

Решения задач из прошлых выпусков

СЕРИЯ 1, вып. 13, задача 163. УСЛОВИЕ. Решить в целых числах уравнение $x^8 - y^5z = x^5$, где y и z — простые числа. (Г. А. Делибаши)

ОТВЕТ. $x = 2, y = 2, z = 7$.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем уравнение: $x^5(x^3 - 1) = y^5z$. Пусть $x = 2k$ с целым k . Если $|k| > 1$, то $x^5 = 2^5k^5$, что не может быть равно y^5z , тем более после умножения на $x^3 - 1$. Если $x = -2$, то легко видеть, что решений также нет. Значит, $x = 2$, тогда правая часть равна 2^57 , откуда $y = 2, z = 7$.

Пусть теперь x нечётно. Если $x = p$, где p нечётное простое, то $p^3 - 1 = 2m$, где $m \neq 1$, и $p^5(p^3 - 1)$ не имеет вида y^5z с простыми y, z . Если же $x = pk$, где p нечётное простое, а $|k| \geq 2$, то $x^5 = p^5k^5$ заведомо не имеет нужного вида. (Ю. Раскин)

СЕРИЯ 1, вып. 13, задача для школьников 6. УСЛОВИЕ. Если между цифрами 1 и 6 числа 16 вставить число 15, затем в полученное таким образом число 1156 вставить между цифрами 1 и 5 опять число 15 и так поступить произвольное число раз и далее, вставляя каждый раз число 15 между 1 и 5, то полученное число будет квадратом целого числа. Доказать это. (Предложил С. И. Городов)

РЕШЕНИЕ. Пусть число 15 вставили n раз. Тогда получилось число $\underbrace{1 \dots 1}_{n+1} \underbrace{5 \dots 5}_n 6$. Его можно записать как

$$\underbrace{1 \dots 1}_{n+1} \cdot \underbrace{10 \dots 0}_n 5 + 1 = \underbrace{3 \dots 3}_{n+1} \cdot \underbrace{3 \dots 3}_n 5 + 1 = (\underbrace{3 \dots 3}_n 4)^2 - 1 + 1 = (\underbrace{3 \dots 3}_n 4)^2.$$

(Ю. Раскин)

СЕРИЯ 1, вып. 13, задача для школьников 7. УСЛОВИЕ. Доказать формулу

$$n! + \frac{(n+1)!}{1!} + \frac{(n+2)!}{2!} + \dots + \frac{(n+k)!}{k!} = \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)!}. \quad (\text{Б. А. Оксенов})$$

РЕШЕНИЕ. Проведём индукцию по k . Случай $k = 0$ очевиден. Пусть для k формула верна. Докажем её для $k + 1$:

$$\begin{aligned} n! + \frac{(n+1)!}{1!} + \frac{(n+2)!}{2!} + \dots + \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!} &= \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)} + \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!} = \\ &= \frac{(n+k+1)!(k+1)}{(k+1)!(n+1)} + \frac{(n+k+1)!(n+1)}{(k+1)!(n+1)} = \frac{(n+k+2)!}{(k+1)!(n+1)}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

(Ю. Раскин)

8.7. УСЛОВИЕ. Докажите, что для любых целых неотрицательных n, p найдётся такая константа $C > 0$, что для любой бесконечно дифференцируемой функции f условия

$$\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^p dx < 1;$$

$$p > 1, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n+p+1}{p} \right\rfloor \quad \text{или} \quad p = 1, \quad k = 0, \dots, n+1,$$

влекут условие $|f(0)| < C$.

(А. Я. Канель)

ЗАМЕЧАНИЕ. В тексте, опубликованном в выпуске 8, имелись опечатки: указано $1/p$ вместо p в подынтегральном выражении и $\left\lfloor \frac{n+p}{p} \right\rfloor$ вместо $\left\lfloor \frac{n+p+1}{p} \right\rfloor$. Для этих условий найден контрпример в виде бесконечно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций

$$f_\varepsilon(x) = \ln \left| \ln \left(\frac{x}{m} + \varepsilon \right) \right|, \quad m \geq e,$$

для которых при $n \equiv -1 \pmod{p}$, $p > 1$, значения всех интегралов

$$\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^p dx, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n+p}{p} \right\rfloor,$$

меньше единицы, но $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(0) = \infty$.

