О. С. Столбова, А. А. Роговой, Применение процедуры восполнения напряжений при численной реализации линейных и нелинейных краевых задач теории упругости методом конечных элементов, *Матем. моделирование и краев. задачи*, 2009, часть 1, 249–251

УДК 539.3:519.6

О. С. Столбова, А. А. Роговой

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ВОСПОЛНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение. В механике деформируемого твердого тела численная реализация принципа виртуальных перемещений методом конечных элементов (МКЭ) приводит к достаточно хорошей аппроксимации поля перемещений, но к значительно худшей аппроксимации поля напряжений. В настоящее время существуют различные методы восполнения (улучшения) поля напряжений для задач, решаемых МКЭ в рамках вариационной постановки Лагранжа, неравнозначные как по точности, так и по сложности реализации.

В линейной механике во многих случаях возможен компромисс между точность и сложностью методов построения полей напряжений. В нелинейной механике такой компромисс проблематичен. Обычно нелинейные задачи линеаризуют и решают пошаговым методом. Применение при этом на каждом шаге простого, но менее точного метода получения напряжений, приводит к быстрому накоплению ошибки в них. Более точные, а, значит, и более сложные методы получения поля напряжений требуют значительного времени счета задачи. Используемая процедура восполнения напряжений, описанная в работе [1], позволяет строить поля напряжений с той же точностью, что и лучшие методы восполнений, но значительно быстрее.

1. Идея процедуры восполнения напряжений. Записывается Лагранжева вариационная постановка краевой задачи (варьируемой величиной является только вектор перемещений). Численная реализация вариационного уравнения осуществляется обычным МКЭ, в результате чего имеем значения перемещений в узлах сетки. При формировании общей матрицы жесткости, которую можно строить, обрабатывая каждый элемент или каждый узел, сохраним матрицы жесткости каждого узла.

Выберем теперь внутри тела достаточно гладкую поверхность (обозначим ее l), делящую тело на две части и образованную поверхностями, примыкающих к ней двух (с одной и с другой стороны) слоев конечных элементов (узлы этих элементов, выходящие на поверхность l, образуют множество, которое обозначим K). Одну часть тела отбросим, а ее силовым воздействием на оставшуюся будет вектор неизвестного распределенного усилия (обозначим его $\boldsymbol{p}$), который, в соответствии с обычной процедурой метода конечных элементов, приводится к узлам, образующим множество K (для k-того узла это будет сумма интегралов по поверхностям, примыкающих к этому узлу элементов, составляющих поверхность l, с подынтегральными выражениями в виде $\boldsymbol{p}$, умноженное на функцию формы для k-того узла соответствующего элемента). С другой стороны, это приведенное к узлу усилие определяется в соответствии с процедурой МКЭ как произведение матрицы жесткости для этого узла на найденный в результате решения задачи вектор узловых перемещений. В итоге приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода, определяющей вектор $\boldsymbol{p}$. Полученная задача некорректна по Адамару. Для ее решения используются, в частности, регуляризаторы А. Н. Тихонова с различными параметрами регуляризации.

Поступая аналогично для другой поверхности t, проходящей через тот же k-тый узел, получаем значение вектора распределенных усилий в этом узле, соответствующее другой поверхности. Используя соотношения Коши $\boldsymbol{n}_k^l \cdot \boldsymbol{T}_k = \boldsymbol{p}_k^l$, $\boldsymbol{n}_k^t \cdot \boldsymbol{T}_k = \boldsymbol{p}_k^t$, где $\boldsymbol{n}_k^l$ и $\boldsymbol{n}_k^t$ — внешние единичные нормали к поверхностям l и t в k-том узле, $\boldsymbol{T}_k$ — значение тензора напряжений $\boldsymbol{T}$ в узле k, получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения составляющих тензора напряжений в k-том узле, которую можно решить методом наименьших квадратов.

2. Применение процедуры восполнения напряжений при решении краевых задач. Описанная процедура восполнения напряжений использовалась для построения полей напряжений в двумерных задачах (плоской и осесимметричной) теории упругости при малых и конечных деформациях. Рассматривалось растяжение образца как перемещениями, так и усилиями, приложенными к его торцам, с большими градиентами. При решении нелинейных задач использовался метод последовательных нагружений [2] в рамках кинематики наложения малых деформаций на накопленные конечные.

Задачи решались при линейной (с использованием обычного метода усреднения по элементам, примыкающим к узлу), квадратичной и кубической аппроксимации поля перемещений; при линейной и квадратичной аппроксимации поля перемещений и использовании процедуры восполнения напряжений.

3. Заключение. Применение процедуры восполнения напряжений при решении линейных и нелинейных краевых задач теории упругости методом конечных элементов в рамках вариационной постановки Лагранжа позволяет получить поле напряжений того же порядка точности (степени аппроксимации), что и поле перемещений, в отличие от обычно используемых подходов.

1. *Rogovoy A. A.* The stress recovery procedure for the finite element method // *Computers and Structures*, 1997. — Vol. 63, No. 6. — P. 1121–1137.
2. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — М.: Мир, 1976. — 464 с.

Работа выполнена в научной школе (гранты Президента РФ НШ-8055.2006.1 и НШ-3717.2008.1) при частичной поддержке РФФИ (проект № 07-01-96019).

Институт механики сплошных сред УрО РАН,

614013, г. Пермь, ул. Ак. Королёва, 1.

sos@icmm.ru

УДК 539.3

В. В. Стружанов

О РАЦИОНАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ РАЗУПРОЧНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ ПО КРИТЕРИЮ ЖИВУЧЕСТИ

Рассмотрим стержневую систему, изображенную на рис. 1 [1]. Она состоит из двух параллельных стержней 1, 2, одним концом соединенных с неподвижной стенкой 5, а другим — с абсолютно жёстким поршнем 4, который перемещается поступательно на расстояние x. Поршень соединен с упругим стержнем 3, имеющим жёсткость c. Растяжение системы осуществляем, задавая перемещение u свободному концу стержня 3 (жёсткое нагружение).