



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Е. Ермолин, Об энтропийном слое в задаче гиперзвукового обтекания тонких притуплённых тел, близких к двумерным, *Прикл. мех. техн. физ.*, 1975, том 16, выпуск 3, 74–81

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

15 февраля 2025 г., 22:13:05



ОБ ЭНТРОПИЙНОМ СЛОЕ В ЗАДАЧЕ ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТОНКИХ ПРИТУПЛЕННЫХ ТЕЛ, БЛИЗКИХ К ДВУМЕРНЫМ

Н. Е. Ермолин

(Новосибирск)

В задаче гиперзвукового обтекания невязким нетеплопроводным газом тонких притупленных тел, близких к двумерным, построено решение в энтропийном слое. Построение достигается обобщением способа, развитого в [1], применительно к телам, близким к двумерным. Существенным при построении является использование приближенной модели, отождествляющей действие притупления на газ с действием сосредоточенной силы, распределенной по кромке. Решение представляется в виде асимптотических разложений. При этом в нулевом приближении получаются уравнения гиперзвуковой теории малых возмущений, которая является нулевым приближением в процессе построения решения в виде рядов по степеням малого параметра, определенного как квадрат относительной толщины тела или относительной ширины возмущенной области. Поверхность притупленного тела оказывается особой для нулевого приближения, так как энтропийная функция p/ρ^* по мере приближения к поверхности неограниченно возрастает.

Попытка построения следующих приближений приводит к усилению особенности. Это обуславливает применение метода деформированных координат (метода ПЛГ). Основным в последнем является устранение особенности, несвойственной точному решению задачи, путем асимптотических разложений по малому параметру не только искомым, но также и независимых переменных с последующим определением деформации независимых переменных на основе «гашения» особенности.

Использование метода ПЛГ позволяет построить решение, равномерно пригодное во всем потоке, включая энтропийный слой. Практически построение такого решения приводит к определению смещения линий тока вблизи поверхности тела, в результате которого особенность «поглощается» телом, и решение вне тела оказывается свободным от особенности. В нулевом приближении это смещение линий тока удается определить в замкнутом виде.

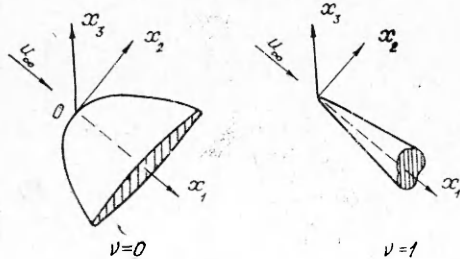
Пусть тонкое полубесконечное притупленное по кромке (в носке) тело обтекается однородным гиперзвуковым потоком.

Относительно формы тела (фиг. 1) предполагается, что $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) \sim \tau_0$; $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) \sim \tau_0^{1-\nu}$; $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \sim 1$, за исключением малой окрестности притупленной кромки (носка): $\tau_0 \ll 1$ — малый параметр; $\nu = 0, 1$.

Здесь \mathbf{n} — нормаль к поверхности тела; Lx_i , $i=1, 2, 3$ — прямоугольная декартова система координат (L — характерная длина); \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — орты осей x_1, x_2, x_3 соответственно.

Вводя по аналогии с [1] малый параметр $\tau = \bar{a}^{(1+\nu)/(3+\nu)}$ (\bar{a} — характерная толщина (диаметр) притупления) и ограничиваясь случаем $\tau \geq \tau_0$, рассмотрим на основе метода возмущений асимптотическое поведение решения в окрестности поверхности тела при $\tau \rightarrow 0$. При этом считаем выполненным условие $K = M_\infty \tau \geq 1$.