РЕШЕНИЕ. Ключевую роль в доказательстве играет следующая

ЛЕММА. В условиях задачи

$$|f^{(k)}(t)| < \frac{n+2p}{p} t^{-(n+p)/p}, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{p} \right\rfloor, \quad 0 < t \leq 1.$$

Доказательство леммы. Вспомним неравенство Гёльдера для интегралов:

$$\int_a^b |g(x)h(x)| dx \leq \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_a^b |h(x)|^{q'} dx \right)^{1/q'}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad 1 < q.$$

При

$$g(x) = 1, \quad h(x) = x^{n/p} |f^{(k)}(x)|, \quad q = \frac{p}{p-1}$$

получаем

$$\left| \int_0^t x^{n/p} f^{(k)}(x) dx \right| \leq \int_0^t x^{n/p} |f^{(k)}(x)| dx \leq t^{(p-1)/p} \left(\int_0^t x^n |f^{(k)}(x)|^p dx \right)^{1/p} < 1.$$

Интегрирование по частям даёт

$$\begin{aligned} 1 &> \left| \int_0^t x^{n/p} f^{(k)}(x) dx \right| = \\ &= \left| \frac{p}{n+p} t^{(n+p)/p} f^{(k)}(t) - \frac{p}{n+p} \int_0^t x^{(n+p)/p} f^{(k+1)}(x) dx \right| \geq \\ &\geq \left| \frac{p}{n+p} t^{(n+p)/p} f^{(k)}(t) \right| - \left| \frac{p}{n+p} \int_0^t x^{(n+p)/p} f^{(k+1)}(x) dx \right| > \\ &> \frac{p}{n+p} t^{(n+p)/p} |f^{(k)}(t)| - \frac{p}{n+p}. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы. \square

Решение задачи при $p = 1$ непосредственно следует из леммы. Действительно, многократно интегрируя по частям при $k = n + 1$, получаем:

$$\begin{aligned} 1 > \left| \int_0^1 x^n f^{(n+1)}(x) dx \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} (A_n^{n-k} f^{(n-k)}(1)) + (-1)^n n! \int_0^1 f'(x) dx \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} A_n^{n-k} f^{(n-k)}(1) + (-1)^n n! (f(1) - f(0)) \right|, \end{aligned}$$

где

$$A_n^{n-k} = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Поскольку при $k = 0, \dots, n$ согласно лемме $|f^{(k)}(1)| < n + 2$, получаем, что $|f(0)|$ ограничена.

Перейдём к случаю $p > 1$. Интегральное неравенство Гёльдера меняет знак при $0 < q < 1$:

$$\int_a^b |g(x)h(x)| dx \geq \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_a^b |h(x)|^{q'} dx \right)^{1/q'},$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad 0 < q < 1.$$

Пусть $n = mp + r$, где $0 \leq r < p$. Если $r < p - 1$, то, применяя неравенство Гёльдера для

$$g(x) = x^r, \quad h(x) = x^{mp} |f^{(k)}(x)|^p, \quad q = \frac{1}{1-p}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

получаем, что для интегралов

$$\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^p dx, \quad n = mp + r, \quad 0 \leq r < p - 1$$

выполняются неравенства

$$1 > \int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^p dx = \int_0^1 x^r (x^m |f^{(k)}(x)|)^p dx \geq$$

$$\geq \left(\int_0^1 x^{r/(1-p)} dx \right)^{1-p} \left(\int_0^1 x^m |f^{(k)}(x)| dx \right)^p.$$

(При $0 \leq r < p - 1$ интеграл $\int_0^1 x^{r/(1-p)} dx$ конечен, так что конечны и интегралы $\int_0^1 x^m |f^{(k)}(x)| dx$ для $k = 0, 1, \dots, \left[\frac{n+p+1}{p} \right] = m + 1$.) Действуя как в случае $p = 1$ с заменой n на m (и используя лишь $\left[\frac{n+p}{p} \right]$ производных), получаем нужный результат.

При $r = p - 1$ неравенство Гёльдера применить нельзя, так как появляется расходящийся интеграл. Однако заметим, что

$$\int_0^1 x^{n+1} |f^{(k)}(x)|^p dx \leq \int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^p dx < 1.$$

Поэтому можно рассуждать как выше, заменив n на $n + 1$ и используя $\left[\frac{n+p+1}{p} \right]$ производных.

Комментарии. 1. Можно показать, что указанное в условии количество k интегральных неравенств не только достаточно, но и необходимо для гарантии ограниченности $|f(0)|$.

