V. A. Antonov, On groups with a lattice of centralizers that is a sublattice of the lattice of subgroups,
Algebra Logika, 1994, Volume 33, Number 5, 475–513

Алгебра и логика, 33, N 5 (1994), 475—513

УДК 512.54

О ГРУППАХ С РЕШЕТКОЙ ЦЕНТРАЛИЗАТОРОВ, ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ ПОДРЕШЕТКОЙ РЕШЕТКИ ПОДГРУПП

В. А. АНТОНОВ

Введение

В произвольной группе G множество всевозможных централизаторов подгрупп группы G относительно операций $A \wedge B = A \cap B$ и $A \vee B = C(C(A) \cap C(B))$ образуют полную решетку — решетку централизаторов группы G, которую мы обозначим через $\mathfrak{C}(G)$. По-видимому, впервые решетка централизаторов группы в явном виде была введена в работе Р. Шмидта [1] в 1970 г. За истекшее после этой публикации время сложилось целое направление в теории групп — исследование групп с ограничениями, наложенными на свойства их решеток централизаторов. К таким ограничениям можно отнести различные условия конечности (в первую очередь, условие минимальности для централизаторов), ограничения решеточного характера (дистрибутивность, модулярность, наличие дополнений), условия определяемости групп решеткой их централизаторов.

При исследовании групп с ограничениями на решетку централизаторов представляет интерес изучение групп, в которых ограничения накладываются на связь решетки $\mathfrak{C}(G)$ с решеткой $\mathfrak{L}(G)$ подгрупп группы G.

В. Гашюц [2] описал конечные группы, в которых решетка централизаторов совпадает с решеткой подгрупп ($\mathfrak{C}(G) = \mathfrak{L}(G)$). Этот результат легко переносится на класс локально конечных групп [3]. Естественным обобщением групп Гашюца являются группы, у которых решетка цен-

трализаторов совпадает с интервалом $[Z(G),G]$ решетки подгрупп $\mathfrak{L}(G)$. Такие группы исследовали М. Реутхер [4], Ю. Ченг [5, 6] и автор [7]. В [7] дано полное описание таких групп с локально конечной фактор-группой по центру. Там же исследовались группы, у которых решетка централизаторов является гомоморфным образом решетки подгрупп. Точнее, описаны группы с локально конечной фактор-группой по центру, в которых отображение $H \to C(C(H))$ является гомоморфизмом решетки $\mathfrak{L}(G)$ подгрупп группы G (более общо, интервала $[Z(G),G]$ решетки $\mathfrak{L}(G)$) на решетку $\mathfrak{C}(G)$ централизаторов группы G.

Наиболее интересной и сложной здесь является задача изучения групп, у которых решетка централизаторов является подрешеткой решетки подгрупп ($\mathfrak{C}(G) \leq \mathfrak{L}(G)$). Заметим, что группы из [2, 4—7] удовлетворяют этому условию. Сюда же входят группы Фробениуса, у которых дополнительный множитель абелев и действует на ядре неприводимо, а также группы первого типа из [8] и ряд других групп.

Обозначим через $l(G)$ длину решетки $\mathfrak{C}(G)$. Следуя [1], неабелеву группу, в которой все собственные централизаторы абелевы, т.е. $l(G) = 2$, назовем *$\mathfrak{M}$-группой*. Запись $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$ означает, что решетка $\mathfrak{L}$ есть прямая сумма подрешеток $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$. Если L, L_1 и L_2 — единицы этих решеток, то будем также употреблять запись $L = L_1 \oplus L_2$.

Положим $C^2(M) = C(C(M))$ для любого подмножества M группы G. Таким образом, $C^2(M)$ — это наименьший централизатор, содержащий множество M. Пусть $A \in \mathfrak{C}(G)$. Тогда $A = C(M)$ для некоторого подмножества M группы G. Неравенство $A \leq C^2(A)$ очевидно. В то же время из $M \leq C^2(M)$ следует, что $A = C(M) \geq C(C^2(M)) = C^2(C(M)) = C^2(A)$, поэтому $A = C^2(A)$. Таким образом, подгруппа A группы G в том и только том случае является централизатором ($A \in \mathfrak{C}(G)$), когда $A = C^2(A)$.

В произвольной группе G отображение $C : H \to C(H)$, которое каждому элементу H из $\mathfrak{C}(G)$ ставит в соответствие его централизатор, является инволютивным антиавтоморфизмом решетки $\mathfrak{C}(G)$. Если A — максимальная абелева подгруппа группы G, то $C(A) = A$. Это означает, в частности, что интервалы $[Z(G),A]$ и $[A,G]$ решетки $\mathfrak{C}(G)$ дуальны.

Пусть теперь $\mathfrak{C}(G) \leq \mathfrak{L}(G)$. Тогда интервал $[Z(G), A]$, являясь подрешеткой решетки подгрупп абелевой группы A, модулярен. А следовательно, модулярен и интервал $[A, G]$. Таким образом, если решетка централизаторов группы G является подрешеткой решетки подгрупп, то группа G как бы покрывается неким подобием ковра, состоящим из модулярных интервалов решетки централизаторов вида $[Z(G), A]$ и $[A, G]$, где A — максимальная абелева подгруппа из G.

Это позволяет сформулировать следующую гипотезу [9, проблема 11.4].

0.1. **ГИПОТЕЗА.** *Если в группе G решетка централизаторов является подрешеткой решетки подгрупп, то решетка $\mathfrak{C}(G)$ модулярна.* □

Мы докажем эту гипотезу для двух классов групп с решеткой централизаторов конечной длины — для групп с нормализаторным условием и для локально конечных групп. А также исследуем строение локально конечных групп, у которых решетка централизаторов имеет конечную длину и является подрешеткой решетки подгрупп. При этом мы будем следовать идеям из работ [10—12], в которых эта гипотеза доказана для конечных групп.

Непосредственным следствием теоремы 1 из [8] является следующее утверждение, позволяющее нам ограничиться случаем неразложимой в прямую сумму решетки централизаторов.

0.2. **ТЕОРЕМА.** *Пусть G — группа, решетка централизаторов которой имеет конечную длину и является подрешеткой решетки подгрупп. Решетка $\mathfrak{C}(G)$ в том и только том случае разлагается в прямую сумму подрешеток $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, когда G является центральным произведением таких подгрупп G_1 и G_2, что $\mathfrak{L}_1 \cong \mathfrak{C}(G_i)$, $i = 1, 2$, и множества коммутаторов подгрупп G_1 и G_2 пересекаются по единице.* □

§ 1. Группы с нормализаторным условием

Напомним, что элемент A решетки $\mathfrak{L}$ называется *неразложимым*,

если из $A = B \vee C$ следует либо $A = B$, либо $A = C$. Если $\mathfrak{L}$ — решетка с нулем, то *высотой* элемента $A \in \mathfrak{L}$ называется длина интервала $[0, A]$ этой решетки. Элемент A покрывает B, если $A > B$ и интервал $[B, A]$ прост. Элемент, покрывающий 0, называется *атомом* решетки $\mathfrak{L}$.

Заметим, что $N(A) \leq N(C(A))$ для любой подгруппы A группы G. Если $A \in \mathfrak{C}(G)$, то из $A = C^2(A)$ получаем $N(A) \leq N(C(A)) \leq$ $\leq N(C^2(A)) = N(A)$, т.е. $N(A) = N(C(A))$.

1.1. **ЛЕММА.** *Пусть G — группа с нормализаторным условием, A — атом решетки $\mathfrak{C}(G)$. Если $\mathfrak{C}(G) \leq \mathfrak{L}(G)$, то $A \lhd G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A — неинвариантный в G атом решетки $\mathfrak{C}(G)$, то $N(C(A)) = N(A) \neq G$. Положим $H = N(N(A))$. Тогда $H > N(A)$. Для любого $g \in H \backslash N(A)$ выполняются условия $C(A)^g \leq N(A)$ и $C(A)^g \neq C(A)$. Так как $C(A)$ — коатом решетки $\mathfrak{C}(G)$, то должно выполняться равенство $C(A) \vee C(A)^g = G$, что противоречит неравенству $\langle C(A), C(A)^g \rangle \leq N(A) \neq G$. □

1.2. **СЛЕДСТВИЕ.** *Пусть G — группа с нормализаторным условием и $\mathfrak{C}(G) \leq \mathfrak{L}(G)$. Тогда для любых двух атомов B и C решетки $\mathfrak{C}(G)$ подгруппа $B \vee C$ либо абелева, либо $\mathfrak{M}$-группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathfrak{C}(G) \leq \mathfrak{L}(G)$, то $B \vee C = \langle B, C \rangle$. С учетом леммы 1.1 имеем $B \vee C = BC$. Если $M \in \mathfrak{C}(G)$ и $B \leq M \leq BC$, то $M = B(M \cap C)$. А так как C — атом, то либо $M \cap C = C$, либо $M \cap C =$ $= Z(G)$. Это означает, что B максимальна в $B \vee C$. Если $B \vee C$ неабелева и не является $\mathfrak{M}$-группой, то в ней найдется ряд централизаторов вида

$$Z(G) < T_1 < T_2 < BC.$$

Ввиду одновременной минимальности и максимальности централизатора B в BC, получаем $BT_1 = BC = BT_2$ и $B \cap T_1 = B \cap T_2 = Z(G)$, что невозможно. □

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства решетки централизаторов.

1.3. **ЛЕММА.** *Пусть A — неразложимый элемент конечной высоты из решетки централизаторов $\mathfrak{C}(G)$ группы G. Тогда $A = C^2(x)$*

для некоторого элемента x группы G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A = Z(G)$, то $A = C^2(1)$, где 1 — единица группы G. Если же $A > Z(G)$ и B — элемент, покрываемый A, то для $x \in A \setminus B$ получим $A \geq C^2(x) \vee B > B$. Отсюда $A = C^2(x) \vee B$. Так как A неразложима, то $A = C^2(x)$. □

1.4. **СЛЕДСТВИЕ.** *Если A — неразложимый элемент конечной высоты из $\mathfrak{C}(G)$, то подгруппа A абелева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\langle x \rangle \leq C(x)$, то $A = C^2(x) \leq$ $\leq C^2(C(x)) = C(C^2(x)) = C(A)$, т.е. $A = Z(C(A))$. □

1.5. **СЛЕДСТВИЕ.** *Если A — атом решетки $\mathfrak{C}(G)$, то $A \leq$ $\leq C(A)$.* □

1.6. **ЛЕММА.** *Пусть G — группа, в которой решетка централизаторов является подрешеткой решетки подгрупп. Если $H \in \mathfrak{C}(G)$, то решетка $\mathfrak{C}(H)$ совпадает с интервалом $[Z(H), H]$ решетки $\mathfrak{C}(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H \in \mathfrak{C}(G)$. Отметим, что если $K \in$ $\in \mathfrak{C}(H)$, то $K \in \mathfrak{C}(G)$. В самом деле, если $K = C_H(M)$ и $H = C(T)$, то

$$K = C(M) \cap H = C(M) \cap C(T) = C(M \cup T) \in \mathfrak{C}(G).$$

Пусть теперь K — такой элемент из $\mathfrak{C}(G)$, что $Z(H) \leq K \leq H$. Тогда $C(H) \leq C(K) \leq C(Z(H))$ и из $C(Z(H)) = C(H \cap C(H)) = C(H) \vee$ $\vee C^2(H) = C(H) \cdot H$ получаем $C(K) = C(K) \cap [C(H) \cdot H] = C(H) \cdot C_H(K)$. Отсюда $K = C(C(K)) = C(C(H) \cdot C_H(K)) = C^2(H) \cap C(C_H(K)) =$ $= C_H(C_H(K)) \in \mathfrak{C}(H)$. □

1.7. **ЛЕММА.** *Пусть G — группа с нормализаторным условием. Предположим, что G удовлетворяет условию минимальности для централизаторов и $\mathfrak{C}(G) \leq \mathfrak{L}(G)$. Если A и B — такие элементы из $\mathfrak{C}(G)$, что A покрывает B, то $B \lhd A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как G удовлетворяет условию минимальности для централизаторов, то можно считать, что все собственные централизаторы из G удовлетворяют заключению леммы, т.е. если $H \in \mathfrak{C}(G)$, $H \neq G$, A и B — такие элементы из $\mathfrak{C}(H)$, что A покрывает B, то $B \lhd A$.

Ввиду 1.1 все атомы и все коатомы решетки $\mathfrak{C}(G)$ инвариантны в G. Поэтому $l(G) > 2$ и $A \neq G$. Пусть T — произвольный атом из $C(A)$. Если $B \geq T$, то по $C(T) \geq A > B \geq T$ и лемме 1.6 элементы A и B являются элементами решетки $\mathfrak{C}(C(T))$ и, по предположению индукции, $B \lhd A$. Если же $A = BT$, то из $T \leq A \cap C(A) = Z(A)$ снова получим $B \lhd A$. Предположим теперь, что $A \cap T = Z(G)$ для любого атома T из $C(A)$. Тогда $A \cap C(A) = Z(G)$. Отсюда $G = AC(A)$. В этом случае B является коатомом решетки $\mathfrak{C}(A)$, и остается использовать лемму 1.1. □

1.8. **ТЕОРЕМА.** *Пусть G — группа с нормализаторным условием, решетка централизаторов которой имеет конечную длину и является подрешеткой решетки подгрупп. Тогда решетка $\mathfrak{C}(G)$ модулярна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если A, B и C — такие элементы из $\mathfrak{C}(G)$, что $A \geq B$ и $B \vee C = BC$, то $A \cap (B \vee C) = A \cap (BC) = B(A \cap C) = B \vee (A \cap C)$. Поэтому нам достаточно показать, что для любых двух централизаторов B и C из $\mathfrak{C}(G)$ выполняется равенство $B \vee C = BC$.

Доказательство этого равенства проведем индукцией по длине интервала $[B, B \vee C]$. Если $B \vee C$ покрывает B, то, по лемме 1.7, $B \lhd (B \vee C)$. Но тогда $B \vee C = \langle B, C \rangle = BC$. Предположим теперь, что длина интервала $[B, B \vee C]$ больше единицы.

