ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 353, № 2, с. 153–154

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УСЛОВИЯХ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КОНФОРМНОСТИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ КРИВЫХ

© 1997 г. В. Я. Гутлянский, В. И. Рязанов

Представлено академиком В.С. Владимировым 27.03.95 г.

Поступило 03.03.95 г.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Кривая Жордана $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется квазиконформной кривой, или квазиокружностью, если она является образом единичной окружности S^1 при квазиконформном автоморфизме комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Альфорс доказал, что кривая Γ является квазиконформной тогда и только тогда, когда отношение

$$\frac{|w_1 - w| + |w - w_2|}{|w_1 - w_2|} \tag{1}$$

ограничено для всех $w_1, w_2 \in \Gamma$ и $w \in \Gamma(w_1, w_2)$, где $\Gamma(w_1, w_2)$ обозначает дугу кривой Γ с концами в w_1, w_2, имеющую наименьший диаметр.

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – квазиконформная кривая и f – конформное отображение единичного круга D на ее внутренность. Тогда f допускает квазиконформное продолжение через S^1 до квазиконформного гомеоморфизма комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (см. [1, с. 71]), причем такое продолжение неединственно. Если среди них существует квазиконформное продолжение с комплексной характеристикой $\mu(z)$ такой, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{1 \le |z| \le t} |\mu(z)| \to 0,\ t \to 1 + 0, \tag{2}$$

тогда кривая Γ называется асимптотически конформной (ср. [2–4]). Беккер и Поммеренке [4] (см. также работу Агада и Геринга [2]) установили критерий асимптотической конформности жордановой кривой $\Gamma \subset \mathbb{C}$, который заключается в существовании предела

$$\lim_{|w_1 - w_2| \to 0} \frac{|w_1 - w| + |w - w_2|}{|w_1 - w_2|} = 1, \tag{3}$$

равномерного относительно $w \in \Gamma(w_1, w_2)$.

Хорошо известно, что квазиокружности могут быть неспрямляемыми (см. [5, с. 42; 6, с. 104]). Асимптотически конформные кривые, несмотря на кажущуюся простоту, сохраняют за собой это свойство.

Асимптотически конформные кривые и их связи с различными величинами в терминах внутренних и граничных свойств конформного отображения и его квазиконформного продолжения исследовались многими авторами (см., например, [3, 4, 7–9] и цитируемую там литературу). Описание асимптотически конформных кривых в терминах асимптотической однородности квазиконформного отображения дано в работах [10, 11].

Квазисимметричный гомеоморфизм $g(e^{i\alpha}) = e^{i\Omega(\alpha)}$ единичной окружности S^1 будем называть асимптотически симметричным на S^1, если

$$\lim_{\vartheta \to 0} \frac{\Omega(\alpha + \vartheta) - \Omega(\alpha)}{\Omega(\alpha) - \Omega(\alpha - \vartheta)} = 1 \tag{4}$$

равномерно относительно $\alpha \in \mathbb{R}$ (ср. [12]).

Наряду с асимптотически симметричными гомеоморфизмами мы будем рассматривать асимптотически конформные автоморфизмы круга D, которые характеризуются условием, что их комплексные характеристики удовлетворяют условию

$$k(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{1 - t \le |z| < 1} |\mu(z)| \to 0$$

при $t \to 0$ (см. [3, 4, 7]).

Лемма. *Пусть $g(e^{i\alpha}) = e^{i\Omega(\alpha)}$ – квазисимметричный автоморфизм единичной окружности S^1. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *g асимптотически симметричен на S^1;*

2) *существует асимптотически конформное продолжение $F: D \to D$ гомеоморфизма g;*

3) *существует квазиконформное продолжение $F: D \to D$ гомеоморфизма g с комплексной характеристикой $\mu(\zeta)$ такой, что*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \iint\limits_{\substack{|\zeta - \eta| \le t \\ \zeta \in D}} |\mu(\zeta) - \nu(e^{i\alpha}, \eta)| dm_\zeta = 0 \tag{5}$$

равномерно относительно $\eta \in S^1$, где $\alpha = \arg(\zeta - \eta)$ и выполняется соотношение

$$\operatorname{Im} \int_{\beta}^{\beta + \pi} \frac{1 - \nu(e^{i\alpha}, \eta) e^{-2i\alpha}}{1 + \nu(e^{i\alpha}, \eta) e^{-2i\alpha}} d\alpha = 0,\ \beta = \arg\eta + \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины, Донецк

2. КРИТЕРИИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КОНФОРМНОСТИ

Начнем с формулировки критерия асимптотической конформности кривой в терминах существования квазиконформного продолжения с комплексной характеристикой, равномерно аппроксимативно непрерывной на S^1.

