В. П. Ильин, О расщеплении разностных уравнений параболического и эллиптического типов, *Сиб. матем. журн.*, 1965, том 6, номер 6, 1425–1428

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VI, № 6 Ноябрь — Декабрь 1965 г.

УДК 527.949.2

В. П. ИЛЬИН

О РАСЩЕПЛЕНИИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПОВ

Ценность метода для решения уравнений параболического и эллиптического типов определяется его необходимым машинным временем. С этой точки зрения методы расщепления многомерных уравнений на неявные ([1–7]), которые обеспечивают абсолютную устойчивость и большую скорость сходимости для параболических и эллиптических уравнений, имеют один недостаток: число арифметических операций, требуемое для просчета одного шага, увеличивается примерно вдвое по сравнению с явными методами.

Ниже предлагается некоторый новый подход к вопросу о расщеплении, позволяющий устранить этот недостаток. Обычно методы расщепления многомерных уравнений сводят решение общей задачи к последовательному решению на каждом промежуточном шаге одномерной разностной задачи методом прогонки.

Такая привязка разностного уравнения к исходному дифференциальному не обязательна. Можно рассматривать разностное уравнение независимо от типа исходной задачи. В таком случае способ расщепления разностного уравнения на «одномерные» не выглядит простейшим.

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla (D \nabla u). \tag{1}$$

Соответствующее разностное уравнение запишем в следующем виде (для пятиточечной схемы):

$$u_{ij}^{n+1} - u_{ij}{}^{n} + \alpha_n \Lambda u_{ij}^{n+1} = 0. \tag{2}$$

Здесь и далее мы полагаем $\Delta x = \Delta y = h$, $\alpha_n = \Delta t_n / h^2$,

$$\Lambda u_{ij} = p_{ij} u_{ij} - a_{ij} u_{i-1j} - b_{ij} u_{ij-1} - c_{ij} u_{i+1i} - d_{ij} u_{ij+1}, \tag{3}$$

где коэффициенты a, b, c, d, p могут быть переменными.

В задаче (1) не оговорены граничные условия. Далее мы рассматриваем только разностные уравнения и предполагаем, что граничные условия учитываются значениями коэффициентов разностного уравнения.

Для решения уравнения (2) предлагается следующий процесс:

$$
\begin{aligned}
u_{ij}^{n+1/2} &= u_{ij}{}^{n} - \frac{\alpha_n}{2}\Big(\frac{p_{ij}}{2}u_{ij}^{n+1/2} - a_{ij}u_{i-1j}^{n+1/2} - b_{ij}u_{ij-1}^{n+1/2} + \\
&\qquad + \frac{p_{ij}}{2}u_{ij}{}^{n} - c_{ij}u_{i+1j}^{n} - d_{ij}u_{ij+1}^{n}\Big), \\
u_{ij}^{n+1} &= u_{ij}^{n+1/2} - \frac{\alpha_n}{2}\Big(\frac{p_{ij}}{2}u_{ij}^{n+1/2} - a_{ij}u_{i-1j}^{n+1/2} - b_{ij}u_{ij-1}^{n+1/2} + \\
&\qquad + \frac{p_{ij}}{2}u_{ij}^{n+1} - c_{ij}u_{i+1j}^{n+1} - d_{ij}u_{ij+1}^{n+1}\Big).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Условие «пространственной» устойчивости по отношению к накоплению ошибок при счете одного временного шага имеет вид неравенств

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{\alpha_n}{4}(p_{ij}) &\geqslant \frac{\alpha_n}{2}(|a_{ij}| + |b_{ij}|), \\
1 + \frac{\alpha_n}{4}(p_{ij}) &\geqslant \frac{\alpha_n}{2}(|c_{ij}| + |d_{ij}|),
\end{aligned} \tag{5}
$$

которые должны выполняться для всех, кроме, может быть, некоторых отдельных точек.

Отсюда получаем, что для многих практически интересных задач, когда $a_{ij} + b_{ij} \leqslant p_{ij} / 2$, $c_{ij} + d_{ij} \leqslant p_{ij} / 2$ процесс (4) будет при любых α_n устойчив по отношению к накоплению ошибок.

