$, $\overline{\mathfrak{Y}}$ обозначим соответственно диаграммы

$$\overline{\mathfrak{X}} = \left\{ \mathfrak{X}_\alpha \xrightarrow{6_\alpha} \Sigma \right\}_{\alpha \in A}$$

$$\overline{\mathfrak{Y}} = \left\{ \mathfrak{Y}_\alpha \xrightarrow{\omega_\alpha} \Omega \right\}_{\alpha \in A}$$

<u>Определение I</u>. Семейство функций $\left\{\tilde{\iota}_\alpha\right\}_{\alpha \in A}, \tilde{\iota}_\alpha \in \mathfrak{F}(\mathfrak{X}_\alpha \times \mathfrak{Y}_\alpha)$ ($\alpha \in A$) назовем R -согласованным для пары диаграмм ($\overline{\mathfrak{X}}$, $\overline{\mathfrak{Y}}$), если из того, что

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{B \in A} \lambda_{i_\alpha} \left[6_\alpha x_{i_\alpha} \overset{R}{\circ} \omega_\alpha y_{i_\alpha} \right] = 0$$

(B - конечное подмножество A , $x_{i_\alpha} \in \mathfrak{X}_\alpha$, $y_{i_\alpha} \in \mathfrak{Y}_\alpha$ $(i = \overline{1,n})$), следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha \in B} \lambda_{i_\alpha} \tilde{\iota}_\alpha (x_{i_\alpha}, y_{i_\alpha}) = 0 .$$

<u>Предложение I</u>. Семейство функций $\left\{\tilde{\iota}_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$ R - согласованно для пары диаграмм $(\overline{\mathfrak{X}}, \overline{\mathfrak{Y}})$ тогда и только тогда, когда существует функция T $: \mathrm{lin} \bigcup\limits_{\alpha \in A} 6_\alpha \mathfrak{X}_\alpha \overset{R}{\circ} \omega_\alpha \mathfrak{Y}_\alpha \to R$ такая, что

$$T(6_\alpha x, \omega_\alpha y) = \tilde{\iota}_\alpha (x, y) \quad x \in \mathfrak{X}_\alpha , y \in \mathfrak{Y}_\alpha \ (\alpha \in A) .$$

Действительно, положим

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha \in B} \lambda_{i_\alpha} \left[6_\alpha x_{i_\alpha} \overset{R}{\circ} \omega_\alpha y_{i_\alpha} \right]\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha \in B} \lambda_{i_\alpha} \tilde{\iota} (x_{i_\alpha}, y_{i_\alpha})$$

для $x_{i_\alpha} \in \mathfrak{X}_\alpha$, $y_{i_\alpha} \in \mathfrak{Y}_\alpha$, B - конечное подмножество A .

Корректность определения функции T равносильна R -согласованности семейства функций $\left\{\tilde{\iota}_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$.

Пусть теперь $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ - два банаховых пространства и 6 : $\mathfrak{X} \to \Sigma$, $\omega : \mathfrak{Y} \to \Omega$ - непрерывные линейные отображения.

<u>Определение 2</u>. Функция $\tilde{\iota} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})$ называется совместимой с R -согласованным семейством функций $\left\{\tilde{\iota}_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$, если существует функция $T \in \mathfrak{F}(\Sigma \times \Omega)$ такая, что

$$\tilde{\iota}(x, y) = T(6x, \omega y) \quad (x \in \mathfrak{X} , \ y \in \mathfrak{Y}) ,$$

$$\tau_\alpha(x,y) = T(\sigma_\alpha x, \omega_\alpha y) \quad (x \in X_\alpha, \; y \in Y_\alpha).$$

Определение 3. Четверка (X, σ, Y, ω) называется R -интерполяционной относительно пары диаграмм $(\bar{X}, \bar{Y})$, если для любого R -согласованного семейства функций $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и любой совместимой с ним функции $\tau \in \mathcal{F}(X \times Y)$ имеет место неравенство

$$\|\tau\|_{X \times Y} \leqslant \sup\left\{ \|\tau_\alpha\|_\alpha \;\middle|\; \alpha \in A \right\},$$

где

$$\|\tau\|_{X\times Y} = \sup\left\{ \frac{|\tau(x,y)|}{\|x\|_X \, \|y\|_Y} \;\middle|\; x \in X/\{0\}, \; y \in Y/\{0\} \right\},$$

$$\|\tau_\alpha\|_\alpha = \sup\left\{ \frac{|\tau_\alpha(x,y)|}{\|x\|_{X_\alpha} \, \|y\|_{Y_\alpha}} \;\middle|\; x \in X_\alpha/\{0\}, \; y = Y_\alpha/\{0\} \right\}.$$

Пример 3. Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ -совокупность банаховых пространств, Σ, Δ - отделимые топологические векторные пространства, $\delta_\alpha : \Delta \longrightarrow X_\alpha$, $\sigma_\alpha : X_\alpha \longrightarrow \Sigma$ - непрерывные линейные отображения такие, что диаграмма

$$\bar{X} = \left\{ \Delta \xrightarrow{\delta_\alpha} X_\alpha \xrightarrow{\sigma_\alpha} \Sigma \right\}_{\alpha \in A}$$

коммутативна, т.е. $\sigma_\alpha \delta_\alpha x = \sigma_\beta \delta_\beta x$ для всех $\beta, \alpha \in A$, x из Δ.

Диаграмма $\bar{X}$ порождает коммутативную диаграмму

$$\bar{X}' = \left\{ \Sigma' \xrightarrow{\sigma_\alpha'} X_\alpha' \xrightarrow{\delta_\alpha'} \Delta' \right\}.$$

Если X - банахово пространство и $\delta : \Delta \longrightarrow X$ $\sigma : X \longrightarrow \Sigma$ - непрерывные линейные отображения такие, что диаграмма

$$\left\{ \begin{tikzcd} & X_\alpha \arrow[dr, "\sigma_\alpha"] & \\ \Delta \arrow[ur, "\delta_\alpha"] \arrow[r, "\delta"'] & X \arrow[r, "\sigma"'] & \Sigma \end{tikzcd} \right\}_{\alpha \in A}$$

коммутативна, то тройку (x, δ, σ) назовем промежуточной для диаграммы $\bar{x}$.