Система уравнений газовой динамики в переменных «давление — две функции тока» имеет вид [2]



Фиг. 1

$$(1) \quad \frac{\partial u_i}{\partial p} = - \frac{\partial (x_{i+1}, x_{i+2})}{\partial (\varphi, \psi)}, \quad \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\kappa-1} M_\infty^{-2};$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p} u_2 = \frac{\partial x_2}{\partial p} u_1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial p} u_3 = \frac{\partial x_3}{\partial p} u_1, \quad \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{\rho^\kappa} \right) = 0.$$

Здесь и ниже индекс $i > 3$ следует понимать как $i - 3$; $\rho_\infty u_\infty^2 p$ — давление; $\rho_\infty \rho$ — плотность; $u_\infty u_i$ — составляющие вектора скорости вдоль осей x_i соответственно; $\sqrt{\rho_\infty u_\infty} L\varphi$, $\sqrt{\rho_\infty u_\infty} L\psi$ — функции тока; κ — отношение удельных теплоемкостей газа. Вектор скорости u_∞ невозмущенного потока направлен вдоль оси x_1 .

Граничные условия на ударной волне имеют вид

$$(2) \quad (\mathbf{i} - \mathbf{V})(\mathbf{in}) = \left(p - \frac{1}{\kappa} M_\infty^{-2} \right) \mathbf{n},$$

$$p = \frac{2}{\kappa+1} (\mathbf{in})^2 + \frac{1-\kappa}{\kappa(\kappa+1)} M_\infty^{-2};$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} + \frac{2}{\kappa+1} M_\infty^{-2} (\mathbf{in})^{-2},$$

где \mathbf{V} — вектор скорости; \mathbf{n} — вектор единичной нормали к поверхности ударной волны.

Решение всюду в возмущенной области представляется в виде

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 &= y_1 + \tau^2 z_1 + \dots, \quad x_2 = \tau^v (y_2 + \tau^2 z_2 + \dots), \\ x_3 &= \tau (y_3 + \tau^2 z_3 + \dots), \quad \rho = \rho_0 + \tau^2 \rho_1 + \dots, \quad \varphi = \eta, \\ u_1 &= 1 + \tau^2 v_1 + \tau^4 w_1 + \dots; \quad u_2 = \tau^{2-v} (v_2 + \tau^2 w_2 + \dots); \\ u_3 &= \tau (v_3 + \tau^2 w_3 + \dots); \quad p = \tau^2 (\xi + \tau^2 p_1 + \dots); \\ \psi &= \tau^{1+v} (\zeta + \tau^2 \psi_1 + \dots). \end{aligned}$$

Разложение по τ проведено согласно порядкам искомых величин вне энтропийной области, введенной, например, в [3].

Переходя в системе (1) к новым ξ , η , ζ , независимым переменным, получим:

нулевое приближение

$$(4) \quad \frac{\partial v_i}{\partial \xi} = - \frac{\partial (y_{i+1}, y_{i+2})}{\partial (\eta, \zeta)}, \quad v_1 + \frac{v v_2^2 + v_3^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{\xi}{\rho_0} = \frac{1}{\kappa-1} K^{-2} = 0;$$

$$v \frac{\partial y_1}{\partial \xi} v_2 = \frac{\partial y_2}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial y_1}{\partial \xi} v_3 = \frac{\partial y_3}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi}{\rho_0^\kappa} \right) = 0;$$