Пусть T — такой элемент из $\mathfrak{C}(G)$, что $B < T$ и T максимален в $B \vee C$. Тогда $B \vee C = T \cdot C^2(x)$ для некоторого $x \in C \backslash T$. Отсюда $C = (C \cap T)C^2(x)$. По предположению индукции,

$$B \vee C = [B \vee (C \cap T)] \vee C^2(x) = [B(C \cap T)] \vee C^2(x).$$

Если $B(C \cap T) > B$, то снова, применяя предположение индукции, получаем $[B(C \cap T)] \vee C^2(x) = [B(C \cap T)] \cdot C^2(x) = BC$. Предположим поэтому, что $C \cap T \leq B$, т.е. $C \cap T = C \cap B$. Так как $T \cdot C^2(x)$ покрывает T, то $T \cap C$ максимален в C и, следовательно, интервал $[B \cap C, C]$ прост. В силу дуальности прост и интервал

$$[C(C), C(B \cap C)] = [C(C), C(C) \vee C(B)].$$

По уже доказанному $C(B) \vee C(C) = C(B) \cdot C(C)$. Из максимальности $C(C)$ в $C(B) \cdot C(C)$ вытекает максимальность $C(B) \cap C(C)$ в $C(B)$. Но тогда из простоты интервала $[C(B) \cap C(C), C(B)]$ и дуальности его интервалу $[B, B \vee C]$ получаем, что $B \vee C$ покрывает B, что противоречит нашему предположению. □

1.9. **СЛЕДСТВИЕ.** *Пусть G — периодическая локально нильпотентная группа, решетка централизаторов которой имеет конечную длину и является подрешеткой решетки подгрупп. Тогда решетка $\mathfrak{C}(G)$ модулярна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Р. Брайант [13] показал, что локально нильпотентная периодическая группа с условием минимальности для централизаторов обладает возрастающим центральным рядом, т.е. является ZA-группой. Поэтому группа G удовлетворяет нормализаторному условию (см. [14, с. 392]) и по теореме 1.8 решетка $\mathfrak{C}(G)$ модулярна. □

§ 2. Локально конечные группы, удовлетворяющие гипотезе

Цель данного параграфа — получить некоторые результаты о строении локально конечных групп, решетка централизаторов которых имеет конечную длину и удовлетворяет гипотезе 0.1. Для этого нам потребуется один результат о расщепляемых локально конечных группах.

2.1. **ЛЕММА.** *Пусть G — локально конечная группа, обладающая таким абелевым нормальным расщеплением, что для любых двух компонент A и B этого расщепления выполняется равенство $\langle A, B \rangle = G$. Тогда либо G — элементарная абелева группа, либо G — группа Фробениуса, дополнительный множитель которой абелев и действует на ядре неприводимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из [15]. □

В дальнейшем условимся через $\bar{M}$ обозначать образ множества M при естественном гомоморфизме группы G на фактор-группу $G/Z(G)$.

2.2. **СЛЕДСТВИЕ.** *Если G — локально конечная $\mathfrak{M}$-группа, решетка централизаторов которой является подрешеткой решетки под-*

групп, то либо $\bar{G}$ — группа Фробениуса, дополнительный множитель которой абелев и действует на ядре неприводимо, либо $\bar{G}$ — элементарная абелева группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в группе G все истинные централизаторы абелевы, то они совпадают с максимальными абелевыми подгруппами группы G. Поэтому если A и B — различные максимальные абелевы подгруппы из G, то $A \cap B = Z(G)$ и $\langle A, B\rangle = G$. Это означает, в частности, что максимальные абелевы подгруппы $\mathfrak{M}$-группы G индуцируют расщепление фактор-группы $\bar{G}$, и далее остается применить лемму 2.1. □

Строение локально конечной p-группы из следствия 2.2. уточняет

2.3. **ЛЕММА.** *Пусть G — локально конечная примарная $\mathfrak{M}$-группа и $\mathfrak{C}(G) \leq \mathfrak{L}(G)$. Если A и B — различные максимальные абелевы подгруппы группы G, то найдется такое множество индексов I, что $\bar{A} = \prod\limits_{i\in I}\langle\bar{a}_i\rangle$, $\bar{B} = \prod\limits_{i\in I}\langle\bar{b}_i\rangle$ и для любого $a \in A\backslash Z(G)$ выполняется равенство $G' = \prod\limits_{i\in I}\langle[a, b_i]\rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем элементы $a_1 \in A\backslash Z(G)$ и $b_1 \in B\backslash Z(G)$ и рассмотрим $C(a_1b_1)$. Так как G является $\mathfrak{M}$-группой, то $C(a_1b_1)$ абелев. Пусть

$$\overline{C(a_1b_1)} = \langle\overline{a_1b_1}\rangle \times \prod_{k\in K}\langle\overline{a_kb_k}\rangle,$$

где $a_k \in A$ и $b_k \in B$. Из равенства $A \cdot C(a_1b_1) = G = B \cdot C(a_1b_1)$ следует, что

$$\langle\bar{b}_1\rangle \times \prod_{k\in K}\langle\bar{b}_k\rangle = \bar{B} \text{ и } \langle\bar{a}_1\rangle \times \prod_{k\in K}\langle\bar{a}_k\rangle = \bar{A}.$$

Обозначим множество $\{1\} \cup K$ через I. Тогда

$$\bar{A} = \prod_{i\in I}\langle\bar{a}_i\rangle, \quad \bar{B} = \prod_{i\in I}\langle\bar{b}_i\rangle, \quad \overline{C(a_1b_1)} = \prod_{i\in I}\langle\overline{a_ib_i}\rangle.$$

Из равенства $[a_1b_1, a_ib_i] = 1$ получаем $[a_1, b_i] = [a_i, b_1]$. Отсюда $[a_1, B] = [A, b_1]$. Ввиду произвольности b_1 имеем $[a_1, B] = [A, B] = G'$. Таким образом, $G' = \langle[a_1, b_i] | i \in I\rangle$. Если система элементов $\{[a_1, b_i] | i \in I\}$ зависима, то для некоторого $i \in I$

$$[a_1, b_i] = \prod_{j\neq i}[a_1, b_j]^{k_j}.$$

Тогда

$$[a_1, b_i^{-1} \prod_{j \neq i} b_j^{k_j}] = 1, \text{ т.е. } \prod_{j \neq i} \bar{b}_j^{k_j} = \bar{b}_i,$$

что невозможно. Это означает, что $G' = \prod_{i \in I} \langle [a_1, b_i] \rangle$. □

Заметим, что если в условиях леммы 2.3 группа G конечна, то $|\bar{A}| = |\bar{B}| = |G'| = p^m$ для некоторого числа m и $|\bar{G}| = p^{2m}$.

Пусть G — периодическая локально нильпотентная группа, решетка централизаторов которой имеет конечную длину и является подрешеткой решетки подгрупп. В силу следствия 1.9 решетка $\mathfrak{C}(G)$ модулярна. Благодаря теореме 0.2 нам достаточно рассмотреть случай неразложимой в прямую сумму решетки централизаторов. А по теореме 2.4 и лемме 2.5 из [1] группу G в этом случае можно считать примарной. Некоторые сведения о строении таких групп дает следующая

2.4. ТЕОРЕМА. *Пусть G — локально конечная p-группа. Предположим, что решетка $\mathfrak{C}(G)$ неразложима в прямую сумму подрешеток, имеет конечную длину и является подрешеткой решетки подгрупп. Если $Z(G) = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ — произвольный неуплотняемый ряд централизаторов, то этот ряд субнормален и все его факторы являются изоморфными элементарными абелевыми группами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1.7 и доказательства теоремы 1.8 следует, что $H_i \lhd H_{i+1}$ при всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и для любых A и B из $\mathfrak{C}(G)$ справедливо равенство $A \vee B = A \cdot B$. Пусть $x \in H_{i+1} \setminus H_i$. Тогда $H_{i+1} = H_i C^2(x)$. Отсюда $H_{i+1}/H_i \cong C^2(x)/(C^2(x) \cap H_i)$. Из $C(x) \ni x$ следует $C^2(x) \leq C(x)$, т.е. $C^2(x) = Z(C(x))$. Поэтому нам достаточно рассмотреть случай абелевой группы H_{i+1}.

Пусть $y \in C(H_i) \setminus C(H_{i+1})$. Так как $C(H_i)$ покрывает $C(H_{i+1})$, то $C(H_i) = C(H_{i+1}) \cdot C^2(y)$ и $C^2(y)$ покрывает $C^2(y) \cap C(H_{i+1})$. Обозначим через A группу $H_{i+1} \vee C^2(y)$. Централизатор $C_A(H_{i+1}) = H_{i+1}(C(H_{i+1}) \cap \cap C^2(y))$ абелев и максимален в A. В силу теоремы 1.8, решетка $\mathfrak{C}(C(A))$ модулярна. Поэтому A является $\mathfrak{M}$-группой. По следствию 2.2 факторгруппа $A/Z(A)$, а следовательно, и H_{i+1}/H_i являются элементарными абелевыми группами.

Покажем теперь, что все факторы ряда изоморфны. Пусть A и B — атомы решетки $\mathfrak{C}(G)$. Так как $\mathfrak{C}(G)$ неразложима в прямую сумму подрешеток, то по теоремам 1 и 3 из [16] ее нижний слой (т.е. подрешетка, порожденная атомами) тоже неразложим в прямую сумму. Поэтому группа $A \vee B$ содержит отличный от A и B атом C решетки $\mathfrak{C}(G)$. Из равенств $AB = AC = BC$, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = Z(G)$ получаем $\bar{A} \cong \bar{B} \cong \bar{C}$.

Индукцией по числу $l(G)$ покажем, что если H покрывает K, то $H/K \cong \bar{A}$, где A — некоторый атом решетки $\mathfrak{C}(G)$. Как и выше, нам достаточно рассмотреть случай абелевой группы H. Если $l(G) = 2$, то G является $\mathfrak{M}$-группой и утверждение очевидно. Пусть $l(G) > 2$, B — атом из K и A — атом, отличный от B. Если $A \not\leq C(B)$, то $Z(A \vee B) = Z(G)$ и $G = (A \vee B) \vee C(A \vee B)$. Из $l(G) > 2$ следует, что $C(A \vee B) \neq Z(G)$, т.е. $C(A \vee B)$ содержит атомы решетки $\mathfrak{C}(G)$. Поэтому мы можем считать, что $A \leq C(B)$. В этом случае $A \vee B$ является атомом решетки $\mathfrak{C}(C(B))$. В силу предположения индукции $H/K \cong AB/B \cong \bar{A}$. □

Для случая, когда решетка $\mathfrak{C}(G)$ обладает дополнениями, теорему 2.4 уточняет

2.5. **ТЕОРЕМА.** *Пусть G — локально конечная p-группа, решетка централизаторов которой модулярна, неразложима в прямую сумму, обладает дополнениями и является подрешеткой решетки подгрупп. Тогда G можно представить в виде центрального произведения таких $\mathfrak{M}$-групп G_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, что выполняются следующие условия:*

1. *Фактор-группа $G_i/Z(G_i)$ является элементарной абелевой группой, и для любых двух максимальных абелевых подгрупп A_i и B_i группы G_i выполняется равенство $A_iB_i = G_i$.*

2. *$G_i' = G_j'$ для всех i, $j = 1, 2, \ldots, n$.*

3. *Если A_i и B_i — различные максимальные абелевы подгруппы группы G_i, а элементы a_{ij} и b_{ij} выбраны так, что*

$$A_i/Z(G_i) = \prod_j \langle a_{ij} Z(G_i) \rangle \text{ и } B_i/Z(G_i) = \prod_j \langle b_{ij} Z(G_i) \rangle,$$

то из справедливости равенств

а) $[a_{i1}, b_{ij}] = [a_{ij}, b_{i1}]$ *при всех i и j,*

б) $[a_{11}, b_{1j}] = [b_{ij}, a_{i1}]$ *при всех* j *и* $i \neq 1$

следует справедливость равенств $[a_{1j}, b_{1l}] = [b_{kl}, a_{kj}]$ *при всех* j, l *и* $k \neq 1$.

Для конечных групп справедливо и обратное утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — группа, удовлетворяющая условию теоремы. Если G — $\mathfrak{M}$-группа, то нам достаточно использовать лемму 2.3. Предположим поэтому, что $l(G) > 2$.

Пусть A — атом решетки $\mathfrak{C}(G)$, B — атом, дополняющий $C(A)$. Ввиду следствия 1.2, группа $A_\vee B$ является $\mathfrak{M}$-группой. Из $Z(G) = Z(A_\vee B)$ получаем $G = (A_\vee B)_\vee C(A_\vee B) = (A_\vee B) \cdot C(A_\vee B)$. Это означает, что группу G можно представить в виде центрального произведения $\mathfrak{M}$-групп.

Пусть

$$G = \prod_{i=1}^{n} G_i \text{ — такое представление.}$$

Из 2.3 следует, что $\bar{G}_i = \bar{A}_i \times \bar{B}_i$, где

$$\bar{A}_i = \prod_{j \in J} \langle \bar{a}_{ij} \rangle, \quad \bar{B}_i = \prod_{j \in J} \langle \bar{b}_{ij} \rangle.$$

Докажем, что $G_i' = G_j'$. Предположим для определенности, что $i = 1$ и $j = 2$. Так как группы G_1 и G_2 двуступенно нильпотентны, то в них каждый элемент из коммутанта является коммутатором. Если $G_1' \neq G_2'$, то найдется либо элемент $x \in G_1' \backslash G_2'$, либо элемент $y \in G_2' \backslash G_1'$. Пусть $x \in G_1' \backslash G_2'$. Можно считать, что $x = [a_{11}, b_{11}]$. Положим $H_1 = \langle a_{11}, b_{11} \rangle$ и $H = H_1 G_2$. По теореме 0.2, $\mathfrak{C}(H) = \mathfrak{C}(H_1) \oplus \mathfrak{C}(G_2)$. Это означает, в частности, что группа $\langle a_{11}, A_2 \rangle$ содержит в точности два централизатора решетки $\mathfrak{C}(H)$: $\langle a_{11} \rangle Z(G)$ и A_2. Но тогда для любого отличного от A_1 и A_2 атома L решетки $\mathfrak{C}(G)$ выполняется равенство $\langle a_{11}, A_2 \rangle \cap L = Z(G)$. Решетка $\mathfrak{C}(G)$ модулярна, имеет конечную длину, неразложима в прямую сумму и является решеткой с дополнениями. По теореме IV.10 из [17], $\mathfrak{C}(G)$ является проективной геометрией. Поэтому прямая $A_1 \vee A_2$ этой геометрии содержит более двух точек, т.е. $A_1 \vee A_2$ содержит отличный от A_1 и A_2 атом L решетки $\mathfrak{C}(G)$. Но тогда $A_1 A_2 = A_2 L$, что противоречит равенству $\langle a_{11}, A_2 \rangle \cap L = Z(G)$.