Промежуточную тройку (x, σ, δ) будем называть R -интерполяционной для диаграммы $\bar{x}$, если четверка (x, σ, x', δ') R -интерполяционна для пары диаграмм

$$\left(\left\{x_\alpha \xrightarrow{\sigma_\alpha} \Sigma\right\}_{\alpha\in A}, \left\{x'_\alpha \xrightarrow{\delta'_\alpha} \Delta'\right\}_{\alpha\in A}\right).$$

<u>Пример 4</u>. Рассмотрим категорию $K_0 = \{\bar{x}\}$, объектами которой являются коммутативные диаграммы вида

$$\bar{x} = \left\{\Delta \xrightarrow{\delta_i} x_i \xrightarrow{\sigma_i} \Sigma\right\}_{i=1}^{n}$$

с фиксированными Σ , $\{x_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\sigma_i\}_{i=1}^{n}$, а морфизмы отождествляются с непрерывными линейными отображениями $\varphi : \tilde{\Delta} \longrightarrow \Delta$ такими, что диаграмма

$$\left\{\begin{tikzcd} & x_i \arrow[dr, "\sigma_i"] & \\ \tilde{\Delta} \arrow[ur, "\tilde{\delta}_i"] \arrow[r, "\varphi"'] & \Delta \arrow[u, "\delta_i"'] & \Sigma \end{tikzcd}\right\}_{i=1}^{n}$$

коммутативна.

Рассмотрим также категорию $K_1 = \{\bar{x}\}$, объектами которой являются коммутативные диаграммы вида

$$\bar{x} = \left\{\Delta \xrightarrow{\delta_i} x_i \xrightarrow{\sigma_i} \Sigma\right\}_{i=1}^{n}$$

с фиксированными Δ , $\{x_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\delta_i\}_{i=1}^{n}$, а морфизмы отождествляются с непрерывными линейными отображениями $\psi : \Sigma \longrightarrow \tilde{\Sigma}$ такими, что диаграмма

$$\left\{\begin{tikzcd} & & \tilde{\Sigma} \\ \Delta \arrow[r, "\delta_i"] & x_i \arrow[ur, "\tilde{\sigma}_i"] \arrow[dr, "\sigma_i"'] & \\ & & \Sigma \arrow[uu, "\psi"'] \end{tikzcd}\right\}_{i=1}^{n}$$

коммутативна.

Категория K_0 обладает универсальным притягивающим объектом, для категории K_1 универсального отталкивающего объекта может не быть. Если диаграмма $\bar{x}$ является одновременно универсальным притягивающим объектом категории K_0 и универсальным отталкивающим объектом категории K_1 , то мы, следуя [4] , будем называть такую диаграмму $\mathcal{D}$ -диаграммой.

При этом $\Delta = \Delta(\bar{\mathfrak{X}})$ и $\Sigma = \Sigma(\bar{\mathfrak{X}})$ определяются следующим образом.

Определим пространство $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i$ как прямое произведение пространств $\mathfrak{X}_i$ ($i = \overline{1,n}$) с нормой

$$\|(x_1, \ldots x_n)\|_{\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i} = \max_{i=\overline{1,n}} \|x_i\|_i$$

и пространство $\coprod_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i$ как прямую сумму пространств $\mathfrak{X}_i$ ($i = \overline{1,n}$) с нормой

$$\|(x_1, \ldots x_n)\|_{\coprod_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i} = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i \quad .$$

Тогда [4] , $\Delta(\bar{\mathfrak{X}})$ - замкнутое пространство $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i$ для $x \in \Delta(\bar{\mathfrak{X}})$

$$\|x\|_{\Delta(\bar{\mathfrak{X}})} = \max_{i=\overline{1,n}} \|\delta_i(x_i)\|_i$$

или, более точно, $\Delta(\bar{\mathfrak{X}})$ состоит из тех $(x_i)_{i=1}^{n} \in \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i$, для которых

$$\delta_1(x_1) = \ \ldots \ = \delta_n(x_n) \quad .$$

$\Sigma(\bar{\mathfrak{X}})$ - фактор-пространство $\coprod_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i$ по подпространству

$$\Delta^- = \left\{ (x_i)_{i=1}^{n} \in \coprod_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i \;\middle|\; \exists z_i \in \Delta \;\; x_i = \delta_i z_i \;\; \sum_{i=1}^{n} z_i = 0 \right\} .$$

Как отмечено в [4] , тогда $(\Delta(\bar{\mathfrak{X}}))' = \Sigma \bar{\mathfrak{X}}'$ и $\Delta \bar{\mathfrak{X}}' = (\Sigma(\bar{\mathfrak{X}}))'$, где $\Delta \bar{\mathfrak{X}}'$ - универсальный притягивающий объект для категории, двойственной к K_1 , с $\tilde{\Sigma} = \Delta', \tilde{\delta}_i = \delta_i', \tilde{\mathfrak{X}}_i = \mathfrak{X}_i'$ и соответствующим образом определенными морфизмами, а $\Sigma(\bar{\mathfrak{X}}')$ - универсальный отталкивающий объект для категории диаграмм, двойственной к K_0 , с $\tilde{\Delta} = \Sigma'$, $\tilde{\mathfrak{X}}_i = \mathfrak{X}_i'$, $\delta_i' = \tilde{\delta}_i$.