первое приближение

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial \xi} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi} \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + \frac{\partial (\psi_1, v_i)}{\partial (\zeta, \xi)} &= \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} \frac{\partial (y_{i+1}, y_{i+2})}{\partial (\eta, \xi)} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial (y_{i+1}, y_{i+2})}{\partial (\xi, \zeta)} - \\ &- \frac{\partial (z_{i+1}, y_{i+2})}{\partial (\eta, \zeta)} - \frac{\partial (y_{i+1}, z_{i+2})}{\partial (\eta, \xi)}; \\ w_1 + v v_3 w_2 + v_3 w_3 + \frac{v_1^2 + (1-v) v_2^2}{2} - \frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{\xi \rho_1}{\rho_0^2} - \frac{p_1}{\rho_0} \right) &= 0; \\ w_3 \frac{\partial y_1}{\partial \xi} - v_3 \left(\frac{\partial p_1}{\partial \xi} \frac{\partial y_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} \right) + v_3 \frac{\partial z_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \xi} \frac{\partial y_3}{\partial \xi} + \\ + \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial y_3}{\partial \zeta} &= v_1 \frac{\partial y_3}{\partial \xi} + \frac{\partial z_3}{\partial \xi}; \\ v \left(w_2 \frac{\partial y_1}{\partial \xi} - v_2 \left(\frac{\partial p_1}{\partial \xi} \frac{\partial y_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} \right) + v_2 \frac{\partial z_1}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial p_1}{\partial \xi} \frac{\partial y_2}{\partial \xi} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial y_2}{\partial \zeta} + (i - \nu) v_2 \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = v_1 \frac{\partial y_2}{\partial \xi} + \frac{\partial z_2}{\partial \xi}; \\
 & - \frac{p_1}{\xi} + \kappa \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{\rho_0^\kappa}{\xi} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\xi}{\rho_0^\kappa} \right) \psi_1 = F_0(\eta, \zeta).
 \end{aligned}$$

Разложения условий (2) очевидны и здесь не приводятся. Граничное условие на поверхности тела в нулевом приближении имеет вид

$$y_3 = f(y_1, y_2) \text{ при } \zeta = 0.$$

К системе уравнений нулевого приближения должно быть добавлено еще начальное условие [1]. По аналогии с [1] зададим начальное условие, определяющее действие притупления на газ в качестве сосредоточенной силы, распределенной по кромке без учета размеров притупления. В случае $\nu=1$ ограничимся рассмотрением тел с осесимметричным притуплением, омываемых стружкой тока, прошедшей фронт в окрестности притупления. Асимптотическое представление формы фронта в окрестности притупления в этом случае известно [4]

$$y_1 = \Phi(\eta, 1) \zeta; \quad y_2^2 + y_3^2 = 2\zeta; \quad y_2 = \operatorname{tg}(\eta) y_3.$$

В случае $\nu=0$ ограничимся телами с формой передней кромки $\{x_1 = y_0(\eta), x_2 = \eta, x_3 = \tau Z(\eta)\}$, имеющей достаточно малую кривизну при $\tau \rightarrow 0$, считая характер притупления таким, что плотность распределенной по кромке сосредоточенной силы является гладкой функцией. Асимптотическое выражение формы фронта в окрестности притупления для верхней части потока ($\xi \geq 0$) зададим в виде

$$y_1 = y_0(\eta) + \Phi(\eta, 0) \zeta^{3/2}; \quad y_2 = \eta; \quad y_3 = Z(\eta) + \zeta.$$

Оно аналогично и для нижней части ($\xi \leq 0$). Форма фронта при указанных ограничениях может быть получена по методу локальной стреловидности [5].

Замечание. В общем случае, когда поверхность ударной волны в окрестности притупления имеет вид

$$\begin{aligned}
 & y_1 = \Phi(\eta, 1) \zeta; \quad y_2^2 + y_3^2 = 2\zeta^\alpha; \\
 & y_2 = \operatorname{tg}(\eta) y_3; \quad \nu=1; \quad y_1 = y_0(\eta) + \Phi(\eta, 0) \zeta^\beta; \\
 & y_2 = \eta; \quad y_3 = Z(\eta) + \zeta; \quad \nu=0,
 \end{aligned}$$

разложения (3) неприменимы для исследования поведения решения в энтропийном слое, если $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta^{-1} < 2/3$, так как для указанных значений параметров α и β не существует решения нулевого приближения [6]. Если $1 < \alpha < 2$, $2/3 < \beta^{-1} < 1$, то разложения (3), построенные по развитой ниже схеме, не являются асимптотическими по параметру τ в энтропийном слое. Однако в приближенной постановке задачи форма ударной волны в окрестности притупления является универсальной: $\alpha=1$, $\beta=2/3$, а поверхность тела в нулевом приближении — заостренной по кромке (пренебрегаем толщиной притупления). Как будет показано ниже, в этом случае разложения (3) являются асимптотическими по параметру τ в энтропийном слое.