Теорема 1. *Жорданова кривая $\Gamma \subset \mathbb{C}$ является асимптотически конформной, если существует квазиконформное отображение f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\Gamma = f(S^1)$, с комплексной характеристикой $\mu(z)$ такой, что для некоторого $p > 0$*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \iint\limits_{\substack{|z-\eta| \le t \\ z \in D}} |\mu(z) - \mu(\eta)|^p dm_z = 0 \qquad (7)$$

равномерно относительно $\eta \in S^1$.

Отметим, что частный случай теоремы 1, когда $\mu(\eta) \equiv 0$ на S^1, установлен ранее в работе [11] на основе сочетания понятия асимптотической однородности и геометрического критерия (3). Доказательство теоремы 1 основано на лемме и не использует упомянутый выше критерий асимптотической конформности кривой Γ.

Переходя к анализу сформулированного результата, заметим, что принадлежность комплексной характеристики $\mu(z)$ классу C^α, $0 < \alpha \le 1$, гарантирует принадлежность кривой Γ классу $C^{1+\alpha}$. Однако непрерывность $\mu(z)$ не влечет в общем случае гладкости кривой Γ (см., например, [5, с. 41]). В этой связи следующий критерий представляет самостоятельный интерес.

Следствие 1. *Если квазиконформный автоморфизм f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ имеет непрерывную комплексную характеристику в окрестности S^1, то квазиокружность $\Gamma = f(S^1)$ является асимптотически конформной кривой.*

Действительно, в этом случае $\mu(z)$ является равномерно непрерывной в достаточно малой окрестности единичной окружности S^1 и поэтому выполнено условие (7).

Обозначим: $\delta(t, \eta)$ – существенный модуль непрерывности комплексной характеристики $\mu(z)$ в фиксированной точке $\eta \in S^1$, т.е.

$$\delta(t, \eta) = \operatorname*{ess\,sup}_{|z-\eta| \le t} |\mu(z) - \mu(\eta)|. \qquad (8)$$

Следствие 2. *Пусть для некоторого $p > 0$ условие Дини*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\varepsilon \frac{\delta^p(t, \eta)}{t} dt = 0 \qquad (9)$$

выполняется равномерно относительно $\eta \in S^1$. Тогда Γ асимптотически конформна.

Для доказательства следствия 2 достаточно заметить, что

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{|z-\eta| \le \varepsilon} |\mu z - \mu\eta|^p dm_z \le 2\pi \int_0^\varepsilon \frac{\delta^p(t, \eta)}{t} dt. \qquad (10)$$

Пусть далее Γ – замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$ и $\varphi_k(z)$, $k = 1, 2$, – конформные отображения круга D и его внешности соответственно на внутренность и внешность кривой Γ. Хорошо известно, что кривая Γ является квазиконформной тогда и только тогда, когда гомеоморфизм $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ окружности S^1 является квазисимметричным (см. [6, с. 100]). Мы завершим данный параграф аналогичным критерием для асимптотически конформных кривых.

Теорема 2. *Пусть Γ – квазиконформная кривая в $\mathbb{C}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *Γ – асимптотически конформная кривая;*

2) *$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ – асимптотически симметричный автоморфизм окружности S^1.*

При выполнении одного из этих условий, конформные отображения φ_k, $k = 1, 2$, удовлетворяют соотношению

$$\lim_{\vartheta \to 0} \frac{\varphi_k(e^{i(\alpha+\vartheta)}) - \varphi_k(e^{i\alpha})}{\varphi_k(e^{i\alpha}) - \varphi_k(e^{i(\alpha-\vartheta)})} = 1 \qquad (11)$$

равномерно относительно $\alpha \in \mathbb{R}$.

Отметим в заключение, что с учетом геометрического критерия Беккера–Поммеренке асимптотической конформности квазиконформных кривых (3) отсюда получается, в частности, известная теорема Гардинера–Сулливана (см. [12]).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант U96000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969. С. 133.
2. *Agard S.B., Gehring F.W.* // Proc. London Math. Soc. 1965. V. 3. № 14A. P. 1–21.
3. *Carleson L.* // J. Analyse Math. 1967. V. 19. P. 1–13.
4. *Becker J., Pommerenke Ch.* // Math. Ztschr. 1978. V. 161. № 1. P. 69–80.
5. *Белинский П.П.* Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974. С. 98.
6. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane. 2nd ed. B.: Springer-Verlag. 1973.
7. *Anderson J.M., Becker J., Lesley F.D.* // J. London Math. Soc. 1988. V. 38. № 2. P. 453–462.
8. *Anderson J.M., Hinkkanen A.* // Complex Variables Theory Appl. 1987. V. 8. P. 145–152.
9. *Pommerenke Ch., Warschawski S.E.* // Comment. Math. Helv. 1982. V. 57. P. 107–129.
10. *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* // ДАН. 1993. Т. 330. № 5. С. 546–548.
11. *Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I.* // Complex Variables. 1994. V. 25. P. 357–366.
12. *Gardiner F.P., Sullivan D.P.* // Amer. J. Math. 1992. V. 114. P. 683–736.