R - интерполяционность тройки $(\mathfrak{X}, \delta, \delta)$ для $\mathcal{D}$ -диаграммы $\bar{\mathfrak{X}}$ равносильна R -интерполяционности четверки $(\mathfrak{X}, \delta, \mathfrak{X}', \delta')$ для пары диаграмм

$$\left(\left\{ \mathfrak{X}_i \xrightarrow{\delta_i} \Sigma \right\}_{i=1}^{n} , \left\{ \mathfrak{X}_i' \xrightarrow{\delta_i'} \Delta' \right\}_{i=1}^{n} \right) .$$

Пример 5. Пусть $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ – банахова пара, т.е. $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ – банаховы пространства, алгебраически и топологически вложенные в некоторое отделимое векторное пространство V, $\Sigma = \mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1$, $\Delta = \mathcal{X}_0 \cap \mathcal{X}_1$. Двойственным к пространству $\mathcal{X}_0 \sqcup \mathcal{X}_1$ будет пространство $\mathcal{X}_0' \sqcap \mathcal{X}_1'$, а двойственным к $\mathcal{X}_0 \sqcap \mathcal{X}_1$ – пространство $\mathcal{X}_0' \sqcup \mathcal{X}_1'$. При этом в обоих случаях двойственность задается формулой

$$\langle (x_0, x_1), (y_0, y_1) \rangle = y_0(x_0) - y_1(x_1).$$

Обозначив через

$$\Delta^-(\bar{\mathcal{X}}) = \left\{ (x_0, x_1) \in \mathcal{X}_0 \sqcup \mathcal{X}_1 \mid \exists\, x \in \mathcal{X}_0 \sqcap \mathcal{X}_1 \;\; x_0 = x,\ x_1 = -x \right\}$$

имеем, что $\Sigma' = (\mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1)'$ изометрически изоморфно подпространству $[\Delta^-(\bar{\mathcal{X}})]^{\perp}$ пространства $\mathcal{X}_0' \sqcap \mathcal{X}_1'$, состоящему из тех (y_0, y_1), для которых $y_0(x) = y_1(x)$ для любых $x \in \Delta$, а $\Delta' = (\mathcal{X}_0 \cap \mathcal{X}_1)'$ изометрически изоморфно фактор-пространству пространства $\mathcal{X}_0' \sqcup \mathcal{X}_1'$ по подпространству $[\Delta^-(\bar{\mathcal{X}})]^{\perp}$ [3].

Пример 6. Пусть $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ – банахова пара, $\Delta = \mathcal{X}_0 \cap \mathcal{X}_1$, $\Sigma = \mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1$ и $\delta_i : \Delta \longrightarrow \mathcal{X}_i$ – плотные вложения. Тогда [3], $\mathcal{X}_0'$, $\mathcal{X}_1'$ также образуют банахову пару и $\Delta' = \mathcal{X}_0' + \mathcal{X}_1'$, $\Sigma' = \mathcal{X}_0' \cap \mathcal{X}_1'$.

Пусть $\mathcal{X}$ – промежуточное для банаховой пары $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ пространство, причем Δ плотно в $\mathcal{X}$. Тогда имеет место

Предложение 2. Если тройка $(\mathcal{X}, \delta, \sigma)$, где δ, σ – вложения Δ в $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}$ в Δ соответственно, R – интерполяционна относительно диаграммы $\bar{\mathcal{X}} = \left\{ \Delta \hookrightarrow \mathcal{X}_i \hookrightarrow \Sigma \right\}_{i=0,1}$, то $\mathcal{X}$ линейно интерполяционно для банаховой пары $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ в классическом смысле [3].

Действительно, пусть T – линейный оператор из Σ в Σ такой, что T отображает $\mathcal{X}_i$ в $\mathcal{X}_i\,(i=0,1)$ и $\max\limits_{i=0,1} \|T_i\|_i \leqslant 1$, тогда оператор T задает билинейную форму Φ на $\Delta \times \Delta'$ по формуле

$$\Phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \qquad x \in \Delta,\ y \in \Delta',$$

которая в силу плотности Δ в $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}$ однозначно продолжается на $\Sigma \times \Delta'$ так, что ее сужения на $\mathcal{X}_i \times \mathcal{X}_i'$ / $i=0,1$ /

и $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$ совпадают соответственно с билинейными формами Φ_i, $\Phi_{\mathfrak{X}}$, определенными равенствами

$$\Phi_i(x,y) = \langle Tx, y \rangle \quad (x \in \mathfrak{X}_i,\ y \in \mathfrak{X}_i'),$$

$$\Phi_{\mathfrak{X}}(x,y) = \langle Tx, y \rangle \quad (x \in \mathfrak{X},\ y \in \mathfrak{X}').$$

Очевидно, что семейство форм $\{\Phi_i\}_{i=0,1}$ $B(\Sigma \times \Delta')$ согласовано и $\Phi_{\mathfrak{X}}$ совместима с этим семейством. Поэтому из $B(\Sigma \times \Delta')$-интерполяционности $\mathfrak{X}$ относительно диаграммы $\overline{\mathfrak{X}}$ следует

$$\|T\|_{\mathfrak{X}} = \|\Phi_{\mathfrak{X}}\|_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}'} \leqslant \max_{i=0,1} \|\Phi_i\|_i = \max_{i=0,1} \|T\|_i \leqslant 1.$$

Теорема 3. Критерий R-интерполяционности.
Четверка $(\mathfrak{X}, \sigma, \mathfrak{Y}, \omega)$ R-интерполяционна относительно пары диаграмм $(\overline{\mathfrak{X}}, \overline{\mathfrak{Y}})$ тогда и только тогда, когда для любых $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathfrak{Y}$

$$\|x\|_{\mathfrak{X}} \|y\|_{\mathfrak{Y}} \geqslant \inf\Big\{ \sum_{\alpha \in B} \sum_{i=1}^{n} \|x_{i\alpha}\|_{\mathfrak{X}_\alpha} \|y_{i\alpha}\|_{\mathfrak{Y}_\alpha} \cdot |\lambda_{i\alpha}| \Big|$$

$$\sigma x \overset{R}{\circ} \omega y = \sum_{\alpha \in B} \sum_{i=1}^{n} \left[\sigma_\alpha x_{i\alpha} \overset{R}{\circ} \omega_\alpha y_{i\alpha}\right] \lambda_{i\alpha}, \quad x_{i\alpha} \in \mathfrak{X}_\alpha,$$

$$y_{i\alpha} \in \mathfrak{Y}_\alpha \quad i = \overline{1,n},$$

B – конечное подмножество $A\Big\}$.