Используя произвол в системе уравнений первого приближения, будем считать функцию p_1 достаточно гладкой по ζ и так определим ее на фронте, чтобы в граничном условии $p_* = \tau^2(\xi + \tau^2 p_1 + \dots)_*$ функция ξ_* имела вид $\xi_* = \xi_0(\eta, \zeta)$, т. е. не зависела от τ . Что касается функции ψ_1 , то положим $\psi_1(\xi_0, \eta, \zeta) = 0$, исключив тем самым деформацию поверхностей тока на фронте.

Поскольку форма фронта известна, то

$$(6) \quad \frac{1}{\rho_0} = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(\frac{1}{\kappa+1} \Phi^{-2}(\eta, \nu) \right)^{1/\kappa} \left(\frac{8}{9} \right)^{(1-\nu)/\kappa} \xi^{-1/\kappa} \zeta^{-1/\kappa} + \dots \approx \\ \approx -A(\eta, \nu) \xi^{-1/\kappa} \zeta^{-1/\kappa} \quad \text{при } \zeta \rightarrow 0.$$

Представляя искомые решения в виде асимптотических разложений по системе функций $F_{ml}(\zeta)$; $F_{mj} F_{ml}^{-1} \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow 0$, $j > l$, ($m=1, \dots, 7$; $l = 0, 1, \dots, \infty$), получим:

а) $\nu=0$, нулевое приближение

$$(7) \quad y_1 = y_{10}(\xi, \eta) + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \frac{\partial y_{10}}{\partial \xi} \xi + \dots,$$

где y_{10} — произвольная функция;

$$y_2 = \eta, \quad y_3 = f - \frac{\kappa}{\kappa-1} A \xi^{-1/\kappa} \zeta^{(\kappa-1)/\kappa} + \dots;$$

$$v_1 = \frac{\kappa}{\kappa-1} A \xi^{(\kappa-1)/\kappa} \zeta^{-1/\kappa} + \dots;$$

$$v_3 = \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{\kappa-1} A \left(\frac{\partial y_{10}}{\partial \xi} \right)^{-1} \xi^{-1-1/\kappa} \zeta^{(\kappa-1)/\kappa} + \dots$$

Определенная выше функция $f(\alpha, \beta)$ и ее производные берутся при значении $\alpha = y_{10}$, $\beta = \eta$. Выражение для скорости v_2 имеет вид

$$v_2 = - \int \left(\frac{\partial y_1}{\partial \eta} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial y_3}{\partial \eta} \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right) d\xi + \gamma(\eta, \zeta).$$

Для определения поведения функции γ при $\zeta \rightarrow 0$ введем в последнем равенстве $\xi \rightarrow \xi_0(\eta, \zeta)$. Используя граничные условия на фронте, а также условие $y_1(\infty, \eta, 0) = y_0(\eta)$, получим $\gamma \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow 0$. Тогда разложение функции запишем как

$$(8) \quad v_2 = -A \int \frac{\partial y_{10}}{\partial \eta} \xi^{-1/\kappa} d\xi \zeta^{-1/\kappa} + \dots$$

б) $\nu=1$, нулевое приближение. Из (4) следует тождество

$$\frac{\partial y_1}{\partial \eta} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial y_2}{\partial \eta} \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial y_3}{\partial \eta} \frac{\partial v_3}{\partial \xi} = 0.$$

Отыскивая в соответствии с граничными условиями лишь ограниченные для малых ζ функции y_i и учитывая их ограниченность в тождестве при $\zeta \rightarrow 0$ (кроме $\partial v_1 / \partial \xi$), получим $\partial y_1 / \partial \eta = 0$ при $\zeta = 0$. Значит, если тело омывается струйкой тока, прошедшей фронт волны в окрестности приотупления, то давление на теле в нулевом приближении зависит лишь от координаты y_1 . Последнее является отражением того факта, что в соответствующем двумерном неустановившемся движении газа с «сильным взрывом» в каждый момент времени $t > 0$ градиент давления на поверхности тела равен нулю, если плотность газа на теле равна нулю.