Таким образом, $G_i' = G_j'$. Покажем теперь, что группа G удовлетворяет условию 3 из заключения теоремы 2.5. Возьмем в группе G эле-

мент $x = \prod_{i=1}^{n} a_{i1}$ и найдем его централизатор. Образующие элементы b_{1j} выберем произвольно, а элементы b_{ij} при $i > 1$ выберем так, чтобы выполнялись равенства $[a_{11}, b_{1j}] = [b_{ij}, a_{i1}]$. Это сделать можно, так как из $G_1' = G_i'$ и леммы 2.3 следует, что $[a_{11}, B_1] = G_1' = G_i' = [B_i, a_{i1}]$. Тогда, как нетрудно видеть, выполняется неравенство

$$\overline{C(x)} \geq \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i} \times \prod_{i=2}^{n} (\prod_{j} \langle \overline{b_{1j} b_{ij}} \rangle).$$

Элементы a_{ij} при $j > 1$ выберем так, чтобы выполнялись равенства $[a_{i1}, b_{ij}] = [a_{ij}, b_{i1}]$. Такой выбор возможен в силу равенства $[a_{i1}, B_i] = G_i' = [A_i, b_{i1}]$. Тогда

$$\overline{C^2(x)} \leq \overline{C_{\prod_{i=1}^{n} A_i}(\prod_{i=2}^{n} \langle b_{11} b_{i1} \rangle)} = \prod_{j} \overline{\langle \prod_{i=1}^{n} a_{ij} \rangle}.$$

Учитывая, что для $\mathfrak{M}$-группы $H = B_1 \vee C^2(x)$ должны выполняться равенства $H' = G' = [C^2(x), b_{11}]$, получим равенство

$$\overline{C^2(x)} = \prod_{j} (\langle \prod_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij} \rangle).$$

Отсюда следуют равенства $[a_{1j}, b_{1l}] = [b_{kl}, a_{kj}]$.

Итак, группа G имеет строение, указанное в заключении теоремы 2.5. Пусть теперь G — конечная группа, имеющая строение, указанное в заключении теоремы 2.5. Ввиду замечания, сделанного после доказательства леммы 2.3, G — группа первого типа из [8] и нам достаточно использовать теорему 3 из [8]. □

В следующей теореме исследуются непримарные группы, удовлетворяющие гипотезе 0.1.

2.6. **ТЕОРЕМА.** *Пусть G — локально конечная группа с модулярной решеткой централизаторов конечной длины. Если решетка $\mathfrak{C}(G)$ неразложима в прямую сумму подрешеток и является подрешеткой решетки подгрупп, то либо фактор-группа $\bar{G}$ примарна, либо в решетке $\mathfrak{C}(G)$ найдется такой инвариантный в G атом A, что $\overline{C(A)}$ является p-группой для некоторого простого числа p, а $G/C(A)$ — локально циклическая p'-группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства разобьем доказательство теоремы на ряд отдельных утверждений. В дальнейшем G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы 2.6. Если G является $\mathfrak{M}$-группой, то достаточно использовать следствие 2.2. Поэтому будем считать, что $l(G) > 2$. Как и в [16], через $\omega(G)$ обозначим сумму атомов решетки $\mathfrak{C}(G)$. Так как $\mathfrak{C}(G)$ неразложима в прямую сумму подрешеток, то, в силу теорем 1 и 3 из [16], интервал $[Z(G),\omega(G)]$ тоже неразложим в прямую сумму. Но тогда этот интервал, являясь неразложимой в прямую сумму модулярной решеткой с дополнениями, является проективной геометрией (см. теорему IV.10 из [17]).

В дальнейшем нам неоднократно придется использовать из [18] следующие:

2.6.0. **УТВЕРЖДЕНИЕ.** *Если $\mathfrak{C}(G)$ — неразложимая в прямую сумму модулярная решетка конечной длины и $H \in \mathfrak{C}(G)$, то решетка $\mathfrak{C}(H)$ тоже неразложима в прямую сумму подрешеток.* □

2.6.1. **УТВЕРЖДЕНИЕ.** *Если подгруппа $\omega(G)$ неабелева, то $\bar{G}$ является p-группой для некоторого простого числа p.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по длине $l(G)$ решетки $\mathfrak{C}(G)$. Пусть A и B — два поэлементно неперестановочных атома решетки $\mathfrak{C}(G)$. Группа $A \vee B$ является $\mathfrak{M}$-группой, и из $Z(A \vee B) = Z(G)$ получаем

$$G = (A \vee B) \vee C(A \vee B) = (A \vee B) \cdot C(A \vee B).$$

В силу 2.2, $\overline{A \vee B}$ должна быть либо примарной группой, либо группой Фробениуса вида $\bar{F} \leftthreetimes \bar{K}$, и при этом группы F и K абелевы. Во втором случае, как нетрудно видеть, $(A \vee B)' \cap Z(G) = 1$. Но тогда $(A \vee B)' \cap (C(A \vee B))' = 1$ и, по теореме 0.2, $\mathfrak{C}(G)$ разложима в прямую сумму подрешеток, что противоречит нашему предположению. Следовательно, фактор-группа $\overline{A \vee B}$ является p-группой для некоторого простого числа p.

Если $\omega(C(A \vee B))$ неабелева, то по предположению индукции либо $C(A \vee B)$ является $\mathfrak{M}$-группой, либо $\overline{C(A \vee B)}$ примарна. Как и выше,

если $\overline{C(A \vee B)}$ не является p-группой, то $G = (A \vee B) \oplus C(A \vee B)$, что противоречит неразложимости $\mathfrak{C}(G)$. Если же $\overline{C(A \vee B)}$ является p-группой, то p-группой будет и фактор-группа $\bar{G} = \overline{C(A \vee B)} \times \overline{(A \vee B)}$.

Предположим теперь, что $\omega(C(A \vee B))$ абелева. Так как $Z(C(A \vee \vee B)) = Z(G)$ и, как отмечалось в лемме 1.6, $\mathfrak{C}(C(A \vee B)) = [Z(G), C(A \vee B)]$, то атомы решетки $\mathfrak{C}(C(A \vee B))$ являются атомами решетки $\mathfrak{C}(G)$. Но тогда $C(A \vee B)$ содержит по крайней мере два различных атома C и D. Так как $A \vee C$, $B \vee C$ и $D \vee C$ — независимые атомы решетки $\mathfrak{C}(C(C))$, то длина этой решетки больше 2. А так как $A \vee C$ и $B \vee C$ поэлементно неперестановочны, то, в силу предположения индукции, фактор-группа $C(C)/C$ примарна. Аналогично примарна и фактор-группа $C(D)/D$. Но $C(C) > (A \vee B)$ и $C(D) > (A \vee B)$. Поэтому $C(C)/C$ и $C(D)/D$ являются p-группами. Из $C < C(D)$ и $D < C(C)$ получаем, что и фактор-группы $\overline{C(C)}$ и $\overline{C(D)}$ тоже являются p-группами. А так как $C(A \vee B)$ покрывается коатомами решетки $\mathfrak{C}(C(A \vee B))$, то $\overline{C(A \vee B)}$, а следовательно, и $\bar{G}$ будут p-группами. □

2.6.2. **УТВЕРЖДЕНИЕ.** *Фактор-группа $\overline{\omega(G)}$ примарна.*

В силу 2.6.1 мы можем считать, что группа $\omega(G)$ абелева. Это означает, в частности, что $A \vee B = A \cdot B$ для любых A и B из $\omega(G)$. Пусть A — атом из $\mathfrak{C}(G)$, а x — элемент из $G \backslash C(A)$. Рассмотрим $\mathfrak{M}$-группу $H = A \vee C^2(x)$. Из $\omega(G) \lhd G$ получаем $H \cap \omega(G) = A \vee (C^2(x) \cap \omega(G)) \lhd H$, а так как группа $H \cap \omega(G)$ абелева, то это означает, что $AZ(H)$ — инвариантная максимальная абелева подгруппа группы H. По следствию 2.2, $\bar{A}$ является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p. Обозначим через B произвольный атом, отличный от A. Так как $A \vee B$ является прямой проективной геометрией (см. замечание перед утверждением 2.6.0), а любая прямая содержит более двух точек, то группа $A \vee B$ содержит отличный от A и B атом C решетки $\mathfrak{C}(G)$. Из равенств $A \vee B = A \cdot C = B \cdot C$ получаем, что $\bar{B}$ тоже является p-группой. Так как $\omega(G)$ совпадает с произведением атомов, то $\overline{\omega(G)}$ — примарная группа. □

Всюду в дальнейшем через p обозначаем простой делитель порядка неединичного элемента из $\overline{\omega(G)}$. *Порядком элемента* $A \in \mathfrak{C}(G)$ будем

называть порядок фактор-группы $\bar{A}$.

2.6.3. **УТВЕРЖДЕНИЕ.** *Если $\mathfrak{C}(G)$ содержит атом A конечного порядка, то все атомы решетки $\mathfrak{C}(G)$ имеют одинаковые порядки.*

Как уже отмечалось, интервал $[Z(G),\omega(G)]$ является проективной геометрией. Пусть B — атом из $C(A)$. Так как прямая $A \vee B$ содержит более двух точек, то в $A \vee B$ найдется атом C, отличный от A и B. Из равенств $A \vee B = A \cdot C = B \cdot C$ получаем $|\bar{A}| = |\bar{B}|$.

Если же $B \not\leqslant C(A)$, то $Z(A \vee B) = Z(G)$ и $G = (A \vee B)C(A \vee B)$. Так как $l(G) > 2$, то $C(A \vee B)$ содержит хотя бы один атом C. Но тогда $C \leq C(A)$ и $C \leq C(B)$. По уже доказанному $|\bar{A}| = |\bar{C}| = |\bar{B}|$. □

2.6.4. **УТВЕРЖДЕНИЕ.** *Если $\mathfrak{C}(G)$ содержит атом конечного порядка, то для любого $x \in \omega(G)\backslash Z(G)$ подгруппа $C^2(x)$ является атомом решетки $\mathfrak{C}(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по числу $l(G)$. Пусть G — минимальный контрпример и x — такой элемент из $\omega(G)\backslash Z(G)$, что $C^2(x)$ не является атомом. Обозначим через A атом решетки $\mathfrak{C}(G)$, лежащий в $C^2(x)$, и рассмотрим $C(A)$. Как отмечалось в утверждении 2.6.0, $\mathfrak{C}(C(A))$ — неразложимая в прямую сумму модулярная решетка конечной длины. Из леммы 1.6 следует, что $\mathfrak{C}(C(A)) \leq \mathfrak{L}(C(A))$. Если $C(A)$ является $\mathfrak{M}$-группой, то $C^2(x)$ — атом решетки $\mathfrak{C}(C(A))$. Пусть $C(A)$ не является $\mathfrak{M}$-группой. Так как $l(G) > 2$, то $C(A)$ содержит атом B решетки $\mathfrak{C}(G)$, отличный от A. По утверждению 2.6.3, $\bar{B}$ конечен. Но $A \vee B = A \cdot B$ является атомом решетки $\mathfrak{C}(C(A))$. Поэтому, применив к $C(A)$ предположение индукции, мы снова получим, что $C^2(x)$ — атом решетки $\mathfrak{C}(C(A))$, т.е. $l(C^2(x)) = 2$. Но тогда $C^2(x) = A \vee B$ для некоторого атома B.

Предположим сначала, что группа $\omega(G)$ неабелева. Если C и D — поэлементно неперестановочные атомы решетки $\mathfrak{C}(G)$, то, по 2.6.3 и 2.3, $|\bar{C}| = |\bar{D}| = p^m$ для некоторого числа m и $\overline{|C \vee D|} = p^{2m}$. Так как атомы из $\mathfrak{M}$-группы $C \vee D$ покрывают $C \vee D$, то число их равно $p^m + 1$. Но в проективной геометрии $\omega(G)$ все прямые содержат одинаковое число точек. Поэтому группа $C^2(x) = A \vee B$ содержит $p^m + 1$ атомов порядка p^m. Из $\overline{|A \vee B|} = p^{2m}$ следует, что $A \vee B$ покрывается атомами. Но тогда

$C^2(x)$ должна быть атомом.

Таким образом, $\omega(G)$ — абелева группа. Если $\omega(G) > A \vee B$ и D — атом решетки $\mathfrak{C}(G)$, не лежащий в $A \vee B$, то

$$C^2_{C(D)}(x) = C(C(x) \cap C(D)) \cap C(D) = C^2(x) \vee D.$$

Как и выше, применяя индуктивное предположение, получаем, что $C^2_{C(D)}(x)$ должен быть атомом решетки $\mathfrak{C}(C(D))$, что противоречит $l(A \vee \vee B \vee D) = 3$.

Следовательно, $\omega(G) = A \vee B = C^2(x)$. Но тогда коатомы решетки $\mathfrak{C}(G)$ индуцируют расщепление фактор-группы $G/C(\omega(G))$ и число компонент этого расщепления равно числу атомов решетки $\mathfrak{C}(G)$. Из 2.6.3 следует, что $|\bar{A}| = |\bar{B}| = p^m$.

