И. П. Рязанцева, Итерационные методы типа Ньютона–Канторовича при решении нелинейных некорректных задач с монотонными операторами, *Дифференц. уравнения*, 1987, том 23, номер 11, 2012–2014

УДК 519.6

И. П. РЯЗАНЦЕВА

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ТИПА НЬЮТОНА—КАНТОРОВИЧА ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Применение операторного метода регуляризации при решении нелинейных задач с монотонными операторами [1, 2] приводит к изучению вопроса о приближенном решении регуляризованного уравнения. Одним из эффективных способов решения нелинейных задач являются итерационные методы. Для гильбертова пространства в этом направлении получены весьма полные результаты (см., например, [1—3]). Для случая банахова пространства этот вопрос довольно непрост. Здесь возникают трудности и при исследовании метода итеративной регуляризации. Следует отметить, что именно в банаховых пространствах допускаются существенные нелинейности. Наиболее эффективным (имеет наилучшие оценки скорости сходимости) из всех известных итерационных процессов является метод Ньютона—Канторовича. Цель данной заметки получить сходимость методов указанного типа для некоторых классов задач с монотонными операторами.

1. Пусть $X—E$ — пространство, X^* строго выпукло, уравнение

$$Ax=f, \quad f\in X^*, \tag{1}$$

имеет непустое множество решений N. Здесь $A: X\to X^*$ — дважды дифференцируемый, по Гато, монотонный оператор, функция $\varphi(t)=\langle A''(x+\mathrm{th})h^2, h\rangle$ интегрируема на $(0, 1)$ при всех x, $x+h\in X$, $\|A''(x)\|\leqslant M(\|x\|)$ при всех $x\in X$, где $M(t)$ $(t\geqslant 0)$ — неотрицательная монотонно возрастающая функция.

Известно, что последовательность $\{x_{\alpha_n}\}$ решений уравнения $Ax+\alpha_n U^s x=f$, $\alpha_n>0$ при $\alpha_n\to 0$, $n\to\infty$ сходится к $x^*\in N$, где $U^s: X\to X^*$ — дуальное отображение в X с масштабной функцией $\mu(t)=t^{s-1}$, $s>1$.

Для нахождения приближенного решения (1) построим последовательность $\{x_n\}$, определяемую следующим рекуррентным соотношением (сравни с [3]):

$$Ax_n+A'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+\alpha_n U^s x_{n+1}=f. \tag{2}$$

Метод (2) можно считать некоторым обобщением (см. [4]) метода Ньютона — Канторовича.

Теорема 1 [5]. *Пусть X — банахово пространство, в котором выполнено нижнее неравенство параллелограмма, тогда при $s\geqslant 2$ справедливо соотношение*

$$\langle U^s x-U^s y,\ x-y\rangle\geqslant\frac{2\mu}{s(2^\beta-1)}\|x-y\|^s\quad\forall x,\ y\in X, \tag{3}$$

где $\mu>0$, $\beta=s-1$.

Отметим, что пространства L_p, l_p $(p>1)$ этим свойством обладают [5].

Предположим, что пространство X удовлетворяет условию теоремы 1. Тогда, используя (2), (3) аналогично [3], получим неравенство

$$a_{n+1}\leqslant\frac{c_1}{\alpha_n^{1/(s-1)}}a_n^{2/(s-1)}+c_2\left[\frac{|\alpha_n-\alpha_{n-1}|}{\alpha_n}\right]^{1/(s-1)}, \tag{4}$$

где $c_1^{s-1}=\dfrac{s(2^\beta-1)}{4\mu}M(\tau)$, $c_2=d\left[\dfrac{s(2^\beta-1)}{2\mu}\right]^{1/(s-1)}$, $a_n=\|x_n-x_{\alpha_n}\|$, $\tau=(\gamma+1)d$, $\|x^*\|\leqslant d$, а параметр γ определяется соотношением

$$\left[\frac{4\mu}{M(\tau)s(2^\beta-1)}\right]^{(s-1)/(3-s)}\alpha_0^{1/(3-s)}\leqslant\gamma. \tag{5}$$

Пусть выполнены условия

а) $2\leqslant s<3$;

б) $\{\alpha_n\}$, монотонно убывая, стремится к нулю;

в) $\dfrac{c_1^{1/(3-s)}a_0^{1/(s-1)}}{\alpha_0^{1/(3-s)/(s-1)}}=q<1$;

г) $\left[\dfrac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{\alpha_n^{2/(3-s)}}\right]^{1/(s-1)}\leqslant\dfrac{q^{s-1}-q^2}{c_3}$.