С учетом сказанного имеем:

$$(9) \quad y_1 = y_{10}(\xi) + y_{11} \zeta + \dots; \\ v_1 = \frac{\kappa}{\kappa-1} A \xi^{(\kappa-1)/\kappa} \zeta^{-1/\kappa} + \dots; \\ y_j = y_{j0} + y_{j1} g(\zeta) + \dots; \\ \frac{\partial y_{10}}{\partial \xi} v_j = \frac{\partial y_{j0}}{\partial \xi} + \frac{\partial y_{j1}}{\partial \xi} g(\zeta) + \dots, \quad j = 2, 3.$$

Для определения необходимых функций имеем следующую систему уравнений:

$$(10) \quad -\frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial f}{\partial \xi} \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial y_{20}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y_{10}}{\partial \xi} \right)^{-1} \right] = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial y_{20}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y_{10}}{\partial \xi} \right)^{-1} \right]; \quad y_{30} = f;$$

$$-\frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial y_{20}}{\partial \eta} y_{11} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial y_{20}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y_{10}}{\partial \xi} \right)^{-1} \right],$$

где $y_{10}(\xi)$ — произвольная функция, а $f(\alpha, \beta)$ определена выше. Как функция f , так и ее производные берутся при значении $\alpha = y_{10}$, $\beta = y_{20}$

$$(11) \quad y_{21} \frac{\partial f}{\partial \beta} - y_{31} = \begin{cases} \frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{\partial y_{20}}{\partial \eta} \right)^{-1} A \xi^{-1/\kappa}, & \text{если } g = \zeta^{(\kappa-1)/\kappa} \\ 0, y_{21} \neq 0, y_{31} \neq 0, & \text{если } \zeta^{(\kappa-1)/\kappa} = o(g) \\ & \text{при } \zeta \rightarrow 0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial y_{21}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y_{10}}{\partial \xi} \right)^{-1} \right] + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial y_{31}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y_{10}}{\partial \xi} \right)^{-1} \right] = y_{11} \left[\frac{\partial y_{21}}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{\partial y_{31}}{\partial \eta} \right] +$$

$$+ \frac{\partial y_{11}}{\partial \eta} \left[y_{31} - \frac{\partial f}{\partial \beta} y_{21} \right] c;$$

$$c = \lim_{\zeta \rightarrow 0} g^{-1} \zeta \frac{dg}{d\zeta} \text{ при } \zeta \rightarrow 0.$$

Можно показать, что для осесимметричных тел $y_{21} \frac{\partial f}{\partial \beta} - y_{31} \neq 0$, если y_{21} , либо $y_{31} \neq 0$. Поэтому для тел, мало отличающихся от осесимметричных, положим $g = \zeta^{(\kappa-1)/\kappa}$.

Следуя [1], снимем в первом приближении граничное условие на поверхности тела и поставим задачу об определении течения за ударной волной, полученной в нулевом приближении.

Выражение для плотности в первом приближении примет вид

$$-\frac{p_1}{\xi} + \kappa \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{1}{\zeta} \psi_1 = \frac{4}{2} \Phi^{-2}(\eta, \nu) \zeta^{-1} \left[\frac{8}{9} \left(1 + \left(\frac{dy_0}{d\eta} \right)^2 \right) \right]^{1-\nu} =$$

$$= F_0(\eta, \zeta, \nu).$$

Подставляя в первое уравнение системы (5) выражения для w_1 , ρ_1/ρ_0 и приводя подобные члены, получим наибольшую особенность в коэффициентах первого уравнения в случае $\psi_1 \equiv 0$. Поэтому произвольную функцию ψ_1 выбираем так, чтобы особенность в коэффициентах первого уравнения была интегрируемой. Для этого достаточно положить