Пусть $y \in G \backslash C(A)$. Тогда $C^2(y)$ содержит только один атом. Будем считать, что $B \leq C^2(y)$. Группа $H = C^2(y) \vee A$ является $\mathfrak{M}$-группой, и $Z(H) = C^2(y) \cap C(A) = C^2(y) \cap C(\omega(G))$. Так как $\omega(G) \lhd G$, то $AZ(H) \lhd H$. Из следствия 2.2 вытекает, что если $H/Z(H)$ — примарная группа, то $C^2(y)/Z(H)$ — элементарная абелева группа порядка p^m. А если $H/Z(H)$ — непримарная группа, то $C^2(y)/Z(H)$ — циклическая p'-группа. Из $C(B) = C(\omega(G)) \cdot C^2(y)$ следует, что любая компонента расщепления фактор-группы $G/C(\omega(G))$, индуцированного коатомами, является либо элементарной абелевой подгруппой порядка p^m, либо циклической p'-группой. При этом любые две различные компоненты этого расщепления порождают всю фактор-группу $G/C(\omega(G))$.

В силу леммы 2.1 фактор-группой $G/C(\omega(G))$ может быть группа одного из следующих типов:

а) p-группа;

б) q-группа, q — простое число, отличное от p;

в) группа Фробениуса, порядок которой делится на p;

г) группа Фробениуса порядка, взаимно простого с числом p.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

а) В этом случае $|G/C(\omega(G))| = p^{2m}$ и каждая компонента имеет порядок p^m. Это означает, что число компонент, а следовательно, и число

атомов решетки $\mathfrak{C}(G)$ равно $p^m + 1$. Но тогда из равенств $|\overline{\omega(G)}| = p^{2m}$ и $|\bar{A}| = p^m$ для любого атома $A \leq \omega(G)$ следует, что $\omega(G)$ покрывается атомами.

б) В этом случае все компоненты — циклические группы, $|G/C(\omega(G))| = q^2$ и число компонент расщепления равно $q + 1$. Так как $C(\omega(G)) \geq G'$, то для любого атома A подгруппа $C(A)$, а следовательно, и $A = C(C(A))$, инвариантны в G. Рассмотрим группу $\overline{\omega(G)} \leftthreetimes C^2(y)/Z(H)$, где $y \in G \backslash C(\omega(G))$ и $H = \omega(G) \vee C^2(y)$. Предположим для определенности, что $B \leq C^2(y)$. Тогда по лемме 1.3 из [19] $\overline{\omega(G)} = \bar{B} \times [\omega(G), C^2(y)]Z(G)/Z(G)$. Из инвариантности A и равенства $AB = \omega(G)$ следует, что $[\omega(G), C^2(y)] \leq A$. Если C — атом из $A \vee B$, отличный от A и B, то аналогично $[\omega(G), C^2(y)] \leq C$. Но тогда $[\omega(G), C^2(y)] \leq Z(G)$, что невозможно.

в) Если силовская p-подгруппа группы $G/C(\omega(G))$ инвариантна, т.е. является ядром, то, как и в случае "а", $\omega(G)$ содержит $p^m + 1$ атомов и, следовательно, покрывается атомами. Поэтому силовская p-подгруппа из $G/C(\omega(G))$ неинвариантна. По лемме 2.1 она является циклической группой. Но тогда, очевидно, $m = 1$ и $|\overline{\omega(G)}| = p^2$. Если A —инвариантный в G атом, т.е. $C(A)/C(\omega(G))$ — ядро фактор-группы $G/C(\omega(G))$, то каждая из групп $\omega(G)/A \leftthreetimes C(A)/C(\omega(G))$ и $C(A)/C(\omega(G)) \leftthreetimes C(B)/C(\omega(G))$ является группой Фробениуса, что противоречит равенству

$$|\omega(G)/A| = |C(B)/C(\omega(G))| = p.$$

г) Пусть $G/C(\omega(G)) = \langle aC(\omega(G))\rangle \leftthreetimes \langle bC(\omega(G))\rangle$. Рассмотрим группу $H = \overline{\omega(G)} \leftthreetimes G/C(\omega(G))$. Если A — атом из $C(a)$, то $C(A) = \langle a\rangle C(\omega(G))$. Но тогда $C(A)$, а следовательно, и A инвариантны в G. По теореме Машке $\overline{\omega(G)} = \bar{A} \times \bar{T}$, $\bar{T} \lhd \bar{G}$. Так как $G/C(\omega(G))$ содержит только одну инвариантную компоненту, то $\omega(G)$ содержит только один инвариантный в G атом. Поэтому T не является атомом решетки $\mathfrak{C}(G)$. Но тогда $C(T) = C(\omega(G))$. Из равенств

$$\overline{\omega(G)} = C_{\overline{\omega(G)}}(\bar{b}) \times [\overline{\omega(G)}, \bar{b}] \text{ и } \omega(G) = A \cdot C_{\omega(G)}(b)$$

следует, что $[\omega(G), b] \cdot Z(G) = A$. Но тогда $[T, b] \leq T \cap A \leq Z(G)$, т.е. $T \leq C(b)$, что противоречит равенству $C(T) = C(\omega(G))$. □

Отметим, что если группа $\omega(G)$ неабелева, то по утверждению 2.6.1 фактор-группа $\bar{G}$ является p-группой. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\omega(G)$ абелева.

2.6.5. **УТВЕРЖДЕНИЕ.** *Если атом A инвариантен в G, то для любого другого атома B подгруппа $A \vee B$ тоже инвариантна в G.*

Так как $A \lhd G$, то $A \vee B \lhd C(B)$. Если C — отличный от A и B атом из $A \vee B$, то $A \vee B = A \vee C \lhd C(C)$. Но тогда $A \vee B \lhd \langle C(B), C(C) \rangle = G$. □

2.6.6. **УТВЕРЖДЕНИЕ.** *Если A и B — такие атомы из $\mathfrak{C}(G)$, что $A \vee B \lhd G$, то $G/C(A \vee B)$ является либо p-группой, либо группой Фробениуса, ядро которой — элементарная абелева p-группа.*

Пусть $x \in G \backslash C(A \vee B)$. Рассмотрим группу $H = C(A \vee B) \cdot C^2(x)$. Если $H = G$, то $Z(G) = (A \vee B) \cap C(x)$. Пусть $K = C^2(x) \vee A \vee B$. Тогда $Z(K) = C^2(x) \cap C(A \vee B)$. Обозначим через T централизатор, покрывающий $Z(K)$ и лежащий в $C^2(x)$. По 2.6.0 решетка $\mathfrak{C}(C(Z(K)))$ неразложима в прямую сумму подрешеток. Кроме того, она содержит три независимых атома: T, $Z(K) \vee A$ и $Z(K) \vee B$, причем T и $Z(K) \vee \vee A$ поэлементно неперестановочны. В силу 2.6.1, фактор-группа $K/Z(K)$ примарна. Из $AZ(K)/Z(K) \cong \bar{A}$ следует, что $K/Z(K)$ является p-группой. Но тогда и $G/C(A \vee B) \cong C^2(x)/Z(K)$ тоже является p-группой.

Предположим теперь, что для любого элемента $x \in G \backslash C(A \vee B)$ $C^2(x) \cdot C(A \vee B) \neq G$. Тогда $C^2(x) \cdot C(A \vee B)$ является коатомом решетки $\mathfrak{C}(G)$. Следовательно, в этом случае коатомы вида $C(X)$, где $X \leq A \vee B$, образуют расщепление фактор-группы $G/C(A \vee B)$. При этом все компоненты абелевы и любые две из них порождают всю фактор-группу. В силу леммы 2.1, $G/C(A \vee B)$ является либо q-группой для некоторого простого числа q, либо группой Фробениуса, ядро которой — элементарная абелева q-группа. Предположим, что $q \neq p$. Рассматривая $\mathfrak{M}$-группу вида $C^2(x) \vee A$, где A — атом решетки $\mathfrak{C}(G)$, $x \in G \backslash C(A)$, и применяя следствие 2.2, получаем, что группа $C^2(x)/(C^2(x) \cap C(A)) = C^2(x) \cdot C(A \vee B)/C(A \vee B)$ должна быть либо элементарной абелевой p-группой, либо локально цикли-

ческой p'-группой. Но тогда либо $|G/C(A \vee B)| = q^2$, либо порядок ядра группы Фробениуса $G/C(A \vee B)$ равен q. В любом случае число компонент расщепления, т.е. число коатомов, равно $q+1$. Так как $C^2(x)/C(A \vee B)$ действует на $\bar{A}$ неприводимо, то группа $\bar{A}$ конечна. Из 2.6.4 получаем, что p-группа $\overline{\omega(G)}$ обладает расщеплением, состоящим из $q+1$ компоненты, что невозможно. □

2.6.7. **УТВЕРЖДЕНИЕ.** Атом A решетки $\mathfrak{C}(G)$ в том и только том случае инвариантен в группе G, если фактор-группа $\overline{C(A)}$ является p-группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО необходимости и достаточности проведем индукцией по числу $l(G)$.

Необходимость. Пусть B — произвольный атом, отличный от A. Так как $A \vee B \lhd C(B)$, то, в силу индуктивного предположения, фактор-группа $C(A \vee B)/B$ является p-группой. Но тогда, очевидно, и $\overline{C(A \vee B)}$ тоже будет p-группой. Из 2.6.5 вытекает инвариантность подгруппы $A \vee B$, и остается использовать 2.6.6.

Достаточность. Так как $\overline{C(A \vee B)} = \overline{C(A) \cap C(B)}$ является p-группой, то, ввиду предположения индукции, $C(A \vee B) \lhd C(B)$. Аналогично $C(A \vee B) \lhd C(C)$, где C — атом из $A \vee B$, отличный от A и B. Поэтому $C(A \vee B) \lhd G$. Учитывая 2.6.6 и примарность по p фактор-группы $\overline{C(A)}$, получаем инвариантность A в G. (Если группа $G/C(A \vee B)$ примарна, то используем лемму 1.1.) □

Из 2.6.6 и 2.6.7 следует, что для завершения доказательства теоремы нам достаточно убедиться в наличии инвариантного в G атома решетки $\mathfrak{C}(G)$.

2.6.8. **УТВЕРЖДЕНИЕ.** *Решетка $\mathfrak{C}(G)$ обладает инвариантным в G атомом.*

Применим индукцию по $l(G)$. Пусть G — минимальный контрпример, A — атом из $\mathfrak{C}(G)$. Тогда $C(A)$ содержит инвариантный в $C(A)$ атом решетки $\mathfrak{C}(C(A))$. Обозначим его через X. Так как $l(X) = 2$, то либо $X = A \vee B$, где B — отличный от A атом, либо X — неразложимый элемент длины 2.

В первом случае по 2.6.7 фактор-группа $C(A \vee B)/A$ является p-группой. Но тогда по этому же утверждению $C(A \vee B) \lhd C(B)$, и, следовательно, $C(A \vee B) \lhd G$. Лемма 2.1 и утверждение 2.6.7 доказывают наличие инвариантного атома решетки $\mathfrak{C}(G)$.

Во втором случае возьмем атом $B \neq A$ и рассмотрим группу $H = X \vee B$. Если H неабелева, то $C(A) = H \cdot C(H)$ и $H \lhd C(A)$. Если же H абелева, то $H \lhd C(A)$ в силу 2.6.5. А так как $\omega(G)$ тоже инвариантна в $C(A)$, то $A \vee B = (X \vee B) \cap \omega(G) \lhd C(A)$ и мы пришли к рассмотренному уже первому случаю. Теорема доказана. □

Объединяя теоремы 2.4 и 2.6, получаем

2.7. **СЛЕДСТВИЕ.** *Пусть G — локально конечная группа с модулярной решеткой централизаторов конечной длины. Если решетка $\mathfrak{C}(G)$ неразложима в прямую сумму и является подрешеткой решетки подгрупп, то группа G обладает таким субнормальным рядом централизаторов $Z(G) = G_0 < G_1 < \ldots < G_n = G$, что факторгруппы G_{i+1}/G_1 при $i = 0, 1, \ldots, n-2$ являются изоморфными элементарными абелевыми p-группами, а G/G_{n-1} — либо элементарная абелева группа, изоморфная $\bar{G}_1$, либо локально циклическая p'-группа, действующая на $\bar{G}_1$ неприводимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\bar{G}$ примарна, то достаточно использовать теорему 2.4. Пусть $\bar{G}$ не примарна. Если $l(G) = 2$, то утверждение вытекает из следствия 2.2. Предположим поэтому, что $l(G) > 2$. По теореме 2.6, $\mathfrak{C}(G)$ содержит такой инвариантный атом A, что $\overline{C(A)}$ является p-группой, а $G/C(A)$ — локально циклическая p'-группа. Пусть $x \in G \backslash C(A)$. Тогда $G = C(A) \cdot C^2(x)$ и $G/C(A) \cong C^2(x)/(C^2(x) \cap C(A))$. Так как $A \vee C^2(x)$ является $\mathfrak{M}$-группой и $Z(A \vee C^2(x)) = C^2(x) \cap C(A)$, то, по следствию 2.2, $G/C(A)$ действует на $\bar{A}$ неприводимо. Если $A < H_1 < H_2 < \ldots < H_k < C(A)$ — неуплотняемый ряд централизаторов, то ряд $Z(G) < A < H_1 < \ldots < H_k < C(A) < G$ удовлетворяет заключению следствия.

В самом деле, нам достаточно показать, что $\bar{A} \cong G/C(A)$. Так как $l(G) > 2$, то $C(A)$ содержит отличный от A атом B решетки $\mathfrak{C}(G)$. Как

и выше, если C — отличный от A и B атом из $A \vee B$, то из равенств $AB = AC = BC$ получим $(A \vee B)/A \cong \bar{A}$. И остается заметить, что по теореме 2.4 мы можем полагать $H_1 = A \vee B$. □

§ 3. Локально конечные группы

Нашей дальнейшей целью будет доказательство гипотезы 0.1 для локально конечных групп с решеткой централизаторов конечной длины.