Доказательство. Предположим, что четверка $(\mathfrak{X}, \sigma, \mathfrak{Y}, \omega)$ R-интерполяционна относительно пары диаграмм.

Рассмотрим в $\Sigma \overset{R}{\circ} \Omega$ выпуклые функции

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{X}}(\xi) = \begin{cases} \inf \Big\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \, \|x_j\|_{\mathfrak{X}} \|y_j\|_{\mathfrak{Y}} \ \Big| \ \xi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\sigma x_j \overset{R}{\circ} \omega y_j\right] \Big\} \\ \infty \qquad \text{, если не существует разложения } \xi \\ \qquad \text{в сумму вида } \xi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\sigma x_j \overset{R}{\circ} \omega y_j\right], \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_\alpha(\xi) = \begin{cases} \inf \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \, \|x_j\|_{\mathfrak{X}_\alpha} \|y_j\|_{\mathcal{Y}_\alpha} \mid \xi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \\ \cdot \left[\sigma_\alpha x_j \overset{R}{\circ} \omega_\alpha y_j \right] \\ \infty \quad \text{, если не существует разложения } \xi \\ \text{в сумму вида } \xi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\sigma_\alpha x_j \overset{R}{\circ} \omega_\alpha y_j \right] \end{cases}$$

Обозначим

$$\mathcal{W}_x = \left\{ \xi \in \Sigma \overset{R}{\circ} \Omega \,/\, \mathcal{P}_x(\xi) \leq 1 \right\},$$

$$\mathcal{W}_\alpha = \left\{ \xi \in \Sigma \overset{R}{\circ} \Omega \,/\, \mathcal{P}_\alpha(\xi) \leq 1 \right\}$$

и покажем, что из R-интерполяционности четверки (x, σ, y, ω) следует, что

$$\overset{0}{\mathcal{W}}_x \supset \bigcap_{\alpha \in A} \overset{0}{\mathcal{W}}_\alpha ,$$

где $\overset{0}{\mathcal{W}}_x$, $\overset{0}{\mathcal{W}}_\alpha$ - поляры $\mathcal{W}_x$, $\mathcal{W}_\alpha$ соответственно в R $(\alpha \in A)$.

Пусть $\Phi \in \bigcap_{\alpha \in A} \overset{0}{\mathcal{W}}_\alpha$. Тогда для $x \in \mathfrak{X}_\alpha$, $y \in \mathcal{Y}_\alpha$ таких, что $\|x\|_{\mathfrak{X}_\alpha} \|y\|_{\mathcal{Y}_\alpha} \leq 1$, имеем

$$| \langle \Phi, \sigma_\alpha x \overset{R}{\circ} \omega_\alpha y \rangle | \leq 1 .$$

Функция $\Phi \in \mathcal{F}(\Sigma \times \Omega)$ определяет R-согласованное семейство функций $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ по формулам

$$\Phi_\alpha(x, y) = \Phi(\sigma_\alpha x, \omega_\alpha y) \qquad (x \in \mathfrak{X}_\alpha, \; y \in \mathcal{Y}_\alpha).$$

Для Φ_α имеем

$$\|\Phi_\alpha\|_\alpha = \sup \left\{ \frac{|\Phi_\alpha(x, y)|}{\|x\|_{\mathfrak{X}_\alpha} \|y\|_{\mathcal{Y}_\alpha}} \,/\, x \in \mathfrak{X}_\alpha / \{0\}, \; y \in \mathcal{Y}_\alpha / \{0\} \right\} =$$

$$= \sup\left\{ \frac{\Phi(\sigma x, \omega y)}{\|x\|_{x_\alpha}\|y\|_{y_\alpha}} \middle| x \in X_\alpha \setminus \{0\}, \ y \in Y_\alpha \setminus \{0\} \right\} \leq 1 \quad ,$$

так как $\sigma_\alpha \times \overset{R}{\circ} \omega_\alpha y \in Ш_\alpha \qquad (\alpha \in A)$.

Но тогда в силу R-интерполяционности (X, σ, Y, ω) имеем для $\Phi_X(X, Y)$ такой, что

$$\Phi_X(x,y) = \Phi(\sigma, x, \omega, y) \qquad (x \in X \ , \ y \in Y) \ ,$$

неравенство $\|\Phi_X\|_{X\times Y} \leq 1$.

Для $\xi \in Ш_X$ существует разложение $\xi =$
$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\sigma x_j \overset{R}{\circ} \omega y_j\right]$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j| \ \|x_j\|_X \ \|y_j\|_Y \leq 1 + \varepsilon \ .$$

Отсюда следует, что

$$|\Phi(\xi)| = \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Phi(\sigma x_j \ , \omega y_j)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \left|\Phi_X(x_j, y_j)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_X \|y_j\|_Y \leq 1 + \varepsilon \ ,$$

а значит, $\Phi \in Ш_X^0$.

Переходя к полярам и применяя теорему о биполяре, получаем

$$Ш \supset \frac{\sigma(\sum \overset{R}{\circ} \Omega, R)}{\operatorname{conv} \bigcup_{\alpha \in A} Ш_\alpha} \ .$$