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} - \frac{1}{\kappa} \left(F_0 + \frac{1}{\zeta} \psi_1 \right) - \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} \xi^{(\kappa-1)/\kappa} + (1-\nu) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial y_{10}}{\partial \eta} \int \frac{\partial y_{10}}{\partial \eta} \xi^{-1/\kappa} d\xi \right) A \zeta^{-1/\kappa} = 0.$$

Решение последнего уравнения с учетом условия $\psi_1 = 0$ при $\xi = \xi_0$ имеет вид

$$(12) \quad \psi_1 = -\frac{1}{2} \Phi^{-2}(\eta, \nu) \left[\frac{8}{9} \left(1 + \left(\frac{dy_0}{d\eta} \right)^2 \right) \right]^{1-\nu} + O(\zeta^{(\kappa-1)/\kappa}).$$

Определяя смещение поверхности тока $\psi = 0$, получим

$$\zeta \approx \tau^2 \frac{1}{2} \Phi^{-2}(\eta, \nu) \left[\frac{8}{9} \left(1 + \left(\frac{dy_0}{d\eta} \right)^2 \right) \right]^{1-\nu} = \tau^2 \zeta_0(\eta, \nu).$$

Рассмотрим поведение оставшихся функций.

в) $\nu=0$, первое приближение. Используя нулевое приближение, можно показать, что $\frac{\partial y_1}{\partial \xi} \sim \xi^{-5/2}$ при $\zeta \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow \xi_0$. Из последнего и граничного условия для z_2 (легко показать, что $z_2=0$ при $\xi=\xi_0$) следует, что произвольная функция r в выражении $z_2 = \int v_2 \frac{\partial y_1}{\partial \xi} d\xi + r(\eta, \zeta)$ стремится к нулю при $\zeta \rightarrow 0$

$$(13) \quad z_2 = -A \int \left(\frac{\partial y_{10}}{\partial \xi} \int \frac{\partial y_{10}}{\partial \eta} \xi^{-1/\kappa} d\xi \right) d\xi \zeta^{-1/\kappa} + \dots = \\ = -Y(\eta, \xi) \zeta^{-1/\kappa} + \dots$$

Поэтому на смещенной поверхности $\zeta = \tau^2 \zeta_0$ имеем следующее распределение искомых функций:

$$(14) \quad \varphi = \eta; \quad x_1 = y_{10}(\xi, \eta) - \frac{\partial y_{10}}{\partial \eta} Y \zeta_0^{-1/\kappa} \tau^{2-2/\kappa} + \dots; \\ x_2 = \eta - Y \zeta_0^{-1/\kappa} \tau^{2-2/\kappa} + \dots; \\ \frac{x_3}{\tau} = f - \left(\frac{\alpha}{\kappa-1} A \xi^{-1/\kappa} \zeta_0 + \frac{\partial f}{\partial \eta} Y \right) \zeta_0^{-1/\kappa} \tau^{2-2/\kappa} + \dots$$

Здесь не выписаны члены порядка $\tau^{\frac{4(\kappa-1)}{\kappa}}$ и выше. Функция f берется при значении $\alpha=y_{10}$, $\beta=\eta$. Конкретный вид остальных функций, имеющих порядки $u_1 \sim 1 + O(\tau^{2-2/\kappa})$; $u_2 \sim \tau^{2-2/\kappa}$; $u_3 \sim \tau$; $\rho \sim \tau^{2/\kappa}$; $p \sim \tau^2$ на смещенном контуре, не приводится.

Заметим лишь, что при таком выборе функции ψ_1 разложения искомых величин для $\psi \geq 0$ сохраняют асимптотические свойства по параметру τ . Из вида функции Y следует, что «пространственный» эффект в распределении линий тока в окрестности поверхности тела обусловлен как отклонением формы кромки, так и формы тела от плоской.

