



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

P. G. Naumov, Undecidability of the Gödel–Löb logic with quantifiers with respect to propositional variables,

Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 1993, Number 2, 13–16

<https://www.mathnet.ru/eng/vmumm2344>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.87

April 30, 2025, 06:32:37



УДК 510.65

П. Г. Наумов

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ЛОГИКИ ГЕДЕЛЯ—ЛЁБА С КВАНТОРАМИ ПО ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

В работе [1] была установлена разрешимость логики Гёделя—Лёба GL , известной своей доказуемостной интерпретацией.

В настоящей работе доказывается неразрешимость этой логики, пополненной кванторами по пропозициональным переменным. При этом используется конструкция из работы [2].

1. Логика GL_2 . Язык логики GL_2 состоит из пропозициональных переменных p, q, \dots ; логических связок $\rightarrow, \&, \vee, \neg, \square$; скобок и кванторов \forall, \exists .

Формулы языка логики GL_2 определяются стандартно: если A и B — формулы, а p — пропозициональный символ, то $p, \neg A, A \& B, A \vee B, A \rightarrow B, \square A, \forall p A, \exists p A$ — формулы.

Логика GL_2 задается аксиомами:

1. пропозициональные тавтологии;
2. $\forall p A(p) \rightarrow A(B)$, где A и B — формулы, p — пропозициональный символ и формула B свободна для p в $A(p)$;
3. $\forall p (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall p B)$, если формула A не содержит свободных вхождений символа p ;
4. $\square (A \rightarrow B) \rightarrow (\square A \rightarrow \square B)$; 5. $\square (\square A \rightarrow A) \rightarrow \square A$ и правилами вывода:
6. $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$; 7. $\frac{A}{\forall p A}$; 8. $\frac{A}{\square A}$.

2. Модели Крипке для логики GL_2 . Моделью Крипке будем называть $\langle X, R, \{W_x\}_{x \in X}, \Vdash \rangle$, где X — непустое множество, называемое множеством миров, R — частичный иррефлексивный порядок на X , $\{W_x\}$ — семейство непустых множеств, индексированных элементами множества X (элементы W_x мы будем называть пропозициональными константами), такое, что $W_x \subseteq W_y$, если $x R y$; \Vdash — бинарное отношение вынуждения между элементами из X и формулами языка логики GL_2 , пополненного пропозициональными константами из W_x , которое удовлетворяет следующим соотношениям:

1. $x \Vdash \neg A \Leftrightarrow \neg (x \Vdash A)$, 2. $x \Vdash A \& B \Leftrightarrow x \Vdash A$ и $x \Vdash B$,
3. $x \Vdash A \vee B \Leftrightarrow x \Vdash A$ или $x \Vdash B$, 4. $x \Vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow x \Vdash B$ или $x \Vdash \neg A$,
5. $x \Vdash \square A \Leftrightarrow \forall y (x R y \Rightarrow y \Vdash A)$, 6. $x \Vdash \forall p A(p) \Leftrightarrow$ для любого $p \in W_x$: $x \Vdash A(p)$, 7. $x \Vdash \exists p A(p) \Leftrightarrow$ найдется $p \in W_x$: $x \Vdash A(p)$.

Будем говорить, что модель фундирована, если всякая цепь вида $a_0 R a_1 R a_2 R \dots$ конечна.

Будем говорить, что модель насыщена, если для любого $Y \subseteq X$ найдется константа $p \in \bigcap_{x \in X} W_x$, такая, что $x \in Y \Leftrightarrow x \Vdash p$.

Утверждение 1. В любом мире фундированной и насыщенной модели вынуждаются все теоремы логики GL_2 .

Доказательство. Очевидно, что достаточно убедиться в выполнимости схем аксиом 2 и 5 логики GL_2 . Схема 2 является следствием насыщенности, а схема Лёба 5 представляет собой хорошо из-

вестное следствие фундированности модели Крипке (см., например, [1]).