Схему (4) можно рассматривать как итерационную для решения соответствующего стационарного уравнения. Тогда n будет означать номер итерации, а α_n — итерационный параметр.

Дальнейший анализ будем проводить в операторном виде, введя предварительно обозначения $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$,

$$
\begin{aligned}
\Lambda_1 u_{ij} &= \frac{p_{ij}}{2}u_{ij} - a_{ij}u_{i-1j} - b_{ij}u_{ij-1}, \\
\Lambda_2 u_{ij} &= \frac{p_{ij}}{2}u_{ij} - c_{ij}u_{i+1j} - d_{ij}u_{ij+1}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Тогда (4) примет вид

$$
\begin{aligned}
u_{ij}^{n+1/2} &= u_{ij}{}^{n} - \frac{\alpha_n}{2}(\Lambda_1 u_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 u_{ij}{}^{n}), \\
u_{ij}^{n+1} &= u_{ij}^{n+1/2} - \frac{\alpha_n}{2}(\Lambda_1 u_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 u_{ij}^{n+1/2}).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Очевидно, что с точностью до вида операторов Λ_1 и Λ_2 схема (7) совпадает с обычным методом продольно-поперечной прогонки. По аналогии с известным анализом докажем аппроксимации

$$\left(E+\frac{\alpha_n}{2}\Lambda_1\right)u^{n+1/2}=\left(E-\frac{\alpha_n}{2}\Lambda_2\right)u^n,$$
$$\left(E+\frac{\alpha_n}{2}\Lambda_2\right)u^{n+1}=\left(E-\frac{\alpha_n}{2}\Lambda_1\right)u^{n+1/2}, \tag{8}$$

$$\left(E+\frac{\alpha_n}{2}\Lambda_1\right)\left(E+\frac{\alpha_n}{2}\Lambda_2\right)u^{n+1}=\left(E-\frac{\alpha_n}{2}\Lambda_1\right)\left(E-\frac{\alpha_n}{2}\Lambda_2\right)u^n, \tag{9}$$

$$u^{n+1}+\frac{\alpha_n}{2}\Lambda u^{n+1}+\frac{\alpha_n^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2u^{n+1}=u^n-\frac{\alpha_n}{2}\Lambda u^n+\frac{\alpha_n^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2u^n, \tag{10}$$

или

$$u^{n+1}-u^n+\frac{\alpha_n}{2}\Lambda(u^{n+1}+u^n)+\frac{\alpha_n^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2(u^{n+1}-u^n)=0. \tag{11}$$

Последний член в уравнении (11) более высокого порядка малости по сравнению с другими, откуда и следует необходимая аппроксимация.

Рассмотрим теперь собственное число процесса λ. Имеем

$$u^{n+1}=\left(E+\frac{\alpha_n}{2}\Lambda+\frac{\alpha_n^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2\right)^{-1}\left(E-\frac{\alpha_n}{2}\Lambda+\frac{\alpha_n^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2\right)u^n, \tag{12}$$

$$\lambda\leqslant\left\|\left(E+\frac{\alpha_n}{2}\Lambda+\frac{\alpha_n^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2\right)^{-1}\left(E-\frac{\alpha_n}{2}\Lambda+\frac{\alpha_n^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2\right)\right\|. \tag{13}$$

Если Λ и $\Lambda_1\Lambda_2$ — положительно полуопределенные операторы, то в силу теоремы Дугласа и Пирса ([8]), $\lambda<1$. Отсюда и вытекает сходимость.

Преимущество схемы (4) состоит в простоте реализации. Алгоритм вычисления одного полушага представляет явную схему, напоминающую обычный метод последовательных смещений или же аналогичную методу «неполной факторизации» ([6]). Выигрыш по числу операций на одном шаге по сравнению со случаем проведения прогонок по линиям примерно вдвое. Схема (7) обобщается и на многомерные задачи, необходимо только определить соответствующим образом Λ_1 и Λ_2. При этом расщепление всегда производится только на два оператора, таких, чтобы можно было организовать счет на полушаге по явной схеме. Преимущество схемы повышается с увеличением размерности задачи.