г) $\nu=1$, первое приближение. Асимптотическое представление решения имеет вид:

$$z_1 = z_{10} \max(\zeta F, g) + \dots; \quad w_1 = w_{10} \max(F, \zeta^{-2/\kappa}) + \dots; \\ z_j = z_{j0} F + \dots; \quad w_j = w_{j0} \max(F, \zeta^{-1/\kappa}) + \dots, \quad j=2,3.$$

Если есть собственные решения вида $g=o(F)$ при $\zeta \rightarrow 0$ (функция g определена в нулевом приближении), то обязательно

$$\frac{\partial y_{20}}{\partial \eta} z_{30} - \frac{\partial y_{30}}{\partial \eta} z_{20} = 0; \quad z_{30} \neq 0; \quad z_{20} \neq 0.$$

Последнее уравнение, как и в случае нулевого приближения, не выполнено для тел, близких к осесимметричным. Для них имеем на смещенной поверхности

$$x_1 = y_{10}(\xi) + \dots; \quad x_2 = \tau(y_{20} + y_{21} \zeta_0^{(\kappa-1)/\kappa} \tau^{2-2/\kappa} + \dots); \\ x_3 = \tau(f + y_{31} \zeta_0^{(\kappa-1)/\kappa} \tau^{2-2/\kappa} + \dots).$$

Здесь не выписаны члены порядка $\tau^{4(\kappa-1)/\kappa}$ и выше. Функция f берется при значениях $\alpha=y_{10}$, $\beta=y_{20}$. Конкретный вид остальных функций, имеющих порядки $u_1 \sim 1 + O(\tau^{2-2/\kappa})$; $u_2 \sim u_3 \sim \tau$; $\rho \sim \tau^{2/\kappa}$; $p \sim \tau^2$ на смещенном контуре, не приводится. Разложения по параметру τ для $\psi \geq 0$ сохраняют асимптотические свойства, и задача об определении смещенного контура и распределении искомых величин на нем, если известна функция $y_{10}(\xi)$, сводится к определению решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10), (11).

Обращаясь к разложениям (3) и результатам исследования первого приближения, заключаем, что решение нулевого приближения для тела со смещенным контуром свободно от особенностей и равномерно пригодно во всем потоке с относительной ошибкой порядка $\tau^{2(x-1)/\kappa}$. Таким образом, используемый метод позволяет улучшить решение на конечных расстояниях от передней кромки. При этом асимптотическое решение выстраивается в энтропийном слое по формулам (6) — (13), если известно в нулевом приближении распределение давления по телу. Как следует из (6) — (13), в общем случае наблюдается слабое изменение давления в направлении, ортогональном поверхности тела. Если тело близко к осесимметричному, то давление на деформированной поверхности зависит лишь от продольной координаты x_1 , т. е. энтропийный слой не удерживает перепада давления в окружном направлении.

В заключение рассмотрим качественную картину обтекания плоской пластины с нормалью, ортогональной плоскости $x_3=0$. Число M_∞ положим равным бесконечности, а форму притупления возьмем в виде

$$(15) \quad x_2 = \pm (\alpha_1 x_1^\varepsilon + \alpha_2 x_1); \quad x_1 \geq 0; \\ 0 < \varepsilon \leq 1/2; \quad 0 \leq x_3 \leq \tau^3; \quad \alpha_i \geq 0.$$

Значения $1/2 < \varepsilon < 1$ исключаются из рассмотрения, так как в этих случаях нарушается условие ограниченности кривизны кромки в вершине пластины. Представим в окрестности притупления форму ударной волны, рассчитанную на основе модели с сосредоточенной силой (для вычисления последней использовалась формула Ньютона) с применением принципа локальной стреловидности

$$(16) \quad x_3 = \tau c_0 \left\{ \left[1 + \left(\frac{dy_0}{dx_1} \right)^2 \right]^{-1/2} (x_1 - y_0) \right\}^{2/3}.$$

Здесь и ниже выражения коэффициентов $c_i > 0$ не конкретизируются вследствие громоздкости. Функция $y_0(x_2)$ находится из (15) заменой x_1 на y_0 . Функция y_{10} , легко восстанавливаемая по распределению в нулевом приближении давления по телу, имеет вид

$$y_{10} = y_0 + c_1 \left[1 + \left(\frac{dy_0}{dx_2} \right)^2 \right]^{-1} \frac{1}{\xi} \xi^{-3/2}.$$