Пусть $\langle X, R \rangle$ — множество с отношением порядка на нем. Конусом будем называть подмножество $Y \subseteq X$, такое, что $\forall a, b (a \in Y, aRb \Rightarrow b \in Y)$.

Конусом с вершиной назовем конус Y , в котором найдется элемент a_0 (вершина), такой, что $\forall b (b \in Y \Rightarrow a_0Rb)$.

Корневой точкой конуса Y назовем элемент a_0 , такой, что $\forall b (b \in Y \Rightarrow \neg(bRa_0))$.

Конусом над точками a_1, \dots, a_m будем называть множество $Y = \{b \in X \mid \exists n a_nRb\}$.

Будем писать $\Box^+ A$ вместо $A \& \Box A$, $\Diamond A$ вместо $\neg \Box \neg A$ и $\Diamond^+ A$ вместо $\neg \Box^+ \neg A$. Рассмотрим следующие формулы:

$$C(q) \equiv \Box^+(q \rightarrow \Box q) \& [\forall u \forall v (\Box^+(q \rightarrow \Box^+u \vee \Box^+v) \rightarrow \Box^+(q \rightarrow u) \vee \Box^+(q \rightarrow v))],$$

$$D(q) \equiv C(q) \& \Box^+(q \rightarrow \Box \Box \perp) \& \Diamond^+(q \& \Diamond \top).$$

Утверждение 2. Пусть \mathfrak{M} — насыщенная модель Крипке. Тогда для любого мира x этой модели $x \Vdash C(q)$ тогда и только тогда, когда $\{y \in X \mid y \Vdash q \text{ и либо } xRy, \text{ либо } x=y\}$ — конус с вершиной или пустое множество.

Доказательство. (\Rightarrow). Пусть $x \Vdash C(q)$, тогда $x \Vdash \Box^+(q \rightarrow \Box q)$. Это означает, что область $\{y \in X \mid y \Vdash q \text{ и либо } xRy, \text{ либо } x=y\}$ — конус. Если он пуст, то требуемое доказано. В противном случае рассмотрим множество корневых точек этого конуса и предположим, что в нем найдутся хотя бы две различные точки a_1 и a_2 . Рассмотрим множество $T = \{t \in X \mid a_1Rt\} \cup \{a_1\}$. Согласно условию насыщенности найдется пропозициональная константа u , истинная в точности на этом множестве. Рассмотрим конус над множеством оставшихся корневых точек (оно не пусто, так как содержит a_2). В силу условия насыщенности найдется пропозициональная константа v , истинная в точности на этом конусе. Легко убедиться, что найденные константы u и v опровергают второй конъюнктивный член $C(q)$.

(\Leftarrow). Поскольку $\{y \in X \mid y \Vdash q \text{ и либо } xRy, \text{ либо } x=y\}$ — конус, то $x \Vdash \Box^+(q \rightarrow \Box q)$. Предположим, что

$$x \Vdash \neg \forall u \forall v (\Box^+(q \rightarrow \Box^+u \vee \Box^+v) \rightarrow \Box^+(q \rightarrow u) \vee \Box^+(q \rightarrow v)).$$

Тогда найдутся такие константы $u_0, v_0 \in \mathcal{W}_x$, что

$$x \Vdash \Box^+(q \rightarrow \Box^+u_0 \vee \Box^+v_0); \quad (1)$$

$$x \Vdash \neg \Box^+(q \rightarrow u_0) \text{ и } x \Vdash \neg \Box^+(q \rightarrow v_0).$$

Последнее означает существование миров $a_1, a_2 \in \{y \in X \mid xRy \text{ либо } x=y\}$:

$$a_1 \Vdash q, a_1 \Vdash \neg u_0, a_2 \Vdash q, a_2 \Vdash \neg v_0. \quad (2)$$

Возьмем вершину a_0 конуса $\{y \in X \mid y \Vdash q \text{ и либо } xRy, \text{ либо } x=y\}$, который не пуст, так как содержит a_1 и a_2 . Поскольку xRa_0 или $x=a_0$, то согласно (1) $a_0 \Vdash \Box^+u_0 \vee \Box^+v_0$, что противоречит (2).

