А. И. Мальцев, Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп,
Матем. сб., 1966, том 111, номер 1, 3–12

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
С
1966 1866—1966 Т. 69(111), № 1

УДК 519.47

Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп

А. И. Мальцев (Новосибирск)

Цель этой заметки — построить многообразие коммутативных луп L, определенное конечной системой тождеств от одного переменного и такое, что задача о распознавании истинности произвольно заданного тождества от одного переменного на каждой лупе многообразия L является алгоритмически неразрешимой. Это значит, что в многообразии L свободная лупа с одним порождающим элементом неконструктивна.

В § 1 напоминаются некоторые общеизвестные определения и факты В § 2 строится вспомогательное многообразие алгебр с двумя унарными операциями, имеющее нерекурсивную свободную алгебру. При помощи этого многообразия в § 4 строятся многообразие луп и многообразие коммутативных луп, в которых нерекурсивны свободные лупы с одним порождающим. В § 3 доказывается вспомогательная лемма о доопределении частичных луп.

§ 1. Проблема тождественных соотношений

Пусть $F_1, \ldots, F_s$ — произвольная конечная система символов, каждому из которых поставлено в соответствие некоторое натуральное число, называемое арностью соответствующего символа. Задать алгебру сигнатуры $\sigma = \{F_1, \ldots, F_s\}$ это значит задать некоторое множество A и каждому символу F_i поставить в соответствие какую-то n_i-арную операцию f_i, определенную на A, со значениями в A, где n_i есть арность символа F_i. Операция f_i называется значением функционального символа F_i в алгебре A. Классом алгебр называется произвольная система алгебр заданной сигнатуры.

Понятие терма сигнатуры $F_1, \ldots, F_s$ от некоторых предметных переменных $x_1, \ldots, x_m$ определяется индуктивно:

а) выражения вида $x_1, \ldots, x_m$, по определению, называются термами,

б) если $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n_i}$ — термы, то выражение $F_i(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n_i})$ также терм.

Задать значение предметной переменной x_j в алгебре A это значит символу x_j поставить в соответствие какой-то элемент алгебры A. Если $\mathfrak{a}$—терм сигнатуры σ от переменных $x_1, \ldots, x_m$ и значения всех этих переменных в алгебре A сигнатуры σ заданы, то, производя над значениями $x_1, \ldots, x_m$ в алгебре A все те операции, которые указаны в записи терма $\mathfrak{a}$, получим элемент A, называемый значением терма $\mathfrak{a}$ при заданных значениях переменных $x_1, \ldots, x_m$.

Выражение вида $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, где $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ — термы заданной сигнатуры σ от переменных $x_1, \ldots, x_m$, называется тождеством (или тождественным соотношением) сигнатуры σ ранга m. Тождество $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ истинно на алгебре A, если для любых значений $x_1, \ldots, x_m$ в A значения $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ равны. Тождество $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ истинно на классе $\mathbf{K}$ алгебр, если оно истинно на каждой алгебре класса $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$-алгебре).

Через $I_m(\mathbf{K})$ условимся обозначать совокупность всех тождеств от $x_1, \ldots, x_m$, истинных на классе $\mathbf{K}$. Объединение всех $I_m(\mathbf{K})$ обозначим через $I(\mathbf{K})$. Так как тождества — это слова в алфавите $x, F_1, \ldots, F_s, =, \, ', \, (,)$, ($x_i$ кодируем словом $xx \ldots x$), то можно ставить вопрос о том, является ли для данного класса $\mathbf{K}$ совокупность $I(\mathbf{K})$ (или совокупности $I_m(\mathbf{K})$) рекурсивной (рекурсивными). Этот вопрос называется проблемой тождественных соотношений на классе $\mathbf{K}$. Ясно, что из нерекурсивности $I_m(\mathbf{K})$ для какого-нибудь m следует нерекурсивность $I(\mathbf{K})$ и всех $I_n(\mathbf{K})$ для $n \geqslant m$.