Так как R является алгебраически сопряженным к $\sum \overset{R}{\circ} \Omega$, то функционалы Минковского множеств $\operatorname{conv} \bigcup_{\alpha \in A} Ш_\alpha$ и $\dfrac{\sigma(\sum \overset{R}{\circ} \Omega, R)}{\operatorname{conv} \bigcup_{\alpha \in A} Ш_\alpha}$ совпадают, и мы, таким образом, имеем, переходя к функционалам Минковского,

$$\|x\|_X \|y\|_Y \geq \inf\left\{ \sum_{\alpha \in B} \sum_{i=1}^{n} \|x_{i\alpha}\|_{X_\alpha} \|y_{i\alpha}\|_{Y_\alpha} |\lambda_{i\alpha}| \right|$$

$$\sigma x \overset{R}{\circ} \omega y = \sum_{\alpha \in B} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i_\alpha} \left[\sigma_\alpha x_{i_\alpha} \overset{R}{\circ} \omega_\alpha y_{i_\alpha} \right], \; x_{i_\alpha} \in \mathfrak{X}_\alpha,$$

$$y_{i_\alpha} \in \mathcal{Y}_\alpha, \; \lambda_{i_\alpha} \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Обратно, пусть $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — R-согласованное семейство функций и $\varphi_{\mathfrak{X}} \in \mathcal{F}(\mathfrak{X} \times \mathcal{Y})$ совместима с ним, т.е. существует функция $\varphi \in R$ такая, что

$$\varphi_\alpha(x, y) = \varphi(\sigma_\alpha x, \omega_\alpha y) \qquad (x \in \mathfrak{X}_\alpha, \; y \in \mathcal{Y}_\alpha)$$

и

$$\varphi_{\mathfrak{X}}(x, y) = \varphi(\sigma x, \omega y) \qquad (x \in \mathfrak{X}, \; y \in \mathcal{Y}).$$

Предположим для определенности, что

$$\sup \left\{ \|\varphi_\alpha\|_\alpha \;\middle|\; \alpha \in A \right\} \leq 1.$$

Тогда для любых $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, любого $\varepsilon > 0$ существует разложение

$$\sigma x \overset{R}{\circ} \omega y = \sum_{\alpha \in B} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i_\alpha} \left[\sigma_\alpha x_{i_\alpha} \overset{R}{\circ} \omega_\alpha y_{i_\alpha} \right]$$

такое, что

$$\sum_{\alpha \in B} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_{i_\alpha}| \, \|x_{i_\alpha}\|_{\mathfrak{X}_\alpha} \|y_{i_\alpha}\|_{\mathcal{Y}_\alpha} \leq \inf \Big\{ \sum_{B \ni \alpha} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} |\tilde{\lambda}_{i_\alpha}| \, \|\tilde{x}_{i_\alpha}\|_{\mathfrak{X}_\alpha} \cdot$$

$$\cdot \|\tilde{y}_{i_\alpha}\| \;\Big|\; \sigma x \overset{R}{\circ} \omega y = \sum_{\alpha \in B} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{\lambda}_{i_\alpha} \left[\sigma_\alpha \tilde{x}_{i_\alpha} \overset{R}{\circ} \omega_\alpha \tilde{y}_{i_\alpha} \right] \Big\} + \varepsilon.$$

Но тогда

$$|\varphi_{\mathfrak{X}}(x, y)| = |\varphi(\sigma x, \omega y)| = \Big| \sum_{\alpha \in B} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\sigma_\alpha x_{i_\alpha}, \omega_\alpha y_{i_\alpha}) \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{\alpha, i} |\lambda_{i_\alpha}| \, \|x_{i_\alpha}\|_{\mathfrak{X}_\alpha} \|y_{i_\alpha}\|_{\mathcal{Y}_\alpha} \leq \inf \Big\{ \sum_{\alpha, i} |\tilde{\lambda}_{i_\alpha}| \, \|\tilde{x}_{i_\alpha}\|_{\mathfrak{X}_\alpha} \cdot \|\tilde{y}_{i_\alpha}\| \;\Big|$$

$$\sigma x \overset{R}{\circ} \omega y = \sum_{\alpha, i} \tilde{\lambda}_{i_\alpha} \left[\sigma_\alpha \tilde{x}_{i_\alpha} \overset{R}{\circ} \omega_\alpha \tilde{y}_{i_\alpha} \right] \Big\} + \varepsilon \leq \|x\|_{\mathfrak{X}} \|y\|_{\mathcal{Y}} + \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора ε, $\|\Phi_{\mathcal{X}}\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \leq 1$.

Следствие 4. Четверка $(\mathcal{X},\sigma,\mathcal{Y},\omega)$ $B(\Sigma\times\Omega)$ – интерполяционна для пары диаграмм $(\bar{\mathcal{X}},\bar{\mathcal{Y}})$ тогда и только тогда, когда для любых $x\in\mathcal{X}$, $y\in\mathcal{Y}$

$$\|x\|_{\mathcal{X}}\|y\|_{\mathcal{Y}} \geq \inf\Big\{\sum_{\alpha\in B}\sum_{i=1}^{n}\|x_{i\alpha}\|_{\mathcal{X}_\alpha}\|y_{i\alpha}\|_{\mathcal{Y}_\alpha} \Big|$$

$$\sigma x\otimes\omega y = \sum_{\alpha\in B}\sum_{i=1}^{n}\sigma_\alpha x_{i\alpha}\otimes\omega_\alpha y_{i\alpha}\Big|\, x_{i\alpha}\in\mathcal{X}_\alpha,\ y_{i\alpha}\in\mathcal{Y}_\alpha,$$

B – конечное подмножество $A\Big\}$.

Следствие 5. Четверка $(\mathcal{X},\sigma,\mathcal{Y},\omega)$ $\mathcal{T}_2(\Sigma\times\Omega)$ – интерполяционна для пары диаграмм $(\bar{\mathcal{X}},\bar{\mathcal{Y}})$ тогда и только тогда, когда для любых $x\in\mathcal{X}$, $y\in\mathcal{Y}$

$$\|x\|_{\mathcal{X}}\|y\|_{\mathcal{Y}} \geq \inf\Big\{\sum_{\alpha\in B}\|x_\alpha\|_{\mathcal{X}_\alpha}\|y_\alpha\|_{\mathcal{Y}_\alpha} \,\Big|\, \sigma_\alpha x_\alpha = x,$$

$$\omega y = \sum_{\alpha\in B}\omega_\alpha y_\alpha \quad y_\alpha\in\mathcal{Y}_\alpha \quad \alpha\in B$$

B – конечное подмножество $A\Big\}$.