3.1. **ЛЕММА.** *Если решетка централизаторов группы G модулярна и имеет длину k, то для любого централизатора $T \in \mathfrak{C}(G)$ выполняется равенство $l(C(T)) = k - l(T)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по числу k. Случай $k = 2$ очевиден. Пусть $k > 2$. Если $Z(T) = Z(G)$, то $G = T \vee C(T)$. Отсюда

$$k = l(G) = l(T) + l(C(T)) - l(T \cap C(T)) = l(T) + l(C(T)).$$

Предположим теперь, что $Z(T) > Z(G)$. Обозначим через A атом решетки $\mathfrak{C}(G)$, лежащий в $Z(T)$. Тогда длина решетки $\mathfrak{C}(C(A))$ равна $k - 2$, а длины высоты T и $C(T)$ как элементов этой решетки равны $l(T) - 1$ и $l(C(T)) - 1$ соответственно. Таким образом, по предположению индукции, $k - 2 = l(T) - 1 + l(C(T)) - 1$, отсюда $k = l(T) + l(C(T))$. □

3.2. **ЛЕММА.** *Пусть G — локально конечная группа, решетка централизаторов которой имеет конечную длину и является подрешеткой решетки подгрупп. Если для любого атома A решетки $\mathfrak{C}(G)$ подгруппа $C(A)$ содержит только один атом A решетки $\mathfrak{C}(G)$, то G является $\mathfrak{M}$-группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $C(A)$ и $C(B)$ — различные коатомы решетки $\mathfrak{C}(G)$, то $C(A) \cap C(B) = Z(G)$ и $\langle C(A), C(B) \rangle = C(A) \vee C(B) = G$. Это означает, что коатомы решетки $\mathfrak{C}(G)$ индуцируют такое расщепление фактор-группы $\bar{G}$, что любые две различные компоненты этого расщепления порождают всю фактор-группу. Из леммы 2.1 следует, что фактор-группа $\bar{G}$ должна быть либо примарной группой, либо группой Фробениуса.

Предположим сначала, что $\bar{G}$ примарна. Тогда по следствию 1.9 решетка $\mathfrak{C}(G)$ модулярна. Если при этом $l(G) = k$, то $l(C(A)) = l(C(B)) = k - 1$ и мы получаем

$$k = (k-1) + (k-1) - l(C(A) \cap C(B)) = 2k - 2.$$

Отсюда $k = 2$, т.е. G является $\mathfrak{M}$-группой.

Пусть теперь $\bar{G} = \bar{X} \leftthreetimes \bar{Y}$ — группа Фробениуса. Тогда X и Y — коатомы решетки $\mathfrak{C}(G)$. Из $\langle Y, Y^g \rangle = G$ для любого $g \in G \backslash Y$ следует, что $\bar{Y}$ действует на $\bar{X}$ неприводимо. Поэтому либо $Z(X) = Z(G)$, либо $Z(X) = X$. Если T — единственный атом решетки $\mathfrak{C}(G)$, лежащий в X, то T лежит в любой максимальной абелевой подгруппе группы X и, следовательно, $T \leq Z(X)$. Поэтому первый случай невозможен, т.е. группа X абелева. Так как X — коатом решетки $\mathfrak{C}(G)$, то для любого $x \in Y \backslash Z(G)$ получаем $X \vee C^2(x) = X \cdot C^2(x) = G$. Поэтому группа $Y = C^2(x)$ абелева. Но тогда G является $\mathfrak{M}$-группой. □

3.3. **СЛЕДСТВИЕ.** *Пусть G — локально конечная группа, решетка централизаторов которой имеет конечную длину и является подрешеткой решетки подгрупп. Если для группы G не выполняется гипотеза* 0.1, *то G содержит по крайней мере два поэлементно перестановочных атома.* □

3.4. **ЛЕММА.** *Пусть G — локально конечная группа с атомной решеткой централизаторов. Если $\mathfrak{C}(G)$ является подрешеткой решетки подгрупп и H — такой $\mathfrak{M}$-элемент из $\mathfrak{C}(G)$, что $G = H \cdot C(H)$, то либо группа H нильпотентна, либо $G = H \oplus C(H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = H \cdot C(H)$ и группа H не нильпотентна. В силу следствия 2.2, $\bar{H}$ является группой Фробениуса. Но тогда любой отличный от 1 коммутатор из H' не лежит в $Z(G)$. Поэтому множества коммутаторов подгрупп H и $C(H)$ пересекаются по единице. По теореме 0.2, $G = H \oplus C(H)$. □

3.5. **СЛЕДСТВИЕ.** *Если в условиях леммы* 3.4 *$C(H)$ тоже является $\mathfrak{M}$-группой и $G \neq H \oplus C(H)$, то сама группа G нильпотентна.* □

3.6. **ТЕОРЕМА.** *Пусть G — минимальный контрпример к гипотезе* 0.1, *т.е. не удовлетворяющая гипотезе локально конечная группа с наименьшей возможной длиной решетки централизаторов, A и B — поэлементно перестановочные атомы решетки $\mathfrak{C}(G)$. Тогда каждая из решеток $\mathfrak{C}(C(A))$ и $\mathfrak{C}(C(B))$ неразложима в прямую сумму подрешеток.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что в силу минимальности группы G решетка $\mathfrak{C}(G)$ неразложима в прямую сумму подрешеток. Доказательство теоремы проведем методом от противного. Предположим сначала, что каждая из решеток $\mathfrak{C}(C(A))$ и $\mathfrak{C}(C(B))$ разложима в прямую сумму подрешеток. Пусть

$$[A,C(A)] = \bigoplus_{i=1}^{n}[A,H_i],\ \ [B,C(B)] = \bigoplus_{i=1}^{m}[B,K_i]$$

и решетки $\mathfrak{C}(H_i)$ и $\mathfrak{C}(K_i)$ далее неразложимы в прямую сумму. Для определенности будем считать, что $B \le H_n$ и $A \le K_m$. Так как $H_1 \le C(B)$ и $\mathfrak{C}(H_1)$ неразложима в прямую сумму, то $B \cdot H_1 = A \cdot K_1$ для некоторого $i \ne m$. Положим $i = 1$. Из равенства $BH_1 = AK_1$ следует, что $K_1 = (H_1B) \cap K_1 = B \cdot (H_1 \cap K_1)$. Аналогично $H_1 = A \cdot (H_1 \cap K_1)$. Так как $Z(H_1) = A$, то $Z(H_1 \cap K_1) = Z(G)$, т.е. $G = C(H_1 \cap K_1) \cdot (H_1 \cap K_1)$.

Пусть T — произвольный централизатор из K_1. Тогда $T \le C(A)$. Из $A \le T \vee A \le C(A)$ и $[A,C(A)] = [A,H_1] \oplus [A,C(H_1)]$ получаем

$$T \vee A = [(T \vee A) \cap H_1] \vee [(T \vee A) \cap C(H_1)] =$$

$$= A \vee (T \cap H_1) \vee A \vee (T \cap C(H_1)) = A \vee [(T \cap H_1) \vee (T \cap C(H_1))].$$

Отсюда $T = (T \cap H_1) \vee (T \cap C(H_1))$. А так как $T \le K_1$, то

$$T = (T \cap H_1 \cap K_1) \vee (T \cap C(H_1 \cap K_1)).$$

В силу произвольности $T \le K_1$ имеем

$$K_1 = (K_1 \cap H_1) \oplus (K_1 \cap C(H_1)) = (K_1 \cap H_1) \oplus B.$$

Но тогда из равенств $[B,C(B)] = [B,K_1] \oplus [B,C(K_1)]$ и $K_1 = B \oplus (K_1 \cap H_1)$ следует, что $C(B) = (K_1 \cap H_1) \oplus C(K_1)$. Аналогично $C(A) = (K_1 \cap H_1) \oplus$ $\oplus C(H_1)$.

Пусть C — произвольный атом из $C(H_1 \cap K_1)$. Предположим сначала, что решетка $\mathfrak{C}(C(C))$ неразложима в прямую сумму подрешеток. Тогда $C \neq A$ и $C \neq B$. Если группа $A \vee C$ не абелева, то из

$$C(A \vee C) = (K_1 \cap H_1) \vee C_{C(H_1 \cap K_1)}(A \vee C) =$$

$$= (H_1 \cap K_1) \vee (C(H_1) \cap C(C)) = (H_1 \cap K_1) \oplus (C(H_1) \cap C(C))$$

следует, что $C(H_1) \cap C(C) = Z(G)$. В самом деле, если $C(H_1) \cap C(C) \neq$ $\neq Z(G)$ и T_1 — атом из этого пересечения, а T_2 — атом из $H_1 \cap K_1$, то из $T_1 \vee T_2 = T_1 \oplus T_2$ следует, что $(T_1 \vee T_2 \vee C)$ содержит в точности два атома модулярной решетки $\mathfrak{C}(C(C))$. Но тогда по теореме 3 из [16] решетка $\mathfrak{C}(C(C))$ должна быть разложима в прямую сумму подрешеток, что противоречит нашему предположению. Из равенства $C(H_1) \cap C(C) =$ $= Z(G)$ получаем $l(C(H_1)) = 2$, что противоречит тому, что $C(H_1) >$ $> A \vee B$.

Следовательно, $A \vee C$ — абелева группа. Пусть T — атом из $H_1 \cap K_1$. Так как $A \vee C$ и $T \vee C$ — атомы неразложимой в прямую сумму модулярной решетки $\mathfrak{C}(C(C))$, то группа $A \vee C \vee T$ должна содержать более двух централизаторов, покрывающих C, что противоречит равенству $A \vee C \vee$ $\vee T = (A \vee C) \oplus T$.

Таким образом, для любого атома C из $C(H_1 \cap K_1)$ решетка $\mathfrak{C}(C(C))$ разложима в прямую сумму подрешеток. Если $C \leq C(A)$, то, как и выше, получим $C(C) = (H_1 \cap K_1) \oplus C(L)$, где $L = C \vee (H_1 \cap K_1)$. Пусть $C \not\leq C(A)$. Так как $C(H_1 \cap K_1) > A \vee B$, то $C(H_1 \cap K_1) \neq A \vee C$ и, следовательно, $C_{C(H_1 \cap K_1)}(A \vee C) \neq Z(G)$. Если T — атом из $C(A \vee C) \cap C(H_1 \cap K_1)$, то $C(T) = (H_1 \cap K_1) \oplus C(S)$, где $S = (H_1 \cap K_1) \vee T$, и снова получаем $C(C) = (H_1 \cap K_1) \oplus C(L)$.

Так как $G = (H_1 \cap K_1) \vee (H_1 \cap K_1) \neq (H_1 \cap K_1) \oplus C(H_1 \cap K_1)$, то найдется такой централизатор M, что $M \neq (M \cap H_1 \cap K_1) \vee (M \cap C(H_1 \cap K_1))$.

Пусть M — минимальный централизатор с таким свойством. Тогда M неразложим и, следовательно, абелев. Если $C(M) \cap C(H_1 \cap K_1) \neq Z(G)$ и T —атом из этого пересечения, то, по уже доказанному, $C(T) = (H_1 \cap$ $\cap K_1) \oplus C(L)$, где $L = T \vee (H_1 \cap K_1)$. То тогда $M = (M \cap H_1 \cap K_1) \vee (M \cap C(L))$,

что противоречит выбору M. Следовательно, $C(M) \cap C(H_1 \cap K_1) = Z(G)$. Поэтому $M \cdot (H_1 \cap K_1) = M \vee (H_1 \cap K_1) = G$. Но тогда $C(A) = (H_1 \cap \cap K_1) \cdot (C(A) \cap M)$ и $C(B) = (H_1 \cap K_1) \cdot (C(B) \cap M)$. Так как $C(A) \neq \neq C(B)$, то $C(A) \cap M \neq C(B) \cap M$. Из неразложимости M следует, что $C(A) \cap M$ немаксимален в M.

Пусть $C(A) \cap M < M_1 < M$. Тогда из $(H_1 \cap K_1) \vee M_1 > (H_1 \cap \cap K_1) \cdot (C(A) \cap M) = C(A)$ получим $(H_1 \cap K_1) \cdot M_1 = G$. Отсюда $M = = M \cap (M_1(H_1 \cap K_1)) = M_1(M \cap H_1 \cap K_1)$. А так как M неразложим, то $M = M \cap H_1 \cap K_1$, что противоречит выбору M.

Таким образом, мы доказали, что решетки $\mathfrak{C}(C(A))$ и $\mathfrak{C}(C(B))$ неразложимы в прямую сумму одновременно. Предположим, что одна из этих решеток разложима. Например,

$$[A, C(A)] = [A, H] \oplus [A, C(H)].$$

Положим для определенности, что $B \leq C(H)$ и решетка $\mathfrak{C}(H)$ неразложима в прямую сумму. По 2.6.0 из неразложимости $\mathfrak{C}(C(B))$ следует неразложимость решетки $\mathfrak{C}(C(A \vee B))$. Поэтому из $[A, C(A \vee B)] = = [A, H] \oplus [A, C(H) \cap C(A \vee B)]$ следует, что $C(H) \cap C(A \vee B) = A \vee B$, т.е. $A \vee B$ — максимальная абелева подгруппа из $C(H)$. Следовательно, $l(C(H)) = 3$. Из $Z(C(H)) = A$ вытекает $C_{C(H)}(B) = A \vee B$.

Предположим, что H содержит только один атом A решетки $\mathfrak{C}(G)$. Пусть B_0 — атом решетки $\mathfrak{C}(C(B))$, отличный от $A \vee B$. Если $B_0 \leq H \vee B$, то $B_0 = B \vee (H \cap B_0)$, что невозможно, так как H содержит только один атом. Следовательно, $B_0 \not\leq H \vee B = C_{C(A)}(B)$. Но тогда $B_0 \not\leq C(A)$. Поэтому $G = C(A) \vee B_0$. Из максимальности $C(A \vee B)$ в $C(B)$ следует, что $C(B) = C(A \vee B) \vee B_0 = (H \vee B) \vee B_0$. Так как $H \vee B$ и B_0 — элементы из $\mathfrak{C}(C(B))$, то ввиду модулярности решетки $\mathfrak{C}(C(B))$ имеем

$$C(B_0) = C(B_0) \cap (B_0 \vee (H \vee B)) = B_0 \vee (C(B_0) \cap H).$$

И снова $C(B_0) \cap H = Z(G)$, так как H содержит единственный атом A. Таким образом, $C(B_0) = B_0$. Из $l(B_0) = 2$ следует $l(C(B)) = 3$. Отсюда $l(C(A \vee B)) = 2$ и $l(C(A)) = 3$, что противоречит разложимости решетки $\mathfrak{C}(C(A))$.