Для каждого класса $\mathbf{K}$ и каждой совокупности символов $a_1, \ldots, a_m$ может быть построена особая алгебра, называемая свободной алгеброй ранга m (или алгеброй со свободными порождающими $a_1, \ldots, a_m$) для класса $\mathbf{K}$. Построение это осуществляется следующим образом. Пусть $\sigma = \{F_1, \ldots, F_s\}$ — сигнатура $\mathbf{K}$. Обозначим через $\mathfrak{A}_m$ совокупность всех термов сигнатуры σ от переменных $a_1, \ldots, a_m$. Термы $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ из $\mathfrak{A}_m$ назовем эквивалентными, если соотношение

$$\mathfrak{a}(x_1, \ldots, x_m) = \mathfrak{b}(x_1, \ldots, x_m)$$

является тождеством, истинным на классе $\mathbf{K}$. Обозначим через $\mathfrak{F}_m$ множество классов эквивалентных термов и на $\mathfrak{F}_m$ определим операции $f_1, \ldots, f_s$ формулами

$$f_i([\mathfrak{a}_1], \ldots, [\mathfrak{a}_{n_i}]) = [F_i(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n_i})],$$

где $[\mathfrak{a}_j]$ — класс термов, эквивалентных терму $\mathfrak{a}_j$. Алгебра $\mathfrak{F}_m$ с основным множеством $\mathfrak{F}_m$ и операциями $f_1, \ldots, f_s$ и называется свободной для $\mathbf{K}$ алгеброй ранга m с порождающими $a_1, \ldots, a_m$. Из построения алгебры $\mathfrak{F}_m$ видно, что проблема эквивалентности слов в $\mathfrak{F}_m$ равносильна проблеме тождественных соотношений ранга m на классе $\mathbf{K}$.

Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторая система тождеств данной сигнатуры σ и $\mathbf{K}$ — какой-нибудь клас алгебр сигнатуры σ. Через $\mathbf{K}(\mathfrak{S})$ обозначается система всех тех $\mathbf{K}$-алгебр, на которых истинны все тождества из $\mathfrak{S}$. Класс алгебр $\mathbf{K}_1$ называется многообразием $\mathbf{K}$-алгебр, если $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}(\mathfrak{S})$ для подходящей системы тождеств $\mathfrak{S}$. Класс $\mathbf{K}_1$ называется конечно-определенным многообразием $\mathbf{K}$-алгебр, если $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}(\mathfrak{S})$, где $\mathfrak{S}$ — некоторая конечная система тождеств. Класс $\mathbf{K}_1$ называется многообразием ранга m $\mathbf{K}$-алгебр, если $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}(\mathfrak{S})$, где $\mathfrak{S}$ — система тождеств, каждое из которых является тождеством не более чем от m переменных. Наконец, если $\mathbf{K}$ — класс всех алгебр данной сигнатуры, то многообразие $\mathbf{K}$-алгебр называется абсолютным многообразием или просто многообразием алгебр (данной сигнатуры). Абсолютными конечноопределенными многообразиями являются, например, классы групп, абелевых групп, колец, ассоциативных колец, лиевых колец, решеток, полугрупп и т. п. Алгебры, свободные для многообразий, принадлежат соответствующим многообразиям. Во всех перечисленных многообразиях (групп, коммутативных групп, колец и т. п.) свободные алгебры конструктивны, т. е. имеют алгоритмически разрешимую проблему равенства слов. По-видимому, в литературе не встречались конечноопределенные абсолютные многообразия алгебр с неразрешимой проблемой равенства слов в свободных алгебрах. Ниже будут построены конечноопределенные абсолютные многообразия ранга 1 алгебр простейших сигнатур, для которых неразрешима проблема тождества слов в свободных алгебрах ранга 1.

§ 2. Алгебры с унарными операциями

В известном смысле простейшими являются алгебры, сигнатура которых состоит лишь из одной унарной операции $F(x)$. Согласно Эренфойхту, класс всех алгебр этой сигнатуры имеет разрешимую элементарную теорию, и потому проблема тождественных соотношений для любого конечно аксиоматизируемого класса алгебр с одной унарной операцией разрешима. В частности, тривиально разрешима проблема тождественных соотношений для любого конечноопределенного многообразия алгебр с одной унарной операцией.

Для алгебр с двумя унарными операциями положение коренным образом меняется.

Теорема 1. *Существует конечноопределенное многообразие ранга* 1 *алгебр с двумя унарными операциями, для которого проблема тождественных соотношений от одного переменного алгоритмически не разрешима.*

Согласно теореме Поста — Маркова (см. [1]), существует полугруппа $\mathfrak{C}$, заданная подходящей системой порождающих элементов $c_1, \ldots, c_r$ и определяющих соотношений

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i$ — некоторые слова в алфавите $c_1, \ldots, c_r$, для которой проблема эквивалентности слов алгоритмически не разрешима. Пусть a_1, a_2 — новые символы. В соотношения (1) вместо букв c_k подставляем соответственные слова

$$c_k = a_1 a_2 a_1^{k+1} a_2^{k+1} \quad (k = 1, \ldots, r). \tag{2}$$

После этой подстановки соотношения (1) перейдут в соотношения, имеющие вид

$$a_{\alpha(i,1)} a_{\alpha(i,2)} \ldots a_{\alpha(i,p_i)} = a_{\beta(i,1)} \ldots a_{\beta(i,q_i)}, \tag{3}$$