Здесь $c_3=d\left[\dfrac{M(\tau)}{2}\right]^{1/(3-s)}\left[\dfrac{s(2^\beta-1)}{2\mu}\right]^{2/(s-1)(3-s)}$. Докажем в наших условиях справедливость неравенства

$$\frac{c_1^{1/(3-s)}a_n^{1/(s-1)}}{\alpha_n^{1/(3-s)(s-1)}}\leqslant q. \tag{6}$$

При $n=0$ оно верно (см. условие в)). Пусть (6) справедливо при $k\leqslant n$, установим его для $k=n+1$. Действительно, используя (4)—(6) и свойства а)—г), имеем

$$\frac{c_1^{(s-1)/(3-s)}\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}^{1/(3-s)}}\leqslant\frac{c_1^{2/(3-s)}\,\alpha_n^{2/(s-1)}}{\alpha_n^{2/(3-s)(s-1)}}+c_3\left[\frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{\alpha_n^{2/(3-s)}}\right]^{1/(s-1)}\leqslant q^{s-1}.$$

Следовательно, доказана

Теорема 2. *В условиях данного пункта* $x_n\to x^*$ *при* $n\to\infty$, $x^*\in N$, $\|x^*\|=\min\limits_{x\in N}\|x\|$.

Замечание 1. Если вместо правой части f и оператора A известны последовательности $\{f^{\delta_n}\}$ и $\{A^{h_n}\}$, причем $\|f-f^{\delta_n}\|\leqslant\delta_n$, $A^{h_n}:X\to X^*$ — операторы, обладающие при всех $h_n>0$ такими же свойствами, как и A, $D(A^{h_n})=D(A)$, $\|A^{h_n}x-Ax\|\leqslant\leqslant g(\|x\|)\,h_n$, $x\in D(A)$, $g(t)$ $(t\geqslant 0)$ — неотрицательная функция, то итерационный процесс определяется соотношением

$$A^{h_n}x_n+(A^{h_n})'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+\alpha_nU^sx_{n+1}=f^{\delta_n},$$

и для сходимости его в условиях теоремы 2 достаточно выполнение условий $\delta_n/\alpha_n\to 0$, $h_n/\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$.

2. Из результатов [3, 6] следует сходимость метода Ньютона—Канторовича при условии сильной монотонности оператора уравнения. В этом пункте исследуем вопрос о сходимости метода Ньютона—Канторовича для регуляризованного уравнения $Ax+\alpha U^sx=f$, $\alpha>0$ [7], причем оператор $A+\alpha U^s$ не является сильно монотонным.

Теорема 3. *Пусть пространства X и X^* удовлетворяют условиям п. 1; A — дважды дифференцируемый, по Гато, монотонный оператор, $\varphi(t)=\langle A''(x+\mathrm{th})h^2,\ h\rangle$ интегрируема на $(0,\ 1)$ $\forall x,\ x+h\in X$, $\|A''(x)\|\leqslant L$ $\forall x\in\overline{\mathrm{co}}(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots)$, где элементы x_n, $n\geqslant 0$, определяются уравнением*

$$Ax_n+A'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+\alpha U^sx_{n+1}=f. \tag{7}$$

Предположим также, что $2\leqslant s<3$, $\varkappa=[L/(2\alpha c)]^{(s-1)/(s-3)}$, где $c=2\mu/(s(2^\beta-1))$ (см. (3)) и $\varkappa\|x_\alpha-x_0\|=q<1$ или $\varkappa\|x_1-x_0\|=q<1$, тогда соответственно справедливы оценки

$$\varkappa\|x_\alpha-x_n\|\leqslant q^{[2/(s-1)]^n} \tag{8}$$

или

$$\varkappa\|x_\alpha-x_n\|\leqslant\sum_{i=n}^{\infty}q^{[2/(s-1)]^i}. \tag{9}$$

Здесь x_α — решения уравнения

$$Ax+\alpha U^sx=f. \tag{10}$$

Доказательство следует из неравенств $\varkappa\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant[\varkappa\|x_n-x_{n-1}\|]^{2/(s-1)}$, $\varkappa\|x_{n+1}-x_\alpha\|\leqslant[\varkappa\|x_n-x_\alpha\|]^{2/(s-1)}$.

Замечание 2. При $s=2$ оценки (8), (9) совпадают с полученными в работе [3].

Замечание 3. При $s=3$ и $c_1=[L/(2\alpha c)]^{1/2}<1$ получим также сходимость метода (7), причем $\|x_n-x_\alpha\|\leqslant c_1^n\|x_0-x_\alpha\|$.

Замечание 4. Из сильной монотонности дуального отображения в L_p $(1<p\leqslant 2)$ и работы [3] следует, что в этих пространствах для регуляризованного уравнения $Ax+\alpha Ux=f$ можно указать условия сходимости обобщенного метода Ньютона—Канторовича $Ax_n+A'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+\alpha Ux_{n+1}=f$. Теперь из теоремы 3 получим, что для регуляризованного уравнения (10) и в L_p $(2<p<3)$ можно применять метод (7). Отметим также, что с увеличением s оценки скорости сходимости (8), (9) ухудшаются.

Замечание 5. Если в теореме 3 условие $\|A''(x)\|\leqslant L$ заменить более естественным $\|A''(x)\|\leqslant M(\|x\|)$ (см. п. 1), то утверждение теоремы 3 останется справедливым при замене L на $M(\tau)$, где $\tau=(\gamma+1)d$, $d=\max\{\|x_\alpha\|,\ \|x_0\|\}$, а постоянная γ определяется соотношением $2\alpha c\leqslant M(\tau)(\gamma d)^{3-s}$.