Итак, H содержит атом T, отличный от A. По уже доказанному решетка $\mathfrak{C}(C(T))$ неразложима в прямую сумму. Как и выше, получим $l(H) = 3$.

Из $l(C(H)) = 3$ следует, что либо $C(H) = A \vee B \vee C$, где C — атом решетки $\mathfrak{C}(G)$, не лежащий в $A \vee B$, либо $C(H) = A_0 \vee B$, где A_0 — неразложимый элемент, покрывающий A. Аналогично либо $H = A \vee T \vee L$, где L — атом решетки $\mathfrak{C}(G)$, либо $H = A_1 \vee T$, где A_1 — неразложимый элемент, покрывающий A.

Предположим, что $C(H) = A \vee B \vee C$ и $H = A \vee T \vee L$. Тогда $Z(B \vee C) = Z(T \vee L) = Z(G)$. В самом деле, если $B \vee C = A \vee B \vee C$, то $B \vee C \vee T = A \vee B \vee C \vee T$, что противоречит модулярности решетки $\mathfrak{C}(C(T))$. Из 2.2 и 2.3 следует, что в группах $B \vee C$ и $T \vee L$ каждый элемент коммутанта является коммутатором. Рассмотрим подгруппу $R = T \vee L \vee B \vee C$. Так как $B \vee C \leq C(H)$, $T \vee L \leq H$ и $C(A) = H \oplus C(H)$, то, по теореме 0.2, $(T \vee L)' \cap (B \vee C)' = 1$. Из $G = (T \vee L) \cdot C(T \vee L)$ и $G = (B \vee C) \cdot C(B \vee C)$ получаем $G = R \cdot C(R)$. Но тогда из $l(C(A)) = 5$ следует, что $C(R) = A \vee S$, где S — некоторый атом. Так как решетка $\mathfrak{C}(C(B))$ неразложима в прямую сумму, то, по 2.6.0, $\mathfrak{C}(T \vee L \vee A \vee S)$ — неразложимая в прямую сумму модулярная решетка с дополнениями. В силу теоремы 2.5, $(T \vee L)' = (A \vee S)'$. Аналогично из неразложимости $\mathfrak{C}(C(T))$ получим $(B \vee C)' = (A \vee S)'$, что противоречит тому, что $(T \vee L)' \cap (B \vee C)' = 1$.

Пусть теперь $C(H) = A \vee B \vee C$, а $H = A_1 \vee T$, где A_1 — неразложимый элемент, покрывающий A. Тогда

$$C(A) = (A_1 \vee T) \vee (A \vee B \vee C) = (A_1 \vee T) \vee (B \vee C).$$

Из равенства $G = (B \vee C) \vee C(B \vee C)$ следует, что $l(C(B \vee C)) = 4$, т.е. $C(B \vee C) = A_1 \vee T_0$, где T_0 — элемент, покрывающий T. Если $T_0 = T \vee K$ для некоторого атома K, то из $Z(A \vee K) = Z(G)$ получим $C(B \vee C) = (A \vee K) \vee \vee C_{C(B \vee C)}(A \vee K)$, что противоречит неразложимости A_1. Следовательно, T_0 неразложим. Но тогда все атомы из $C(B \vee C)$ лежат в $C(A)$. По уже доказанному A — единственный атом из $C(B \vee C)$, для которого решетка $\mathfrak{C}(C(A))$ разложима в прямую сумму подрешеток. Поэтому $A \lhd$

$\lhd C(B \vee C)$. Так как неразложимая в прямую сумму модулярная решетка $\mathfrak{C}(C(T))$ содержит два поэлементно неперестановочных атома $B \vee T$ и $C \vee T$, то по 2.6.1 фактор-группа $C(T)/T$ примарна.

Подгруппа $A \vee T$ содержит все атомы из $C(B \vee C)$. А так как $Z(C(B \vee \vee C)) = Z(G)$, то $C(B \vee C)$ содержит более двух атомов решетки $\mathfrak{C}(G)$. Это означает, что $A \vee T$ содержит атом K, отличный от A и T. Из $AT = AK = TK$ получаем $\bar{T} \cong \bar{A}$. Поэтому фактор-группа $\overline{C(T)}$ тоже примарна. В частности, $B \vee C$ — нильпотентная группа. Из примарности $C_{C(B \vee C)}(T)$ и леммы 2.6.7 получаем $T \lhd C(B \vee C)$. А так как $C(B \vee C)$ содержит два инвариантных атома A и T, то по этой же лемме фактор-группа $\overline{C(B \vee C)}$ примарна. Но тогда группа $G = (B \vee C) \cdot C(B \vee C)$ локально нильпотентна. В силу следствия 1.9 решетка $\mathfrak{C}(G)$ должна быть модулярна, что противоречит выбору G.

Таким образом, $C(H) = A_0 \vee B$. Случай $H = A \vee T \vee L$ симметричен рассмотренному выше. Поэтому $H = A_1 \vee T$. Элементы $A \vee B$ и $B \vee T$ являются атомами решетки $\mathfrak{C}(C(B))$. Предположим, что решетка $\mathfrak{C}(C(B))$ содержит атом K, не лежащий в $A \vee B \vee T$. Так как $A \vee B \vee T$ — максимальная абелева подгруппа из $C(B)$, то либо $A \vee K$, либо $T \vee K$ неабелева, т.е. является $\mathfrak{M}$-группой. Для определенности будем считать, что группа $A \vee K$ неабелева. Тогда $C(B) = (A \vee K) \cdot C(A \vee K)$. Отсюда $C(A \vee B) = (A \vee B) \cdot C(A \vee K) = A \cdot C(A \vee K)$. Но тогда

$$A_1 \vee B = (A_1 \vee B) \cap C(A \vee B) =$$

$$= (A \vee B) \vee [(A_1 \vee B) \cap C(A \vee K)] = (A \vee B) \vee (A_1 \cap C(A \vee K)).$$

Из $A \cap C(A \vee K) = Z(G)$ следует, что $A_1 \cap C(A \vee K) = Z(G)$. Но тогда $A_1 \vee \vee B = A \vee B$, что невозможно. Следовательно, все атомы решетки $\mathfrak{C}(C(B))$ лежат в $A \vee B \vee T$. Поэтому если B_0 — централизатор, покрывающий B, то $B_0 = B \vee S$ для некоторого атома S решетки $\mathfrak{C}(G)$.

Итак, мы показали, что если B — произвольный отличный от A атом решетки $\mathfrak{C}(G)$, $B \leq C(A)$ и B_0 — централизатор, покрывающий B, то B_0 разложим.

Пусть K — произвольная максимальная абелева подгруппа из $C(B)$.

Тогда $l(K) = 3$. Так как $K > B$ и любой элемент, покрывающий B, разложим, то $K = B \vee K_0$, где K_0 — элемент высоты 2. Если K_0 разложим и $K_0 = S \vee L$, где S и L — атомы из $\mathfrak{C}(G)$, то $B \vee S$ и $B \vee L$ —атомы решетки $\mathfrak{C}(C(B))$ и, следовательно, $K = A \vee B \vee T$. Если же K_0 неразложим, то, как уже отмечалось, K_0 не может покрывать атом, отличный от A, т.е. $K > A$. Таким образом, любая максимальная абелева подгруппа группы $C(B)$ содержит A. Но тогда $Z(C(B)) = B \geq A$, что невозможно. □

Нам понадобятся еще некоторые свойства групп из теоремы 2.6.

3.7. **ЛЕММА.** *Пусть G — не локально нильпотентная группа из теоремы* 2.6. *Если A — инвариантный в G атом решетки $\mathfrak{C}(G)$ и $G = C(A) \cdot S$, где $\bar{S}$ — максимальная p'-подгруппа из $\bar{G}$, то*

а) *$C(S)$ — максимальная абелева подгруппа группы G;*

б) *если H и K — такие элементы из $\mathfrak{C}(G)$, что $H, K \leq C(A)$, то $H \vee K = H \cdot K$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Проведем индукцию по числу $l(G)$. Если $l(G) = 2$, то G является $\mathfrak{M}$-группой и данное утверждение справедливо. Если же $l(G) > 2$ и T — атом из $C^2(S)$, то в силу предположения индукции $C_{C(T)}(S)$ — абелева группа и остается заметить, что $C_{C(T)}(S) = C(S)$.

б) Используем индукцию по длине интервала $[H, H \vee K]$. Предположим сначала, что $H \vee K$ покрывает H. Нам достаточно показать, что $H \lhd (H \vee K)$. Это очевидно в случае $H \vee K = H \cdot A$. Если $H \geq A$, то H и $H \vee K$ — элементы решетки $\mathfrak{C}(C(A))$. Как отмечалось при доказательстве следствия 1.9, из примарности $\overline{C(A)}$ следует, что $C(A)$ удовлетворяет нормализаторному условию и нам достаточно использовать лемму 1.7. Предположим теперь, что $(H \vee K) \cap A = Z(G)$. Снова по лемме 1.7 получим $H \cdot A \lhd (H \vee K)A$. Поэтому для любого $g \in H \vee K$ выполняется условие $H^g \leq (H \vee K) \cap H \cdot A = H$, т.е. $H \lhd (H \vee K)$.

Итак, если $H \vee K$ покрывает H, то $H \vee K = H \cdot K$. Предположим теперь, что длина интервала $[H, H \vee K]$ больше единицы. Пусть T — максимальный в $H \vee K$ элемент, содержащий H. Так как $T \lhd H \vee K$, то $H \vee K = T \cdot C^2(x)$ для $x \in K \backslash T$. В то же время из $T = T \cap (H \vee K) = H \vee (T \cap K)$ и предположения индукции получаем $T = H \cdot (T \cap K)$.

Поэтому $H \vee K = H \cdot (T \cap K) \cdot C^2(x) = H \cdot K$. □

Некоторым обращением теоремы 2.6 является

3.8. **ТЕОРЕМА.** *Пусть G — локально конечная группа, решетка централизаторов которой имеет конечную длину и является подрешеткой решетки подгрупп. Если найдется такой инвариантный в G атом A решетки $\mathfrak{C}(G)$, что $C(A)$ — локально нильпотентная группа, то решетка $\mathfrak{C}(G)$ модулярна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по длине решетки $\mathfrak{C}(G)$. Заметим, что если группа G локально нильпотентна, то утверждение теоремы следует из следствия 1.9. Поэтому в дальнейшем считаем, что группа G не локально нильпотентна. Предположим, что решетка $\mathfrak{C}(G)$ разложима в прямую сумму: $G = H \oplus C(H)$. Положим для определенности, что $A \leq H$. Тогда группа $C(H)$ локально нильпотентна, а H содержит такой инвариантный атом A, что $C_H(A)$ локально нильпотентен. В силу предположения индукции решетка $\mathfrak{C}(H)$ модулярна. Но тогда модулярна и решетка $\mathfrak{C}(G)$ как прямая сумма модулярных решеток. Таким образом, мы можем считать, что решетка $\mathfrak{C}(G)$ неразложима в прямую сумму подрешеток.

Пусть B — произвольный атом решетки $\mathfrak{C}(G)$, не лежащий в $C(A)$. Группа $A \vee B = A \cdot B$ является $\mathfrak{M}$-группой, и $Z(A \vee B) = Z(G)$. Поэтому $G = (A \vee B) \cdot C(A \vee B)$. Если группа $A \vee B$ нильпотентна, то ввиду локальной нильпотентности $C(A \vee B)$ группа G тоже должна быть локально нильпотентной. Следовательно, группа $A \vee B$ не нильпотентна. По лемме 3.4 $G = (A \vee B) \oplus C(A \vee B)$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, все атомы решетки $\mathfrak{C}(G)$ лежат в $C(A)$.

Обозначим через B произвольный атом, отличный от A. Решетка $\mathfrak{C}(C(B))$ содержит инвариантный атом $A \vee B$ с локально нильпотентным централизатором. В силу предположения индукции решетка $\mathfrak{C}(C(B))$ модулярна. Ввиду теоремы 3.6 мы можем считать, что решетки $\mathfrak{C}(C(A))$ и $\mathfrak{C}(C(B))$ неразложимы в прямую сумму подрешеток. Из теоремы 2.6 следует, что $C(A)/A$ является p-группой для некоторого простого числа p.

Предположим, что фактор-группа $\overline{C(A)}$ не является p-группой.

Пусть B — произвольный атом, отличный от A. Так как $A \vee B$ — инвариантный атом решетки $\mathfrak{L}(C(B))$, то, по лемме 2.6.7, $C(A \vee B)/B$ — примарная группа. Но тогда $C(A \vee B) = A \vee B$ и $\bar{A}$ — элементарная абелева q-группа, где q — простое число, отличное от p. А так как $\bar{B}$ является p-группой, то $A \vee B = A \cdot B$ содержит ровно два атома A и B решетки $\mathfrak{L}(G)$. Как и в следствии 1.9, из локальной нильпотентности $C(A)$ снова следует выполнение нормализаторного условия и по лемме 1.1 получаем, что $(A \vee B) \lhd C(A)$. А из инвариантности A получаем $(A \vee B) \lhd C(B)$. Поэтому $(A \vee B) \lhd \langle C(A), C(B)\rangle = G$. Но тогда и $B \lhd G$. Таким образом, если группа $\overline{C(A)}$ не примарна, то все атомы решетки $\mathfrak{L}(G)$ инвариантны в G.