2. Задача возникла при рассмотрении доказательства леммы Соболева в книге Р. Нарасимхана «Анализ на действительных и комплексных многообразиях». А. Я. Канель-Белов заметил, что доказательство леммы Соболева удивительным образом сводится к одномерью! Так и появилась эта задача.

(А. С. Мингажев)

13.9. Условие. В компании n человек. У каждого своя новость. Они перезваниваются, причём в каждом разговоре собеседники сообщают друг другу все известные им новости.

(б) За один день каждый человек участвует не более чем в одном разговоре. Какое минимальное количество дней необходимо, чтобы все узнали все новости?¹⁾

(А. В. Анджанс)

Ответ. Пусть k — такое натуральное число, что $2^{k-1} < n \leq 2^k$. Если n чётно, то понадобится k дней, а если n нечётно, понадобится $k+1$ день.

Решение. Покажем сначала, что потребуется хотя бы k дней. Возьмём одного из жителей, пусть это Вася. До первого обмена новостями Васину новость знал только сам Вася, и каждый день число людей, знающих Васину новость, увеличивается не более чем в два раза. Значит, после $k-1$ дней число людей, знающих Васину новость, не больше, чем $2^{k-1} < n$.

Покажем теперь, что k вопросов хватит, если $n \leq 2^k$ и n чётно. Нарисуем правильный n -угольник, пронумеруем его вершины $A_1 \dots A_n$ по часовой стрелке и сопоставим каждому жителю по вершине.

Пусть σ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) — симметрия относительно срединного перпендикуляра к отрезку $A_{2^{i-1}}A_{2^i-1}$. Пусть в день с номером i происходит обмен информацией между парами вершин, переходящих друг в друга при симметрии σ_i . Назовём допустимыми те движения многоугольника, которые получаются из композиции k симметрий

$$\sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$$

вычёркиванием нескольких членов (возможно, всех или ни одного). Способов вычеркнуть члены всего 2^k .

Рассмотрим какую-то вершину A . Несложно видеть, что после первого дня соответствующая новость известна вершинам (то есть лю-

¹⁾ Решение п. (а) см. Шаповалов А. В. Задача о сплетниках // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 249–253.

дям) A и $\sigma_1 A$, после второго дня — вершинам A , $\sigma_1 A$, $\sigma_2 A$ и $\sigma_2 \sigma_1 A$. Рассуждая таким образом, приходим к тому, что после k -го дня эта новость известна тем вершинам, которые являются образами вершины A при всевозможных допустимых движениях.

Покрасим стороны нашего n -угольника в два цвета чередующимся образом. Рассмотрим симметрии n -угольника, сохраняющие раскраску сторон. Такими симметриями можно перевести любую вершину в любую. Утверждение задачи для чётного n вытекает теперь из следующего факта.

ЛЕММА. Множество допустимых движений совпадает с множеством всех симметрий многоугольника, сохраняющих раскраску сторон.

Доказательство. Очевидно, что все допустимые движения сохраняют двухцветную раскраску сторон. Количество движений, сохраняющих раскраску, равно n . Поэтому достаточно показать, что количество допустимых движений не меньше, чем n .

Рассмотрим, в какие вершины переходит вершина A_1 . Индукцией по i нетрудно показать, что при $i < k$

$$\{s_i s_{i-1} \dots s_2 s_1 A_1, \text{ где } s_j \text{ — это } \sigma_j \text{ или тождественное преобразование при } j = 1, \dots, i\} = \{A_1, \dots, A_{2^i}\}.$$

Стало быть, A_1 можно перевести допустимыми движениями в любую другую вершину, а их количество равно n . \square

Пусть теперь число людей нечётно. Так как они не могут разбиться на пары, в каждый из дней найдётся человек, который ни с кем в этот день не общался. Назовём Васей того, кто не участвовал в разговорах в первый день. Перед *вторым* днём Васину новость знал ровно один человек, и с каждым днём число знающих её увеличивается не более, чем в два раза. Тогда после k -го дня её будут знать не больше, чем $2^{k-1} < n$ человек.