Следствие. Пусть \mathfrak{M} — насыщенная модель Крипке, тогда для любого мира x $x \Vdash D(q)$ тогда и только тогда, когда $\{y \in X \mid y \Vdash q \text{ и либо } xRy, \text{ либо } x=y\}$ есть конус с вершиной высоты 2.

3. Неразрешимость логики GL_2 . Теорема. *Логика GL_2 неразрешима.*

Доказательство. Пусть $(M, *)$ — счетное множество с рефлексивным симметричным отношением $*$. Построим модель Крипке $\mathfrak{M} = \langle X, R, \{W_x\}, \Vdash \rangle$, которую будем называть моделью, порожденной $(M, *)$: $X = \{M\} \cup M \cup \{\{a, b\} \in *\}$. Отношение R таково, что $M R a$ тогда и только тогда, когда $a \neq M$; $a R x$ тогда и только тогда, когда $x = \{a, b\}$; $W_M = W_a = W_{\{a,b\}} = \{p_Y \mid Y \subseteq X\}$ для всех $a, b \in M$. Положим $x \Vdash p_Y \Leftrightarrow x \in Y$.

Очевидно, что отношение R является иррефлексивным порядком, а модель \mathfrak{M} фундирована и насыщена.

Пусть S — некоторое предложение в языке элементарной теории рефлексивного симметричного отношения $*$. Не теряя общности, можно считать, что S имеет вид

$$(Qx \dots) \& (\&_{k_i} (x_{k_i} * y_{k_i}) \rightarrow \bigvee_j (u_{k_j} * v_{k_j})),$$

где $Qx \dots$ — некоторый кванторный префикс.

Определим перевод \hat{S} предложения S в язык логики GL_2 как

$$\exists qD(q) \& (\hat{Q}x \dots) \& (\&_{k_i} \diamond (x_{k_i} \& y_{k_i}) \rightarrow \bigvee_j \diamond (u_{k_j} \& v_{k_j})) \rightarrow \square \square \perp,$$

где \hat{Q} означает ограничение кванторов префикса Q областью истинности предиката $D(x)$.

Пусть RS — элементарная теория рефлексивного симметричного отношения $*$. Согласно работе [3] теория RS неразрешима.

Как известно (см., например, [4]), всякая неразрешимая конечно аксиоматизируемая теория является наследственно неразрешимой. Поэтому для доказательства неразрешимости логики GL_2 достаточно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма. *Если $GL_2 \vdash \hat{S}$, то $RS \vdash \neg S$.*

Доказательство леммы. Пусть $\neg (RS \vdash \neg S)$, тогда найдется множество M с рефлексивным симметричным отношением $*$ на нем, такое что $(M, *) \models S$. Покажем, что в модели Крипке \mathfrak{M} , порожденной моделью $(M, *)$, в точке M опровергается формула \hat{S} . Предположим противное: $M \Vdash \hat{S}$. Легко видеть, что $M \Vdash \neg \square \square \perp$. Тогда

$$M \Vdash \neg (\exists qD(q) \& (\hat{Q}x \dots) \& (\&_{k_i} \diamond (x_{k_i} \& y_{k_i}) \rightarrow \bigvee_j \diamond (u_{k_j} \& v_{k_j}))).$$

Формула $\exists qD(q)$ вынуждается в мире M в силу следствия и насыщенности модели \mathfrak{M} . Следовательно,

$$M \Vdash \neg (\hat{Q}x \dots) \& (\&_{k_i} \diamond (x_{k_i} \& y_{k_i}) \rightarrow \bigvee_j \diamond (u_{k_j} \& v_{k_j})). \quad (3)$$