Так как группа G покрывается коатомами решетки $\mathfrak{L}(G)$, то число атомов этой решетки больше двух, т.е. найдется атом C, отличный от A и B. Так как $A \vee B$ содержит только два атома и $C(A \vee B) = A \vee B$, то группа $B \vee C = B \cdot C$ является $\mathfrak{M}$-группой. Из $Z(B \vee C) = Z(G)$ получаем $G = (B \vee C) \cdot C(B \vee C)$. При этом $A \leq C(B \vee C)$. Так как $Z(C(B \vee C)) = Z(G)$, то $C(B \vee C)$ содержит атом T, отличный от A. Но тогда группа $(A \vee T \vee B)$ абелева, что противоречит равенству $C(A \vee B) = A \vee B$.

Итак, мы показали, что фактор-группа $\overline{C(A)}$ является p-группой. Пусть B — отличный от A атом решетки $\mathfrak{L}(G)$. Тогда $G = C(A) \cdot C(B)$. Так как группа G не локально нильпотентна, то $C(B)/B$ не может быть p-группой. По теореме 2.6, $C(B) = C(A \vee B) \cdot S$, где S — локально циклическая p'-группа. Поэтому $G = C(A) \cdot S$.

Покажем теперь, что если H и K — произвольные централизаторы, лежащие в $C(A)$, то $H \vee K = H \cdot K$. Если $A \leq H$, то H и $A \cdot K$ являются элементами решетки $\mathfrak{L}(C(A))$. Как отмечалось при доказательстве теоремы 1.8, $H \vee K \cdot A = H \cdot K \cdot A = H \cdot K$.

Предположим, что в $C(A)$ найдутся такие централизаторы H и K, что $H \vee K \neq H \cdot K$. Тогда, по уже доказанному, $H \cap A = K \cap A = Z(G)$ и $H \vee K = HAK$. Из $H \cap A = Z(G)$ получаем $G = C(A)C(H)$, т.е. можно считать, что $C(H)$ содержит S. Но тогда $H \leq C(S)$. По лемме 3.7 "а" $C(S)$ — абелева группа. Поэтому и группа H тоже абелева. Аналогично

$K \leq C(S^g)$ для некоторого $g \in G$. Пусть T — атом из K. Если $C(T) \geq H$, то K и $T \cdot H$ принадлежат $\mathfrak{C}(C(T))$. Из модулярности решетки $\mathfrak{C}(C(T))$ и леммы 3.7 "б" следует, что в этом случае $K \vee H = K \vee (T \cdot H) = K \cdot T \cdot H = K \cdot H$. Таким образом, группа $T \vee H$ не абелева.

Покажем, что H является атомом решетки $\mathfrak{C}(G)$. Предположим противное. Группа $R = A \vee T \vee H$ является $\mathfrak{M}$-группой, и $Z(R) = A \vee H_0$, где H_0 — элемент, покрываемый H. Рассмотрим $C(H_0)$. В силу 3.6 и 2.6.0 решетка $\mathfrak{C}(C(H_0))$ неразложима в прямую сумму подрешеток. А так как $\mathfrak{C}(C(H_0))$ содержит три независимых атома $H_0 \vee A$, $H_0 \vee B$ и H, два из которых поэлементно неперестановочны, то по 2.6.1 фактор-группа $C(H_0)/H_0$ должна быть примарной группой, что противоречит тому, что S и A лежат в $C(H_0)$. Таким образом, H является атомом решетки $\mathfrak{C}(G)$.

Аналогично и $K = T$ — тоже атом решетки $\mathfrak{C}(G)$. Если L — отличный от A атом из $C(H) \cap C(K)$, то $H \vee L$ и $K \vee L$ — атомы модулярной решетки $\mathfrak{C}(C(L))$. Но тогда $l(H \vee K \vee L) = 3$, т.е. $H \vee K \vee L = H \vee K \vee A$, что противоречит равенствам $Z(H \vee K \vee L) = L$ и $Z(H \vee K \vee A) = A$. Следовательно, $C(H) \cap C(K)$ содержит только один атом A решетки $\mathfrak{C}(G)$. В частности, $C(S) \cap C(K) = Z(G)$. Если $H < C(S) \cap C(A)$, то по уже доказанному $[C(S) \cap C(A)] \vee K = [C(S) \cap C(A)] \cdot K$. Но тогда $H \vee K \leq [C(S) \cap C(A)] \cdot K$ и мы получаем

$$H \vee K = H \cdot A \cdot K = H \cdot A \cdot K \cap [C(S) \cap C(A)] \cdot K =$$

$$= K \cdot (H \cdot A \cdot K \cap C(S) \cap C(A)) = K \cdot (H \cdot A \cdot K \cap C(S)) = K \cdot H \cdot (A \cdot K \cap C(S)).$$

И остается заметить, что $A \cdot K \cap C(S) \leq C(K) \cap C(S) = Z(G)$.

Таким образом, $C(S) \cap C(A) = H$. Но тогда $A \vee H$ — максимальная абелева в $C(A)$, т.е. $C(A) = A \vee H \vee K = A \cdot H \cdot K$. Поэтому $G = A \cdot H \cdot K \cdot S = A \cdot K \cdot C(S)$. Отсюда $C(K) = A \cdot K \cdot (C(S) \cap C(K)) = A \cdot K$, что невозможно.

Итак, мы показали, что если H и K лежат в $C(A)$, то $H \vee K = H \cdot K$. Покажем теперь, что если $l(C(A)) = 2k+1$ и H — такой элемент из $C(A)$, что $l(H) \leq k$, то для любого централизатора K из $\mathfrak{C}(G)$ выполняется равенство $H \vee K = H \cdot K$. Если $K \leq C(A)$, то равенство $H \vee K = H \cdot K$ доказано выше. Предположим, что $K \not\leq C(A)$. Тогда $C(A) \cdot K = G$, т.е.

можно считать, что $K \geq S$. В этом случае $K = K_0 S$, где $K_0 = K \cap C(A)$.

Предположим сначала, что $K = C(S)$. Из $K_0 = K \cap C(A)$ получаем $C(K_0) = C(K) \vee A = K \cdot A$. Поэтому $K_0 \vee A$ — максимальная абелева подгруппа группы G, т.е. $l(K_0 A) = k + 1$, и, следовательно, $l(K) = k + 1$. Если $A \leq H$, то из $l(H) \leq k$ и леммы 3.1 получаем, что высота $C(H)$ как элемента решетки $\mathfrak{C}(C(A))$ больше или равна $k + 1$. Но тогда $l(C(H)) > k+1$. Если же $A \cap H = Z(G)$, то из $l(A \cdot H) \leq k+1$ и леммы 3.1 получаем $l(C(AH)) \geq k + 1$ и, следовательно, $l(C(H)) > k + 1$. Таким образом, в любом случае $l(C(H)) > k + 1$. Предположим, что H и K являются элементами решетки $\mathfrak{C}(C(T))$ для некоторого атома T решетки $\mathfrak{C}(G)$. Так как решетка $\mathfrak{C}(C(T))$ модулярна, то $l(H \vee K) = l(H \vee K_0) + 1$, т.е. $H \vee K_0$ максимален в $H \vee K$. Отсюда $H \vee K = (H \vee K_0) \cdot S$. По уже доказанному $H \vee K_0 = H \cdot K_0$. Поэтому $H \vee K = (H \vee K_0) \cdot S = H \cdot K_0 \cdot S = H \cdot K$.

Предположим теперь, что $C(H) \cap K = Z(G)$. Тогда из $l(C(A)) = 2k+1$, $l(K_0) = k$, $l(C(H)) > k+1$ и $K_0 \vee (C(H) \cap C(A)) = (C(H) \cap C(A)) \cdot K_0$ получаем, что $l(C(H) \cap C(A)) = k + 1$ и $C(A) = (C(H) \cap C(A)) \cdot K_0$. Отсюда следует $l(C(H)) = k + 2$ и $l(H) = k$. Так как $l(C(H)) > k + 1 = l(C(H) \cap C(A))$, то $C(H) \not\leq C(A)$, т.е. $(H \cap A) = Z(G)$. Но тогда $C(H) \cap C(A) = H \cdot A$ и $C(A) = H \cdot A \cdot K_0 = H \cdot K_0 \cdot A$. Из $Z(H \cdot K_0) = Z(G)$ получаем $G = (H \cdot K_0) \cdot C(H \cdot K_0)$. Поэтому $S \leq C(H \cdot K_0)$ и, следовательно, $C(S) \geq H \cdot K_0$, что противоречит тому, что $C(S) \cap C(A) = K_0$.

Таким образом, $C(H) \cap K \neq Z(G)$. Если T — атом из $C(H) \cap K$, то $H \cdot T$ и K являются элементами решетки $\mathfrak{C}(G)$ и по уже доказанному $H \cdot T \vee K = H \cdot T \cdot K = H \cdot K$.

Предположим теперь, что $K > C(S)$. Пусть $K_0 = K \cap C(A)$. Из равенств $K = K_0 \cdot C(S)$, $\langle K_0, H \rangle = H \cdot K_0$ и $\langle H, C(S) \rangle = H \cdot C(S)$ следует, что и $\langle H, K \rangle = H \cdot K$.

Покажем теперь, что решетка $\mathfrak{C}(G)$ модулярна. Пусть L, H и K — такие централизаторы из $\mathfrak{C}(G)$, что $L > H$. Заметим, что если $l(C(A)) = 2k + 1$ и $l(H) \leq k$, то $H \leq C(A)$. В самом деле, если $H \not\leq C(A)$, то можно считать, что $H \geq S$. Но тогда $C(H) \leq C(S)$ и $H = C^2(H) \geq C(S)$, что невозможно в силу $l(C(S)) = k+1$. По уже доказанному при $l(H) \leq k$

получаем $H \vee K = H \cdot K$ и

$$L \cap (H \vee K) = L \cap (H \cdot K) = H \cdot (L \cap K) = H \vee (L \cap K).$$

Если же $l(H) > k$, то $l(L) > k+1$ и, следовательно, $l(C(L)) \leq k$. Поэтому

$$C(H) \cap (C(L) \vee C(K)) = C(L) \vee (C(H) \cap C(K)).$$

Отсюда $H \vee (L \cap K) = L \cap (H \vee K)$. □

3.9. **ТЕОРЕМА.** *Пусть G — минимальный контрпример к гипотезе* 0.1, *A и B — поэлементно перестановочные атомы решетки $\mathfrak{L}(G)$. Тогда $C(A \vee B) = A \vee B$, т.е. $A \vee B$ является максимальной абелевой подгруппой группы G.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — минимальный контрпример к гипотезе, A и B — поэлементно перестановочные атомы решетки $\mathfrak{L}(G)$. Предположим, что $C(A \vee B) > A \vee B$, т.е. $C(A)$ не является $\mathfrak{M}$-группой. Покажем, что в этом случае найдется такой атом $C \leq C(A)$, что $A \neq C$ и $(A \vee C) \lhd G$. Пусть $A \vee B$ не инвариантна в G. Тогда $A \vee B$ не инвариантна либо в $C(A)$, либо в $C(B)$. Для определенности предположим, что $A \vee B$ не инвариантна в $C(A)$. По теореме 3.6 модулярные решетки $\mathfrak{L}(C(A))$ и $\mathfrak{L}(C(B))$ неразложимы в прямую сумму подрешеток. Так как атом $A \vee B$ решетки $\mathfrak{L}(C(A))$ не инвариантен в $C(A)$, то из леммы 1.1 следует, что группа $C(A)/A$ не удовлетворяет нормализаторному условию и, следовательно, как отмечалось в 1.9, не примарна. В силу теоремы 2.6, $C(A) = C(A_0) \cdot S$, где A_0 — инвариантный в $C(A)$ элемент, покрывающий A. При этом $C(A_0)/A$ является p-группой для некоторого простого числа p, а $\bar{S}$ — локально циклическая p'-группа. По лемме 2.6.7, фактор-группа $C(A \vee B)/A$ не является p-группой, т.е. можно считать, что $C(A \vee B) = C(A_0 \vee B) \cdot S$. Так как $C(A \vee B) > A \vee B$, то группа $C(A \vee B)$ не абелева. Если $\bar{B}$ не является p-группой, то $B \geq S^g$ для некоторого элемента $g \in G$. Но тогда $C(A \vee B) \leq C_{C(A)}(S^g)$ и по лемме 3.7 группа $C(A \vee B)$ абелева, что невозможно. Таким образом, $\bar{B}$ является p-группой. Если фактор-группа $C(A \vee B)/B$ примарна, то $C(A_0 \vee B) = A \vee B$. Но тогда группа $C(A \vee B) = A_0 \vee B$ должна быть абелевой. Это означает, что $C(A \vee B)/B$ не примарна. По лемме 2.6.7, $A \vee B$ не инвариантна и в $C(B)$.

Пусть B_0 — инвариантный в $C(B)$ элемент, покрывающий B. Тогда $C(B) = C(B_0) \cdot S_1$ и $C(B_0)/B$ является p-группой. Как и выше, $S_1^g \not\leq A$ и, следовательно, $\bar{A}$ является p-группой. Поэтому $\overline{C(A_0)}$ и $\overline{C(B_0)}$ — примарные по числу p группы.

Если группа $A_0 \vee B$ не абелева, то $C(A)$ содержит два поэлементно неперестановочных атома $A \vee B$ и A_0. Так как $C(A)$ не является $\mathfrak{M}$-группой, то по 2.6.1 фактор-группа $C(A)/A$ должна быть примарной группой. Поэтому подгруппы $A_0 \vee B$ и $A \vee B_0$ абелевы. Так как $\overline{C(A_0 \vee B)}$ и $\overline{C(A \vee B_0)}$ являются p-группами, то $C(A_0 \vee B)$ и $C(A \vee B_0)$ содержатся в инвариантном коатоме решетки $\mathfrak{C}(C(A \vee B))$. Из единственности такого коатома следует, что $C(A_0 \vee B) = C(A \vee B_0)$, т.е. $A_0 \vee B = A \vee B_0$. В силу равенства $A_0 = A_0 \cap (A \vee B_0) = A \vee (A_0 \cap B_0)$ получаем, что $A_0 \cap B_0$ — атом решетки $\mathfrak{C}(G)$. Обозначим его через C. Подгруппа $A_0 = A \vee C$ инвариантна в $C(A)$. Если $A \vee C$ не инвариантна в $C(C)$, то, повторяя приведенные выше рассуждения, мы придем к утверждению, что $A \vee C$ не инвариантна в $C(A)$. Поэтому $(A \vee C) \lhd C(C)$. Но тогда $(A \vee C) \lhd \langle C(A), C(C) \rangle = G$.