Рассмотрим в качестве примера расщепление для трехмерного уравнения теплопроводности. Пусть разностное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}\overset{n+1}{u}_{ijk}&=\overset{n}{u}_{ijk}+\alpha_n(p\overset{n+1}{u}_{ijk}-au_{i-1jk}-b\overset{n+1}{u}_{ij-1k}-\\&-c\overset{n+1}{u}_{ijk-1}-d\overset{n+1}{u}_{i+1jk}-e\overset{n+1}{u}_{ij+1k}-f\overset{n+1}{u}_{ijk+1}.\end{aligned} \tag{14}$$

Определяя в схеме (7) операторы Λ_1 и Λ_2 следующим образом:

$$\Lambda_1u_{ijk}=\frac{p}{2}u_{ijk}-au_{i-1jk}-bu_{ij-1k}-cu_{ijk-1},$$

$$\Lambda_2u_{ijk}=\frac{p}{2}u_{ijk}-du_{i+1jk}-eu_{ij+1k}-fu_{ijk+1}, \tag{15}$$

получим процесс, который для многих практически интересных задач является абсолютно устойчивым.

Приведенная схема для двумерного и одномерного случаев была опробована в практических расчетах, подтвердивших устойчивость метода при различных α_n.

Выше не рассматривался вопрос об улучшении сходимости итераций. Анализ спектра собственных чисел оператора удается провести только для простейших случаев. Можно ожидать, что применение релаксационных или других методов ускорения сходимости даст положительный эффект, однако этот вопрос требует специального исследования.

Рассмотренная схема расщепления оператора на «явные» может быть применена к другим известным методам переменных направлений.

Так, в методе Дугласа — Ракфорда ([2])

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= u^n - \alpha_n(\Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^n), \\ u^{n+1} &= u^{n+1/2} - \alpha_n \Lambda_2 (u^{n+1} - u^n) \end{aligned} \tag{16}$$

или в схеме дробных шагов Н. Н. Яненко ([3])

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= u^n - \alpha_n(\Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_1 u^n), \\ u^{n+1} &= u^{n+1/2} - \alpha_n(\Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^{n+1/2}) \end{aligned} \tag{17}$$

операторы Λ_1 и Λ_2 можно определить в соответствии с (6) или (15). Анализ сходимости в этих случаях проводится аналогично.

В заключение автор выражает благодарность Г. И. Марчуку и Н. Н. Яненко за внимание к работе и полезные замечания.

Поступило
4.V.1964

ЛИТЕРАТУРА

[1] Peaceman P. W. and Rackford H. H., The numerical solution of parabolic and elliptic equations, J. Soc. Industr. and Appl. Math., 3, № 1 (1955), 28—41.

[2] Douglas L. and Rackford H. H., The numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables, Trans. Amer. Soc. 82, № 2 (1956), 421—439.

[3] Яненко Н. Н., Об экономичных неявных схемах (метод дробных шагов), Доклады Ак. наук СССР, 134, № 5 (1960), 720—731.

[4] Самарский А. А., Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1, № 4 (1962), 208—219.

[5] Дьяконов Е. Г., Решение некоторых многомерных задач математической физики при помощи метода сеток, Диссертация, Матем. ин-т Сиб. отделения Ак. наук СССР, Новосибирск, 1962.

[6] Булеев Н. И., Численный метод решения двумерных и трехмерных уравнений диффузии, Матем. сб., 51, № 2 (1960), 63—69.

[7] Oliphant T. A., A note on extrapolation procedures for solving linear sistem. Quart Appl. Math., XXI, № 1 (1963), 14.

[8] Douglas L., Pearse C., On Convergance of alternating direction procedures in the presence of singular operators, Numer. Math., 5, № 2 (1963), 67—74.

[9] Вазов В. и Форсайт Дж., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, М., 1963.