Доказательство. Действительно, из теоремы 3 следует, что $(\mathcal{X},\sigma,\mathcal{Y},\omega)$ $\mathcal{T}_2(\Sigma\times\Omega)$ – интерполяционна относительно пары диаграмм $(\bar{\mathcal{X}},\bar{\mathcal{Y}})$ тогда и только тогда, когда для любых $x\in\mathcal{X}$, $y\in\mathcal{Y}$

$$\|x\|_{\mathcal{X}}\|y\|_{\mathcal{Y}} \geq \inf\Big\{\sum_{\alpha\in B}\sum_{i=1}^{n}\|x_{i\alpha}\|_{\mathcal{X}_\alpha}\|y_{i\alpha}\|_{\mathcal{Y}_\alpha} \Big|$$

$$\sigma x\otimes\omega y = \sum_{\alpha,i}\sigma_\alpha x_{i\alpha}\otimes\omega_\alpha y_{i\alpha},\quad x_{i\alpha}\in\mathcal{X}_\alpha,\ y_{i\alpha}\in\mathcal{Y}_\alpha\Big\}.$$

Однако так как полутензорное произведение нелинейно по первому сомножителю, то равенство

$$\sigma x\otimes\omega y = \sum_{\alpha,i}\sigma_\alpha x_{i\alpha}\otimes\omega_\alpha y_{i\alpha}$$

возможно лишь в том случае, когда $\sigma_\alpha x_{i\alpha} = \sigma x$ и $\omega y = \sum_{\alpha,i}\omega_\alpha y_{i\alpha}$. Тогда ясно, что

$$\inf\Big\{\sum_{\alpha\in B}\sum_{i=1}^{n}\|x_{i\alpha}\|_{X_\alpha}\|y_{i\alpha}\|_{Y_\alpha}\ \Big|\ \sigma_\alpha x_{i\alpha}=\sigma x\ ,$$

$$\omega y=\sum_{\alpha,i}\omega_\alpha y_{i\alpha}\Big\}=\inf\Big\{\sum_{\alpha\in B}\|x_\alpha\|_{X_\alpha}\|y_\alpha\|_{Y_\alpha}\ \Big|$$

$$\sigma_\alpha x_\alpha=\sigma x\ ,\ \omega y=\sum_{\alpha\in B}\omega_\alpha y_\alpha\Big\}\ .$$

Рассмотрим теперь подпространства в $\mathcal{F}(X_\alpha\times Y_\alpha)$, построенные следующим образом:

$$H_\alpha=\Big\{\tau_\alpha\in\mathcal{F}\,(X_\alpha\times Y_\alpha)\ \Big|\ \text{существует }\ \Phi\in R\ \text{ такая, что }$$
$$\Phi\,(\sigma_\alpha x\,,\omega_\alpha y)=\tau_\alpha\,(x,y)\ /\ x\in X_\alpha\ ,\ y\in Y_\alpha\ /\Big\}.$$

Для H_α мы имеем

$$\sigma_\alpha\circ\omega_\alpha\,(H_\alpha^{\perp})\subset R^{\perp}\qquad(\alpha\in A)\,.$$

Действительно, для $\xi=\sigma_\alpha\times\overset{R}{\circ}\omega_\alpha y\in R^{\perp}$ имеем $\Phi(\xi)=0$ для любой функции Φ из R, а следовательно, $\tau_\alpha(x,y)=0$ для любой функции $\tau_\alpha\in H_\alpha$, что и означает, что $x\circ y\in H_\alpha^{\perp}$.

Если же выбрать H_α так, чтобы

$$H_\alpha^{\perp}=(\sigma_\alpha\circ\omega_\alpha)^{-1}\ (R^{\perp})\ ,$$

то H_α будут $\sigma(\mathcal{F}(X_\alpha\times Y_\alpha),X_\alpha\circ Y_\alpha)$ -замкнутыми подпространствами $\mathcal{F}(X_\alpha\times Y_\alpha)$ и фактор-пространства $X_\alpha\overset{H_\alpha}{\circ}Y_\alpha=X_\alpha\circ Y_\alpha\big|H_\alpha^{\perp}$ будут вложены в $\sum\overset{R}{\circ}\Omega$.

Поэтому теорему 3 можно переформулировать следующим образом.

<u>Теорема 6</u>. Четверка (X,σ,Y,ω) R-интерполяционна относительно пары диаграмм $(\bar{X},\bar{Y})$ тогда и только тогда, когда для любых $x\in X$, $y\in Y$

$$\|x\|_X\|y\|_Y\geqslant\inf\Big\{\sum_{\alpha\in B}\sum_{i=1}^{n}\|x_{i\alpha}\|_{X_\alpha}\|y_{i\alpha}\|_{Y_\alpha}\,|\lambda_{i\alpha}|\ \Big|$$

$$x\overset{H}{\circ}y=\sum_{i,\alpha}\lambda_{i\alpha}\big[x_{i\alpha}\overset{H_\alpha}{\circ}y_{i\alpha}\big]\ ,\ x_{i\alpha}\in X_\alpha\ ,\ y_{i\alpha}\in Y_\alpha\Big\}\ ,$$

где $H^{\perp} = (\sigma \circ \omega)^{-1} \quad (R^{\perp})$.

Пусть теперь мы имеем пару диаграмм

$$\bar{\mathfrak{X}} = \left\{ \mathfrak{X}_\alpha \xrightarrow{\sigma_\alpha} \Sigma \right\}_{\alpha \in A},$$

$$\bar{\mathfrak{X}}' = \left\{ \mathfrak{X}'_\alpha \xrightarrow{\omega_\alpha} \Sigma' \right\}_{\alpha \in A},$$

и пусть функция $I(x, y) = \langle x, y \rangle$ принадлежит R.