Итак, если $C(A \vee B) > A \vee B$, то найдется такой атом C, что $A \vee C$ — инвариантная абелева подгруппа группы G. Пусть K — произвольный атом решетки $\mathfrak{C}(G)$. Покажем, что для него найдется такой атом $D \leq C(K)$, что $(K \vee D) \lhd G$. Если $K \leq C(A)$, то из $C(A \vee B) > A \vee B$ и модулярности решетки $\mathfrak{C}(C(A))$ следует, что $C(A \vee K) > A \vee K$, и существование D доказано выше. Пусть $K \not\leq C(A)$. Тогда $C(K) \vee A = G$. Отсюда $(A \vee C) \cdot C(K) = G$ и $C(A) = (A \vee C) \cdot (C(A) \cap C(K))$, т.е. $C(A) \cap C(K) > Z(G)$. Пусть T — атом из этого пересечения. Тогда из $C(A \vee B) > A \vee B$ последовательно получаем $C(A \vee T) > A \vee T$ и $C(T \vee K) > T \vee K$. По уже доказанному найдется такой атом D, что $D \vee K$ — инвариантная абелева подгруппа группы G.

Пусть $(A \vee C) \lhd G$. Так как $A \vee C$ является инвариантным атомом решеток $\mathfrak{C}(C(A))$ и $\mathfrak{C}(C(C))$, то по лемме 2.6.7 фактор-группы $C(A \vee C)/A$ и $C(A \vee C)/C$ примарны. А так как $C(A \vee C) > A \vee C$, то они являются p-группами для одного и того же простого числа p. Но тогда и фактор-группа $\overline{C(A \vee C)}$ тоже является p-группой, т.е. $C(A \vee C)$ — инвариантный

в G локально нильпотентный централизатор.

Предположим сначала, что $A \vee C$ содержит не все атомы решетки $\mathfrak{L}(G)$. Пусть K — атом, не лежащий в $A \vee C$. По доказанному выше найдется такой атом $D \leq C(K)$, что $C(K \vee D)$ — локально нильпотентная инвариантная подгруппа группы G. Если $(A \vee C) \cap (K \vee D) = Z(G)$, то по теореме Б. И. Плоткина [20, теор. 18.1.2.2] группа $G = C(A \vee C) \cdot C(K \vee \vee D)$ локально нильпотентна, что противоречит следствию 1.9. Если же $C(A \vee C) \cap C(K \vee D)$ совпадает с атомом T решетки $\mathfrak{L}(G)$, то $C(T) = = C(A \vee C) \cdot C(K \vee D)$ является локально нильпотентным инвариантным коатомом решетки $\mathfrak{L}(G)$. В этом случае по теореме 3.8 решетка $\mathfrak{L}(G)$ должна быть модулярной.

Таким образом, все атомы решетки $\mathfrak{L}(G)$ лежат в $A \vee C$. Как уже отмечалось, фактор-группа $\overline{C(A \vee C)}$ является p-группой для некоторого простого числа p. Если M и N — два различных коатома решетки $\mathfrak{L}(G)$, то $M \cap N = C(A \vee C)$. Это означает, что коатомы решетки $\mathfrak{L}(G)$ индуцируют такое расщепление фактор-группы $G/C(A \vee B)$, что любые две компоненты его порождают всю фактор-группу. Если $x \in M \backslash C(A \vee C)$, то $M = C(A \vee C) \cdot C^2(x)$ и, следовательно, $M/C(A \vee B)$ — абелева группа.

По лемме 2.1 фактор-группа $G/C(A \vee C)$ является либо элементарной абелевой группой, либо группой Фробениуса. В любом случае мы можем считать, что $C(A) \lhd G$. По теореме 2.6, $C(A) = C(A \vee C) \cdot S$, где $\bar{S}$ — локально циклическая p'-группа. Так как $C(A)/C(A \vee C) \leq G/C(A \vee C)$ — элементарная абелева группа, то $|\bar{S}| = q$ для некоторого простого числа $q \neq p$. По лемме 3.7 "а" $C(S) \vee C$ является $\mathfrak{M}$-группой. Применяя к ней следствие 2.2, получим, что группа $\bar{C}$ конечна. Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 2.6.4 пп. "б"—"г", получим противоречие. Теорема доказана. □

3.10. **СЛЕДСТВИЕ.** *Пусть G — минимальный контрпример к гипотезе* 0.1. *Если $H \lhd G$, то либо $H \leq Z(G)$, либо $C(H) = Z(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H — абелев нормальный делитель группы G и $C^2(H) > Z(G)$. Для простоты положим $C^2(H) = H$. Предположим сначала, что H — атом решетки $\mathfrak{L}(G)$. Пусть B — отличный от H

атом. Если $B \not\leq C(H)$, то $G = (B \cdot H) \cdot C(B \cdot H)$. Если при этом $C(B \cdot H)$ является $\mathfrak{M}$-группой, то по следствию 3.5 либо группа G локально нильпотентна, либо $G = (B \cdot H) \oplus C(B \cdot H)$. Если же $C(B \cdot H)$ не $\mathfrak{M}$-группа и T — атом из $C(B \cdot H)$, то $C(T) \cap C(B \cdot H) > T$ и, следовательно, $C(B \vee T) > B \vee T$, что противоречит теореме 3.9.

Предположим теперь, что $B \leq C(H)$ для любого атома B из $\mathfrak{C}(G)$. Тогда по теореме 3.9 $B \vee H = \omega(G)$ — максимальная абелева подгруппа группы G. Коатомы решетки $\mathfrak{C}(G)$ задают расщепление фактор-группы $G/\omega(G)$. Так как никакая группа не покрывается двумя собственными подгруппами, то найдется атом C, отличный от B и H. Но тогда из равенств $B \cdot H = B \cdot C = C \cdot H$ и примарности групп $\omega(G)/A$ и $\omega(G)/B$ следует, что $\overline{B \cdot H}$ является p-группой. По лемме 2.1 фактор-группа $G/\omega(G) = C(H)/\omega(G) \cdot C(B)/\omega(G)$ есть либо элементарная абелева q-группа, либо группа Фробениуса.

Так как $H \lhd G$, то, по теореме 3.8, $C(H)$ не локально нильпотентна. Поэтому $C(H)/H = \omega(G)/H \leftthreetimes \langle xH \rangle$ — группа Фробениуса. Снова повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 2.6.4 пп. "б"—"г", получим противоречие.

Таким образом, группа G не содержит инвариантных атомов решетки $\mathfrak{C}(G)$. Предположим теперь, что $l(H) = 2$. Если H неразложим и A — атом из H, то $A \lhd G$, что невозможно. Поэтому $H = A \vee B$ для некоторых атомов A и B решетки $\mathfrak{C}(G)$. Если $H = A \oplus B$, то из $H \lhd C(B)$ получим $A \lhd C(B)$ и $A \lhd \langle C(A), C(B) \rangle = G$. Поэтому H содержит атом C, отличный от A и B. Из равенств $A \cdot B = A \cdot C = B \cdot C$ получаем $\bar{A} \cong \bar{B}$, т.е. $\overline{A \vee B}$ — примарная группа. По теореме 3.9, $C(A \vee B) = A \vee B$.

Пусть $x \in G \backslash (A \vee B)$. Если $(A \vee B) \cdot C^2(x) = G$, то из абелевости $C^2(x)$ получаем $(A \vee B) \geq G'$. Но тогда $C(A) > G'$, т.е. $C(A) \lhd G$, что невозможно. Таким образом, для любого элемента $x \in G \backslash (A \vee B)$ подгруппа $(A \vee B) \cdot C^2(x)$ является коатомом решетки $\mathfrak{C}(G)$. Но тогда коатомы решетки $\mathfrak{C}(G)$ индуцируют расщепление фактор-группы $G/(A \vee \vee B)$. По лемме 2.1, G должна обладать инвариантным атомом решетки $\mathfrak{C}(G)$.

Если, наконец, $l(H) > 2$, то, по теореме 3.9, H может содержать только один атом A. Но тогда, очевидно, $A \lhd G$.

Итак, мы показали, что если H — абелев нормальный делитель группы G, то $H \leq Z(G)$. Предположим теперь, что H — неабелев нормальный делитель группы G и $C(H) > Z(G)$. Снова можно считать, что $H = C^2(H)$, т.е. $H \in \mathfrak{C}(G)$. Так как в G нет нецентральных абелевых нормальных подгрупп, то $Z(H) = Z(G)$. Но тогда $G = H \cdot C(H)$. Если H или $C(H)$ не является $\mathfrak{M}$-группой, то найдутся такие атомы $A \leq H$ и $B \leq C(H)$, что $C(A \vee B) > A \vee B$. Если же H и $C(H)$ — $\mathfrak{M}$-группы, то получаем противоречие со следствием 3.5. □

3.11. **ТЕОРЕМА.** *Пусть G — локально конечная группа, решетка централизаторов которой имеет конечную длину и является подрешеткой решетки подгрупп. Тогда решетка $\mathfrak{C}(G)$ модулярна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть G — минимальный контрпример, A и B — поэлементно перестановочные атомы решетки $\mathfrak{C}(G)$. В силу следствия 3.10 подгруппа $A \vee B$ не инвариантна в G. Поэтому $A \vee B$ не инвариантна либо в $C(A)$, либо в $C(B)$. Предположим для определенности, что $A \vee B$ не инвариантна в $C(A)$. Рассмотрим группу $C(A)$. По теореме 3.9 подгруппа $A \vee B$ — максимальная абелева в G. Поэтому, в силу теоремы 2.6, $C(A) = A_0 \cdot B$, где A_0 — инвариантный в $C(A)$ элемент, покрывающий A. При этом $C(A)/A = A_0/A \leftthreetimes (A \vee B)/A$ является группой Фробениуса. Так как группа A_0 абелева, то по лемме 1.3 из [19] $A_0 = A \times [A_0, B]$. Кроме того, $N_{C(A)}(B) = A \vee B$. Пусть $x \in C(A) \backslash (A \vee B)$. Атомы B и B^x лежат в группе $[A_0, B] \leftthreetimes B$. Поэтому $B \vee B^x = \langle B, B^x \rangle \leq [A_0, B] \leftthreetimes B$. Но тогда $B \vee B^x \leq C(A)$ и $C(A) = A \vee (B \vee B^x)$. Отсюда $Z(B \vee B^x) = Z(G)$, т.е. $G = (B \vee B^x) \cdot C(B \vee B^x)$, что противоречит следствию 3.10. □

Таким образом, мы доказали, что если G — локально конечная группа, решетка централизаторов которой имеет конечную длину и является подрешеткой решетки подгрупп, то группа G удовлетворяет гипотезе 0.1 и, следовательно, к ней применимы утверждения 2.4 и 2.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Schmidt*, Zentralisatorverbande endlicher Gruppen, Rend. Sem. Math. Univ. Padova, **44** (1970), 97—131.

2. *W. Gaschutz*, Gruppen, deren samtliche Untergruppen Zentralisatoren sind, Arch. Math., **6** (1954), 5—8.

3. *В. А. Антонов*, Группы, близкие к группам Гашюца, Изв. высш. учебн. завед., Математика, N 7 (1979), 3—9.

4. *M. Reuther*, Endliche Gruppen, in deren alle das Zentrum enthaltenden Untergruppen Zentralisatoren sind, Arch. Math., **29**, N 1 (1979), 45—54.

5. *Y. Cheng*, On duble centraliser subgroups of some finite p-groups, Proc. Amer. Math. Soc., **86**, N 2 (1982), 205—208.

6. *Y. Cheng*, On finite p-groups with cyclic commutator subgroups, Arch. Math., **39** (1982), 295—298.

7. *В. А. Антонов*, Группы типа Гашюца и близкие к ним группы, Матем. заметки, **27**, N 6 (1980), 839—857.

8. *В. А. Антонов*, Конечные группы с модулярной решеткой централизаторов, Алгебра и логика, **26**, N 6 (1987), 653—683.

9. Коуровская тетрадь, Нерешенные вопросы теории групп, 11-е изд. доп., Новосибирск, 1990.

10. *В. А. Антонов*, О связи решетки централизаторов группы с решеткой ее подгрупп, в сб. "Исследов. алгебраич. систем", Свердловск, 1989, 4—13.

11. *В. А. Антонов*, О конечных группах с модулярной решеткой централизаторов, Междун. конф. по алгебре, Тезисы докл. по теории групп, Новосибирск, 1989, 6.

12. *В. А. Антонов*, Конечные группы, в которых решетка централизаторов является подрешеткой решетки подгрупп, Изв. высш. учебн. завед., Математика, N 3 (1991), 5—14.

13. *R. M. Bryant*, Groups with the minimal condition on centralisers, J. Algebra, **60** (1979), 371—383.

14. *А. Г. Курош*, Теория групп, М., Наука, 1967.

15. *В. М. Бусаркин, А. И. Старостин*, О расщепляемых локально конечных группах, Матем. сб., **62**, N 3 (1963), 275—294.

16. *В. А. Антонов*, Об одном классе модулярных решеток, Алгебра и логика, **30**, N 1 (1991), 3—14.

17. *Г. Биркгоф*, Теория решеток, М., Наука, 1984.

18. *В. А. Антонов*, Конечные группы с модулярной решеткой централизаторов. 2, деп. в ВИНИТИ 28.08.90, N 4822 — В 90.

19. *R. M. Bryant, B. Hartley*, Periodic locally soluble groups with the minimal condition on centralisers, J. Algebra, **61** (1979), 326—334.

20. *М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков*, Основы теории групп, 3-е изд., М., Наука, 1982.

Адрес автора:

АНТОНОВ Владимир Алексеевич,

РОССИЯ,

454053, г. Челябинск,

Троицкое шоссе, д. 50, кв. 44.

Поступило 19 августа 1993 г.