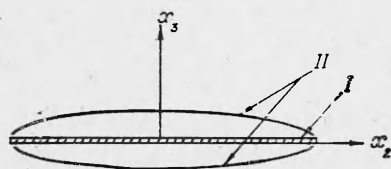
Исключив функцию $Y(\xi, \eta)$ из (14), получим уравнение формы смещенного контура

$$(17) \quad \frac{x_3}{\tau} = c_2 \left(1 + \left(\frac{dy_0}{dx_2} \right)^2 \right)^{-1/3\kappa} (x_1 - y_0)^{2/3\kappa} \tau^{2-2/\kappa}.$$

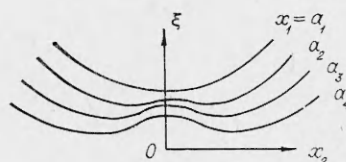
Применительно к обратной задаче уравнение (17) описывает характер изменения формы поверхности тела при заданной форме ударной волны (16). Качественный характер изменения формы смещенного контура в плоскости $x_1 = \text{const}$ приведен на фиг. 2 (I — сечение пластины, II — сечение смещенного контура). Кривая II , симметричная относительно осей координат, является монотонно убывающей функцией для $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, не имеющей точек перегиба в случае

$$3\kappa + (3\kappa - 4) \left(\frac{dy_0}{dx_2} \right)^2 > 0.$$

Вопрос о наличии точек перегиба в общем случае требует более детального исследования уравнения (17).



Фиг. 2



Фиг. 3

Запишем проекции линий тока $\eta = \text{const}$ смещенного контура на плоскость $x_3 = 0$

$$\begin{cases} \eta = x_2 - f_0^{1+1/\kappa} \left[c_3 \frac{dy_0}{dx_2} - c_1 \frac{df_0}{dx_2} \xi^{-3/2} \right] \xi^{-1/2-1/\kappa} x_2^{-2-2/\kappa}; \\ x_1 = y_0 + c_1 f_0 \xi^{-3/2}; \quad f_0 = \left(1 + \left(\frac{dy_0}{dx_2} \right)^2 \right)^{-1}. \end{cases}$$

Считая в них η функцией координат x_1, x_2 , получим $\frac{\partial \eta}{\partial x_1} < 0$, т. е. происходит растекание газа от плоскости симметрии $x_2 = 0$. Рассматривая поведение давления на смещенном контуре в сечениях $x_1 = a_i$ (a_i — постоянные и $a_i < a_{i+1}$), устанавливаем наличие областей пониженного давления в окрестности плоскости симметрии $x_2 = 0$ (фиг. 3), что не противоречит результатам [7, 8]. При этом в случае $\varepsilon = 1/2$ области пониженного давления зарождаются около вершины, на расстоянии, равном половине радиуса кривизны кромки в вершине пластины.

Поступила 16 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев В. В. О методе малых возмущений в задачах обтекания тонких затупленных тел гиперзвуковым потоком. — ПМТФ, 1962, № 6.
2. Дулов В. Г. Об уравнениях пространственных стационарных течений газа в специальных динамических переменных. — Тр. II Междунар. colloквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем. Новосибирск, 1969. Секция численных методов в газовой динамике. М., ВЦАН СССР, 1969.
3. *Современные проблемы газовой динамики*. Под ред. Лоха У. Х. Т., М., «Мир», 1971.
4. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
5. Ладыженский М. Д. Пространственные гиперзвуковые течения газа. М., «Машиностроение», 1968.
6. Григорян С. С. Задача Коши и задача о поршне для уравнений одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные решения). — ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
7. Бертрам, Гендерсон. Новые исследования обтекания крыльев и тел гиперзвуковым потоком. — «Ракетная техника», 1961, № 8.
8. Михайлов В. В. Обтекание треугольного крыла с затупленными кромками при сильном сжатии в ударном слое. — Учен. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 3.