где $\alpha(i, j)$, $\beta(i, j) = 1, 2$; $i = 1, \ldots, n$. Соотношения (3) опеределяют полугруппу $\mathfrak{P}$ с порождающими a_1, a_2. Ясно, что формулы (2) определяют изоморфное вложение полугруппы $\mathfrak{C}$ в полугруппу $\mathfrak{P}$ (см. [2]). Так как проблема эквивалентности слов в полугруппе $\mathfrak{C}$ алгоритмически не разрешима, то проблема эквивалентности слов в полугруппе $\mathfrak{P}$ также алгоритмически не разрешима.

Рассмотрим теперь класс алгебр с двумя унарными основными операциями A_1 и A_2. Каждому определяющему соотношению (3) ставим в соответствие тождество

$$A_{\alpha(i,1)}(A_{\alpha(i,2)}\ldots(A_{\alpha(i,p_i)}(x))\ldots)=A_{\beta(i,1)}(\ldots(A_{\beta(i,q_i)}(x))\ldots) \qquad (4)$$

от переменной x сигнатуры A_1, A_2. Обозначим через $\mathfrak{M}$ многообразие тех алгебр сигнатуры A_1, A_2, на которых истинны все тождества (4).

Произвольное тождественное соотношение ранга 1 в сигнатуре A_1, A_2 имеет либо вид

$$A_{\alpha_1}(A_{\alpha_2}\ldots(A_{\alpha_p}(x))\ldots)=A_{\beta_1}(\ldots(A_{\beta_q}(x))\ldots), \qquad (5)$$

либо вид

$$A_{\alpha_1}(A_{\alpha_2}\ldots(A_{\alpha_p}(x))\ldots)=x.$$

Легко убедиться, что *тождество* (5) *истинно на многообразии* $\mathfrak{M}$ *тогда и только тогда, когда в полугруппе* $\mathfrak{P}$ *истинно равенство*

$$a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}\ldots a_{\alpha_p}=a_{\beta_1}a_{\beta_2}\ldots a_{\beta_q}. \qquad (6)$$

В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебра из $\mathfrak{M}$. Каждая унарная операция, определенная на $\mathfrak{A}$, — отображение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$. Все отображения $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ составляют полугруппу относительно обычного умножения отображений. В этой полугруппе рассмотрим подполугруппу $\mathfrak{P}^*$, порожденную отображениями A_1 и A_2. Тождества (4) означают, что в полугруппе $\mathfrak{P}^*$ элементы A_1, A_2 связаны соотношениями (3). Если равенство (6) истинно в полугруппе $\mathfrak{P}$, то оно истинно в каждой полугруппе, в которой элементы a_1, a_2 связаны соотношениями (3). Поэтому в полугруппе $\mathfrak{P}^*$ истинно равенство

$$A_{\alpha_1}A_{\alpha_2}\ldots A_{\alpha_p}=A_{\beta_1}A_{\beta_2}\ldots A_{\beta_q},$$

равносильное тождеству (5). Таким образом, из (6) следует (5).

Обратно, пусть (5) истинно на многообразии $\mathfrak{M}$. К полугруппе $\mathfrak{P}$ присоединяем внешнюю единицу e, т. е. полагаем $e\notin\mathfrak{P}$, $ee=e$ и $ex=xe=x$ для $x\in\mathfrak{P}$. Новую полугруппу $\mathfrak{P}\cup\{e\}$ обозначим через $\mathfrak{P}_e$. На $\mathfrak{P}_e$ определим операции A_1, A_2, полагая

$$A_1x=a_1x,\quad A_2x=a_2x. \qquad (7)$$

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}_e$ с основным множеством $\mathfrak{P}_e$ и операциями A_1, A_2. Из соотношения (3) вытекает, что на $\mathfrak{A}_e$ истинны тождества (4), и поэтому $\mathfrak{A}_e$ принадлежит $\mathfrak{M}$. Согласно предположению, на многообразии $\mathfrak{M}$, а следовательно, и на алгебре $\mathfrak{A}_e$ истинно тождество (5). Полагая в нем $x=e$ и пользуясь (7), получим равенство (6), что и требовалось.

Итак, на многообразии $\mathfrak{M}$, определенном конечным числом тождеств ранга 1, проблема тождественных соотношений первого ранга алгоритмически не разрешима, и теорема 1 доказана. Однако многообразие $\mathfrak{M}$ обладает еще одним свойством, которое нам будет нужно в дальнейшем.