Согласно следствию для каждого x , удовлетворяющего условию $M \Vdash D(x)$, найдется элемент $a_x \in M$, такой, что $b \Vdash x$ тогда и только тогда, когда $a_x R b$ или $a_x = b$. Чтобы вывести противоречие из (3) и свойства $(M, *) \models S$, достаточно показать, что для любого набора $a_{x_{k_i}}, a_{y_{k_i}}, a_{u_{k_j}}, a_{v_{k_j}} \in M$ $(M, *) \models \&_{k_i} (a_{x_{k_i}} * a_{y_{k_i}}) \rightarrow \bigvee_j (a_{u_{k_j}} * a_{v_{k_j}})$ тогда и только тогда, когда $M \Vdash \&_{k_i} \diamond (x_{k_i} \& y_{k_i}) \rightarrow \bigvee_j \diamond (u_{k_j} \& v_{k_j})$. Последнее в свою очередь следует из того, что $M \Vdash \diamond (x \& y)$ равносильно $(M, *) \models a_x * a_y$. Лемма и, следовательно, теорема доказаны.

З а м е ч а н и е. Теорема и все рассуждения останутся в силе, если вместо GL_2 рассматривать ее расширение формализованным принципом

пом неподвижной точки $\exists p \ \& \ \bigcap_{0 \leq i \leq k}^i (p \leftrightarrow A(p))$, где p — единственная свободная переменная формулы A и все вхождения p в A лежат в области действия модальности \square , а \square^i обозначает i -итерацию модальности. Выполнимость принципа неподвижной точки на модели \mathfrak{M} из утверждения 1 следует из фундированности и насыщенности модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Segerberg K. An essay in classical modal logic//Filosofiska studier. n. 13 Uppsala: Philos. Soc. and Dept. of Philos. Uppsala, 1971.
2. Gabbay D. M. On 2nd order intuitionistic propositional calculus with full comprehension//Arch. math. logik. 1974. 16. 177—186.
3. Rogers H. Certain logical reduction and decision problems//Ann. Math. 1956. 64. 264—284.
4. Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А. Элементарные теории//Успехи матем. наук. 1965. 20, № 4. 37—108.

Поступила в редакцию
20.02.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 517.518.36

С. Б. Козырев

О ГАРАНТИРОВАННОЙ СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: C и L — пространства соответственно непрерывных и суммируемых по Лебегу функций на отрезке $[0, 1]$, $c_n(f, \varphi)$ — коэффициенты Фурье функции f по системе φ ; если Δ — отрезок, то $|\Delta|$ — его длина; если X — множество, то \bar{X} — его замыкание, а $\text{int}(X)$ — его внутренность; если p — показатель пространства L^p , то q — сопряженный с ним показатель; $\omega(\delta, f)$ и $\omega_p(\delta, f)$ — соответственно модуль непрерывности и интегральный модуль непрерывности порядка p для функции f .

З. Чешельский в работе [1] показал, что для коэффициентов Фурье—Хаара любой функции $f \in C[0, 1]$ справедлива оценка

$$|c_n(f, \chi)| \leq n^{-1/2} \omega(1/n, f). \quad (1)$$

Для функций $g \in L^p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, аналогичный результат был получен П. Л. Ульяновым в [2]:

$$|c_n(g, \chi)| \leq n^{1/p-1/2} \omega_p(1/n, g). \quad (2)$$

Таким образом, модули коэффициентов Фурье—Хаара для всех функций из L^p , $p > 2$, в целом имеют гарантированный порядок убывания. В связи с этим П. Л. Ульяновым неоднократно ставился следующий вопрос (см., например, [3, 4]): являются ли оценки (1), (2) лучшими для L^p , $p > 2$, среди всех полных ортонормированных систем? В настоящей статье мы дадим отрицательный ответ на этот вопрос, доказав следующую теорему.