Покажем, как справиться за $(k + 1)$ дней. Разделим всех жителей на две группы: в первой 2^{k-1} человек, во второй группе остальные $n - 2^{k-1} < 2^{k-1}$ человек. В первый день устроим $(n - 2^{k-1})$ разговоров — пусть каждый из второй группы говорит с кем-то из первой группы, а остальные не участвуют. Теперь применим алгоритм для 2^{k-1} людей к первой группе, для этого потребуется ещё $k - 1$ день. После этого каждый человек из первой группы знает вообще все новости. В последний день проведём те же разговоры, что и в первый день, теперь новости узнают все люди из второй группы.

(И. В. Митрофанов)

20.10. Условие. Дан многочлен $P(x)$ степени n с целыми коэффициентами, e — основание натуральных логарифмов. Докажите, что

$$\max_{x \in [0,1]} |P(x)| > e^{-n}.$$

(Международная студенческая олимпиада, 2015.
Предложил Гёза Кош, Венгрия)

РЕШЕНИЕ. Мы будем использовать два нетривиальных, но достаточно известных факта.

Факт 1. Число e не является алгебраическим.

Факт 2. Обозначим $f(N) = \text{НОК}(1, 2, \dots, N)$. Тогда

$$\frac{\ln f(N)}{N} \rightarrow 1 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Это утверждение является одной из переформулировок *теоремы о распределении простых чисел*.

Перейдём к решению задачи. Обозначим $M = \max_{x \in [0,1]} |P(x)|$.

Для натурального k рассмотрим интеграл

$$J_k = \int_0^1 (P(x))^{2k} dx.$$

Очевидно, $0 < J_k < M^{2k}$ и $J_k \in \mathbb{Q}$.

Пусть

$$(P(x))^{2k} = \sum_{i=0}^{2kn} a_{k,i} x^i.$$

Тогда

$$J_k = \sum_{i=0}^{2kn} \frac{a_{k,i}}{i+1}.$$

Рациональное число J_k больше нуля, а его знаменатель является делителем наибольшего общего кратного чисел $1, 2, \dots, 2kn + 1$.

В наших обозначениях $f(N) = \text{НОК}(1, 2, \dots, N)$, тогда

$$M > (f(2nk + 1))^{-2k}.$$

Из Факта 2 следует, что для всех $\varepsilon > 0$ и для достаточно большого k выполнено неравенство

$$f(2kn + 1) < e^{(1+\varepsilon)(2kn+1)},$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим какой-нибудь из кубиков. Обозначим a_1, \dots, a_6 вероятности, с которыми он при броске выдаёт числа от 1 до 6 соответственно. Многочлен $a_1x + \dots + a_6x^6$ назовём *производящим многочленом* этого кубика. Пусть всего кубиков n , и их производящие многочлены $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$.

Если бросаются эти кубики одновременно, то вероятность того, что сумма выпавших очков равна b , равна коэффициенту при x^b у произведения многочленов $P(x) = p_1(x)p_2(x) \dots p_n(x)$. Пусть

$$P(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_{6n}x^{6n}.$$

У многочлена $P(x)$ мономы разбиваются на 11 групп: в первой группе члены с x в степени с показателем, делящимся на 11, во второй группе — мономы вида $A_{11k+1}x^{11k+1}$, и так далее.

Если бы все остатки суммы очков по модулю 11 имели одинаковую вероятность, то в каждой из 11 групп сумма коэффициентов мономов была бы равна $1/11$. Тогда комплексный корень 11-й степени из единицы

$$t = \cos \frac{2\pi}{11} + i \sin \frac{2\pi}{11}$$

являлся бы корнем многочлена P . А значит, t обнуляет какой-то из многочленов p_i . Покажем, что так не бывает. Рассмотрим

$$p_i(t) = a_1t + \dots + a_6t^6 = t(a_1 + \dots + a_6t^5).$$

Если $p_i(t) = 0$, то мнимая часть хотя бы одного из чисел a_1, a_2t, \dots, a_6t^5 отрицательна. Но все коэффициенты a_i (вероятности выпадения соответствующей грани) — положительные числа, поэтому аргументы чисел a_0, a_1t, \dots, a_6t^5 пробегают значения от 0 до $10\pi/11$. Ни одно из этих чисел не может иметь отрицательную мнимую часть, а значит, и остатки от деления на 11 не распределены равномерно.

КОММЕНТАРИЙ. Эта задача обобщает задачу 11 из конкурса решения задач Санкт-Петербургского математического общества 2012–2013 года (см. <http://www.mathsoc.spb.ru/konkurs/contest12.pdf>).

(И. В. Митрофанов)