Лемма. *Пусть $\mathfrak{M}$ — построенное выше многообразие алгебр с основными операциями A_1, A_2, удовлетворяющих тождествам* (4). *Обозначим через $\mathfrak{M}_0$ класс бесконечных алгебр из $\mathfrak{M}$, в которых существует такой элемент* 0, *что для любых элементов x, y*

α) $A_2^{i+1}x = x \leftrightarrow x = 0$,

β) $A_1A_2^ix = x \leftrightarrow x = 0$,

γ) $A_1x = A_2y \leftrightarrow x = y = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots)$

δ) $A_2x = A_2y \leftrightarrow x = y$,

ε) $A_1A_2^{i+1}x = A_1x \leftrightarrow x = 0$.

Тогда каждое тождество вида (5), *истинное на всех $\mathfrak{M}_0$-алгебрах, будет истинно на всех $\mathfrak{M}$-алгебрах, и потому проблема тождественных соотношений на классе $\mathfrak{M}_0$ алгоритмически не разрешима.*

Пусть тождество (5) истинно на каждой алгебре класса $\mathfrak{M}_0$. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}_e$, построенную в процессе доказательства теоремы 1. Присоединим к ней новый элемент 0 и положим $A_10 = A_20 = 0$. Расширенную алгебру обозначим через $\mathfrak{A}_0$. Для $x = 0$ соотношения (4) тривиально истинны. Поэтому тождества (4) истинны на $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_0 \in \mathfrak{M}$. Покажем, что алгебра $\mathfrak{A}_0$ обладает свойствами α) — ε).

Элементами алгебры $\mathfrak{A}_0$ являются 0, e и элементы полугруппы $\mathfrak{P}$, представляющиеся непустыми словами в алфавите a_1, a_2. При этом два слова эквивалентны, т. е. представляют один и тот же элемент $\mathfrak{P}$, тогда и только тогда, когда одно из них может быть переведено в другое элементарными преобразованиями, отвечающими определяющим соотношениям (3). Условимся слово в алфавите a_1, a_2 называть регулярным, если оно (графически) распадается в композицию слов вида $a_1a_2a_1^{k+1}a_2^{k+1}$ $(k > 0)$. Особенность соотношений (3) состоит в том, что их левые и правые части являются регулярными словами. Отсюда, в частности, следует, что регулярное слово может быть эквивалентно лишь регулярному слову. Более того, каждая буква произвольного слова может входить не более чем в одно подслово вида $a_1a_2a_1^{k+1}a_2^{k+1}$. Поэтому произвольное слово в алфавите a_1, a_2 однозначно распадается в композицию своих максимальных регулярных кусков, соединенных нерегулярными отрезками, не содержащими подслов вида $a_1a_2a_1^{k+1}a_2^{k+1}$. В процессе элементарных преобразований меняются лишь максимальные регулярные куски, а упомянутые нерегулярные отрезки не меняются.

Проверим свойство γ). Пусть $A_1x = A_2y$ и $x \neq 0$ или $y \neq 0$. Тогда $x \neq 0$, $y \neq 0$ и потому $a_1x = a_2y$. При элементарных преобразованиях начальная буква слова не меняется. Поэтому эквивалентность $a_1x = a_2y$ невозможна, и $x = y = 0$.

Пусть $A_2x = A_2y$. Если $x = 0$ или $y = 0$, то $x = y = 0$. Если же $x \neq 0$, $y \neq 0$, то в $\mathfrak{P}_e$ имеем $a_2x = a_2y$. Но буква a_2, стоящая в начале слова, в элементарных преобразованиях участия принимать не может. Поэтому $x = y$ и свойство δ) истинно. Наконец, если $A_1x = A_1A_2x$, $x \neq 0$, то $a_1x = a_1a_2x$ в $\mathfrak{P}_e$. Левые и правые части определяющих соотношений (3) являются словами, длина которых четна. Отсюда следует, что разность длин эквивалентных слов есть число четное. Разность длин слов a_1x и a_1a_2x равна единице, и потому эквивалентность $a_1x = a_1a_2x$ в полугруппе $\mathfrak{P}_e$ невозможна. Аналогичным образом проверяются и остальные свойства.

Итак, алгебра $\mathfrak{A}_0$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_0$, и потому на $\mathfrak{A}_0$ истинно тождество (5). Полагая в нем $x = e$, получим равенство (6), из которого, как показано выше, следует, что тождество (5) истинно на каждой алгебре многообразия $\mathfrak{M}$.