Следствие 7. Если четверка $(\mathfrak{X}, \sigma, \mathfrak{X}', \omega)$ R-интерполяционна относительно пары диаграмм $(\bar{\mathfrak{X}}, \bar{\mathfrak{X}}')$, то для любого $y \in \mathfrak{X}'$ имеет место равенство

$$\|y\|_{\mathfrak{X}'} = \sup_{x \in \mathfrak{X}} \frac{1}{\|x\|_{\mathfrak{X}}} \Big\{ \inf \Big\{ \sum_{\alpha \in B} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_{i_\alpha}| \, \|x_{i_\alpha}\|_\alpha \|y_{i_\alpha}\|^\alpha \Big|$$

$$\sigma x \overset{R}{\circ} \omega y = \sum_{\alpha \in B} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i_\alpha} \left[\sigma_\alpha x_{i_\alpha} \overset{R}{\circ} \omega_\alpha y_{i_\alpha} \right] \Big\} \Big\}.$$

Доказательство. Выберем H_α, H равными

$$H_\alpha = \left[(\sigma_\alpha \circ \omega_\alpha)^{-1} \quad (R^{\perp}) \right]^{\perp},$$

$$H = \left[(\sigma \circ \omega)^{-1} \quad (R^{\perp}) \right]^{\perp}.$$

Тогда элементы $x \overset{H}{\circ} y$, $x \overset{H_\alpha}{\circ} y$ будем отождествлять с $\sigma x \overset{R}{\circ} \omega y$, $\sigma_\alpha x \overset{R}{\circ} \omega_\alpha y$ соответственно.

Если четверка $(\mathfrak{X}, \sigma, \mathfrak{X}', \omega)$ R-интерполяционна относительно пары диаграмм $(\bar{\mathfrak{X}}, \bar{\mathfrak{X}}')$, то для любого $y \in \mathfrak{X}'$

$$\|y\|_{\mathfrak{X}'} \geqslant \sup_{x \in \mathfrak{X}} \frac{1}{\|x\|_{\mathfrak{X}}} \inf \Big\{ \sum_{\alpha \in A} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_{i_\alpha}| \, \|x_{i_\alpha}\|_\alpha \|y_{i_\alpha}\|^\alpha \Big|$$

$$x \overset{H}{\circ} y = \sum_{\alpha \in B} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i_\alpha} \left[x_{i_\alpha} \overset{H_\alpha}{\circ} y_{i_\alpha} \right] \Big\} \Big\}.$$

С другой стороны, для любых $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathfrak{X}'$, любого $\varepsilon > 0$ существует представление $x \overset{H}{\circ} y = \sum_{\alpha, i} \lambda_{i_\alpha} \left[x_{i_\alpha} \overset{H_\alpha}{\circ} y_{i_\alpha} \right]$ такое, что

$$\sum_{\alpha, i} |\lambda_{i_\alpha}| \, \|x_{\alpha_i}\|_\alpha \|y_{\alpha_i}\|^\alpha \leqslant \inf \Big\{ \sum_{\alpha, i} |\tilde{\lambda}_{\alpha_i}| \, \|\tilde{x}_{\alpha_i}\|_\alpha \|\tilde{y}_{\alpha_i}\|^\alpha \Big|$$

$$x \overset{H}{\circ} y = \sum_{\alpha,i} \tilde{\lambda}_{\alpha_i} \left[\tilde{x}_{\alpha_i} \overset{R}{\circ} \tilde{y}_{\alpha_i} \right] \Big\} + \varepsilon \|x\|_{x} \Big\}$$

Тогда

$$\|y\|_{x'} = \sup\left\{ |<x,y>| \;|\; x \in X,\ \|x\|_{X} \leqslant 1 \right\} =$$

$$= \sup\left\{ |<I, 6x \overset{R}{\circ} \omega y>| \;|\; x \in X\ \|x\|_{X} \leqslant 1 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\Big\{ \sum_{\alpha,j} |<I, 6_\alpha x_{\alpha_j} \overset{R}{\circ} \omega_\alpha y_{\alpha_j}> \|\lambda_{\alpha_j}\| \; x \in X,\ \|x\|_x \leqslant 1$$

$$x \overset{H}{\circ} y = \sum_{\alpha,j} (x_{\alpha_j} \overset{H_\alpha}{\circ} y_{\alpha_j}) \lambda_{\alpha_j} \Big\} \leqslant \sup \sum_{\alpha,j} |\lambda_{\alpha_j}| \|x_{\alpha_j}\|_\alpha \|y_{\alpha_j}\|^\alpha |$$

$$x \in X, \|x\|_x \leqslant 1 \Big\} \leqslant \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leqslant 1}} \inf\Big\{ \sum_{\alpha,j} |\tilde{\lambda}_{\alpha_i}| \|\tilde{x}_{\alpha_j}\|_\alpha \|\tilde{y}_{\alpha_j}\|^\alpha |$$

$$x \overset{H}{\circ} y = \sum_{\alpha,j} [x_{\alpha_j} \overset{H_\alpha}{\circ} y_{\alpha_j}] \lambda_{\alpha_j} + \varepsilon \Big\}.$$

Применим теперь полученный критерий интерполяционности для исследования действительного метода интерполяции.

Пусть X_0 , X_1 - банаховы пространства, $\bar{X}$ - коммутативная $\mathcal{D}$ -диаграмма.

Следуя [4], введем для диаграммы $\bar{X}$ K и $\mathcal{J}$ функционалы, определенные на $\Sigma(\bar{X})$, $\Delta(\bar{X})$ соответственно

$$K(t,x) = \inf(\|x_0\|_0 + t\|x_1\|_1 \mid 6_0(x_0) + 6_1(x_1) = x) \mid x \in \Sigma(\bar{x}) |$$

$$\mathcal{J}(t,x) = \max(\|\delta_0 x\|_0 , t\|\delta_1 x_1\|_1) \qquad (x \in \Delta(\bar{x})) .$$

Рассмотрим пространство $C(\mathbb{R}^+, \Delta(\bar{X}))$ непрерывных $\Delta(\bar{X})$ -значных функций с компактным носителем на открытом интервале $]0, \infty[$ и отображение $m : C(\mathbb{R}^+, \Delta(\bar{x})) \longrightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$m(u(t)) = \mathcal{J}(t, u(t)) \quad u(t) \in C(\mathbb{R}^+, \Delta(\bar{x})) \quad (0 \leqslant t \leqslant \infty).$$