Замечание 6. Все сказанное в пп. 1, 2 верно, если вместо уравнения (1) решаем неравенство $\langle Ax-f,\ z-x\rangle\geqslant 0$ $\forall z\in K$, $x\in K$, где K — выпуклая замкнутая область в X, $\operatorname{int}K\neq\varnothing$.

Замечание 7. Возможность применения метода типа Ньютона—Канторовича для решения регуляризованного уравнения при $s>3$ определяется условиями (см. [4, 6]), в которые не входит требование монотонности оператора A. Если эти условия не выполняются, то для регуляризованного уравнения можно применить итерационные процессы из [9]. Добавим к сказанному, что в пространстве L_p $(p>3)$ дуальное отображение дифференцируемо, причем

$$U'(x)\,h=(2-p)\,\|x\|^{2-2p}\,|x|^{p-2}\,x\langle|x|^{p-2}\,x,\ h\rangle+(p-1)\,\|x\|^{2-p}\,|x|^{p-2}\,h,$$

$$(U^p)'(x)\,h=(2-p)(p-1)\,\|x\|^{-p}\,\langle|x|^{p-2}x,\ h\rangle\,|x|^{p-2}\,x+(p-1)\,|x|^{p-2}\,h.$$

Эти формулы получаются тем же методом, что и выражения градиента нормы в L_p (см. [6]). Аналогично это можно получить и в пространстве l_p, $p>3$.

Литература

1. Бакушинский А. Б., Поляк Б. Т. // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, № 5. С. 1038—1041.
2. Альбер Я. И., Рязанцева И. П. // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262, № 6. С. 1289—1293.
3. Бакушинский А. Б. // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1976. Т. 16, № 6. С. 1397—1404.
4. Забрейко П. П., Злепко П. П. // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, вып. 3. С. 365—369.
5. Юргелас В. В. Методы приближенного решения уравнений с монотонными операторами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 1983.
6. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., 1972.
7. Бакушинский А. Б. // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1983. Т. 23, № 1. С. 216—218.
8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1977.
9. Альбер Я. И., Нотик А. И. Геометрия банаховых пространств и приближенные методы решения нелинейных операторных уравнений. Горький, 1983. (Препринт/ НИРФИ: № 170).

Горьковский институт инженеров водного транспорта

Поступила в редакцию 15 марта 1984 г.

УДК 517.927

А. Т. ТАЛДЫКИН, Е. А. ИСАКОВА

О ПРИБЛИЖЕНИЯХ И РАЗЛОЖЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим краевую задачу отыскания решения u в области Q из R^m линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$l(u)=f(x,\ \alpha),\ x=(x_1,\ \dots,\ x_m)\in Q,\ \alpha=(\alpha^1,\ \dots,\ \alpha^s)\in M, \tag{1}$$

удовлетворяющего линейным однородным краевым условиям

$$\gamma(u)|_{\partial Q}=0, \tag{2}$$

в предположении, что свободный член f уравнения (1), а возможно, и его коэффициенты зависят от некоторого параметра α данного множества M любой природы, в том числе и стохастической. Множество M — либо не более чем счетное, либо некоторая область G.

Краевую задачу будем рассматривать сначала при фиксированных значениях параметра, трактуя встречающиеся при этом функции принадлежащими пространству $L_2(Q)$ при каждом α. Затем будем исследовать эту задачу для всего множества M, считая встречающиеся функции $g(x,\alpha)$, $h(x,\alpha)$, ... элементами пространства $L_2(M, L_2(Q))$ над пространством $L_2(Q)$, в котором скалярное произведение $[g, h]$ определено формулой

$$[g,\ h]=\sum_i\int_Q g(x,\ \alpha_i)\,h(x,\ \alpha_i)\,dx$$

либо формулой

$$[g,\ h]=\int_G\left[\int_Q g(x,\ \alpha)\,h(x,\ \alpha)\,dx\right]d\alpha,$$

соответственно тому, является ли множество M не более чем счетным или областью. Тогда норма $|||g|||$ элемента g определится соответственно формулой $|||g|||=\left(\sum_i|g(x,\ \alpha_i)|^2dx\right)^{1/2}$, $|||g|||=\left(\int_G\int_Q|g(x,\ \alpha)|^2dxd\alpha\right)^{1/2}$. Дифференциальное выражение $l(u)$ и краевые условия задают линейный оператор A из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$ (на множестве функций u, для которых $l(u)\in L_2(Q)$), который в обычных условиях плотно определен [1, с. 121] и имеет ограниченный обратный оператор.

Краевую задачу можно рассматривать как задачу отыскания решения операторного уравнения

$$Au=f. \tag{3}$$

Интересуясь лишь получением приближений к решению или разложениями решения краевой задачи, будем считать, что искомое решение краевой задачи существует и