На пространстве $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ введем двухпараметрическое семейство норм $\Phi_{\theta,q}$

$$\Phi_{\theta,q}(f) = \Big(\int_0^\infty |t^{-\theta} f(t)|^q \frac{dt}{t} \Big)^{1/q} \qquad \begin{array}{l}(0 \leqslant \theta \leqslant 1)\\ (0 < q < \infty).\end{array}$$

Зададим полунорму на $\Delta(\bar{\mathfrak{X}})$ формулой

$$\gamma(\theta,q,x)=\inf\left\{\Phi_{\theta,q}(m(u))\,\Big|\,\int_0^\infty \omega(t)\frac{dt}{t}=x \quad x\in\mathbb{C}(\mathbb{R}^+,\Delta(x))\right\}.$$

Определение 4. $\gamma(\theta,q,\bar{\mathfrak{X}})$ -пространством для диаграммы $\bar{\mathfrak{X}}$ назовем пополнение пространства $\Delta(\bar{\mathfrak{X}})$ по полунорме $\gamma(\theta,q)$, определенной выше.

Определение 5. $K(\theta,q,\bar{\mathfrak{X}})$ -пространством для диаграммы $\bar{\mathfrak{X}}$ назовем множество таких x из $\Sigma(\bar{\mathfrak{X}})$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{K(\theta,q,\bar{\mathfrak{X}})}=\left(\int_0^\infty |t^{-\theta}K(t,x)|^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

Как показано в [4], сопряженным к пространству $\gamma(\theta,q,\bar{\mathfrak{X}})$ будет пространство $K(\theta,q',\bar{\mathfrak{X}}')$, где

$$\bar{\mathfrak{X}}'=\left\{\Sigma'(\bar{\mathfrak{X}})\xrightarrow{\;\delta_i'\;}x_i\xrightarrow{\;\delta_i'\;}\Delta'(\bar{\mathfrak{X}})\right\}$$

и $\frac{1}{q'}=1-\frac{1}{q}$.

Теорема 8. Пространство $\gamma(\theta,q,\bar{\mathfrak{X}})$ $B(\Sigma(\bar{\mathfrak{X}})\times\Delta'(x))$ -интерполяционно для диаграммы $\bar{\mathfrak{X}}$.

Доказательство. Пусть $\delta:\Delta(\bar{\mathfrak{X}})\longrightarrow\gamma(\theta,q,\bar{\mathfrak{X}})$, $\sigma:\gamma(\theta,q,\bar{\mathfrak{X}})\longrightarrow\Sigma(\bar{\mathfrak{X}})$.

Так как δ плотно в $\gamma(\theta,q,\bar{\mathfrak{X}})$, то неравенство теоремы 3 достаточно доказать для всех $x\in\Delta(\bar{\mathfrak{X}})$, $y\in\Delta'(\bar{\mathfrak{X}})$.

Рассмотрим

$$\|x\|_{\gamma(\theta,q,\bar{\mathfrak{X}})}\|y\|_{K(\theta,q',\bar{\mathfrak{X}}')}=\inf\left\{\Phi_{\theta,q}(\gamma(u(t))\,\Big|\,\int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}=x\right\}\cdot\Phi_{\theta,q'}(K(t,y))\leqslant\inf\left\{\int_0^\infty\gamma(t,u(t))\right.$$
$$\left.K\left(\frac{1}{t},y\right)\frac{dt}{t}\,\Big|\,\int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}=x,\ u(t)\in\mathbb{C}(\mathbb{R}^+,\Delta(\bar{\mathfrak{X}}))\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\inf\left\{\int_0^\infty\|\delta_0(u(t))\|_0\|y_0(t)\|^0+\|\delta_1(u(t))\|_1\|y_1(t)\|^1\frac{dt}{t}\,\Big|\right.$$
$$\left.\int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}=x,\ y=\delta_0'y_0(t)+\delta_1'y_1(t)\right\}.$$

Учитывая, что δ , δ' - вложения, имеем

$$\sigma x = \sigma \delta x = \int \sigma \delta u(t) \frac{dt}{t} = \int \sigma_i \delta_i u(t) \frac{dt}{t} \quad (i=0,1)$$

и, следовательно,

$$\sigma x \otimes \delta' y = \int \sigma_i (\delta_i u(t)) \frac{dt}{t} \otimes [\delta'_0 y_0(t) + \delta'_1 y_1(t)] =$$

$$= \int \sigma_0 (\delta_0 u(t)) \otimes \delta'_0 y_0(t) + \sigma_1 (\delta_1 (u(t)) \delta'_1 y_1(t) \frac{dt}{t} .$$

Так как $\int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$ понимается в сильном смысле (в смысле сходимости по норме пространства $\Delta(\bar{X})$), то, заменяя в полученном равенстве интегралы конечными суммами, мы получаем утверждение теоремы.

Литература

1. Веселова Л.В., Зобин Н.М. Интерполяция операторов и двойственность / Казан. химико-технол. ин-т. - Казань, 1988. - 12 с. - Деп. в ВИНИТИ 5.07.1988, № 5401 - В88.
2. Зобина В.Г. Двойственность в интерполяции операторов // Сообщ. АН ГССР. 1979. Т.95. № 1. С.45 - 48.
3. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
4. Kaijser S., Wick-Pelletier J. // Interpolation theory and duality // Lecture Notes in Math. 1984. V.1070. P.152 - 158.

С.В.Дорофеев

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ЗАРЯДА, ЗАДАННОГО НА ПРОЕКТОРАХ АЛГЕБРЫ НЕЙМАНА ТИПА II

<u>Введение</u>. Пусть H - комплексное гильбертово пространство, M - алгебра Неймана, действующая в H , и M^{Π} - множество ортопроекторов в M .

Комплексозначную функцию η , заданную на M^{Π} , назовем за-