§ 3. Частичные квазигруппы

Алгебра Q с одной бинарной операцией $\circ$ называется квазигруппой если для любых a, x, y из Q имеют место законы сокращения

$$a \circ x = a \circ y \rightarrow x = y, \tag{8}$$

$$x \circ a = y \circ a \rightarrow x = y \tag{9}$$

и для каждых a, b из Q в Q разрешимы уравнения

$$a \circ x = b, \quad y \circ a = b.$$

Элемент 0 квазигруппы Q называется ее нулем, если

$$x \circ 0 = 0 \circ x = x \quad (x \in Q). \tag{10}$$

Множество Q, содержащее фиксированный элемент 0 и снабженное частичной бинарной операцией $\circ$, называется частичной квазигруппой с нулем 0 относительно операции $\circ$, если в Q для всех x определены и равны x произведения $x \circ 0$, $0 \circ x$ и в Q имеют место законы сокращения (8), (9) при условии, что все входящие в них произведения определены в Q.

Квазигруппа с операцией $\circ$ называется коммутативной, если на ней истинно тождество $x \circ y = y \circ x$. Частичная квазигруппа называется коммутативной, если в ней из определенности $x \circ y$ вытекают определенность $y \circ x$ и равенство $x \circ y = y \circ x$.

Теорема 2. *Пусть Q_0 — счетная коммутативная частичная квазигруппа с нулем 0, удовлетворяющая условиям*

i) для каждого $a \neq 0$ конечна совокупность тех x, для которых определено $a \circ x$ или $x \circ a$;

ii) для каждого $r \in Q_0$ существует бесконечно много таких $p \in Q_0$, что уравнение $p \circ x = r$ не разрешимо в Q_0.

Тогда операцию $\circ$ можно доопределить до всюду определенной операции на Q_0 так, что Q_0 относительно новой операции будет коммутативной квазигруппой с нулем 0.

Без ограничения общности можно считать, что элементами Q_0 являются натуральные числа и что число 0 — нулевой элемент Q_0. Всевозможные пары натуральных чисел располагаем каким-нибудь образом в последовательность, например в следующую последовательность:

$$(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (0,2),\ (1,1),\ \ldots . \tag{11}$$

Пусть M_0 — множество тех пар (x, y), для которых произведение $x \circ y$ определено в частичной квазигруппе Q_0. Далее мы будем отдельными шагами расширять множество M_0, доопределяя надлежащим образом операцию $\circ$ и следя за тем, чтобы множество Q_0 с доопределенной операцией оставалось частичной коммутативной квазигруппой, удовлетворяющей требованиям i), ii).

Итак, пусть после n-го шага мы получили множество пар M_n, для которых произведение $\circ$ определено, и пусть продолженная частичная коммутативная квазигруппа Q_n с областью определенности M_n удовлетворяет требованиям i), ii). Берем в последовательности (11) первую пару (a, b), не входящую в M_n. Из коммутативности Q_n и свойств нулевого элемента следует, что $(b, a) \notin M_n$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Согласно i), совокупность тех x в Q_n, для которых определено $a \circ x$ или $x \circ a$, конечна. Поэтому найдется число c, отличное от всех значений, принимаемых произведениями $a \circ x$, $x \circ b$ в Q_n. Полагая $a \circ b = b \circ a = c$, мы расширим операцию $\circ$ и получим частичную коммутативную квазигруппу Q_n^* с областью определенности $M_n^* = M_n \cup \{(a, b), (b, a)\}$. Ясно, что условия i), ii) для Q_n^* выполняются.

Теперь в последовательности (11) ищем первую пару (p, r), для которой уравнение $p \circ x = r$ не разрешимо в Q_n^*. В силу i), ii), существует такой элемент q, что уравнение $q \circ x = r$ не разрешимо и $p \circ q$ не определено в Q_n^*. Расширяем операцию $\circ$, полагая $p \circ q = q \circ p = r$. Новую частичную квазигруппу с областью определенности $M_{n+1} = M_n^* \cup \{(p, q), (q, p)\}$ обозначим через Q_{n+1}. Условия i), ii) в Q_{n+1}, очевидно, выполняются.

Мы получили последовательность частичных квазигрупп $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$, определенных на множестве натуральных чисел, с постепенно расширяющейся операцией $\circ$. Предельная алгебра Q будет искомой коммутативной квазигруппой.

Заметим, что теорема 2 верна и для произвольных (некоммутативных) квазигрупп. Ее легко обобщить и на несчетный случай.

§ 4. Многообразия квазигрупп

В § 2 были расссмотрены алгебры с двумя унарными операциями. Вместе с ними в каком-то смысле простейшими будут и алгебры с одной бинарной операцией, т. е. группоиды. Положение для группоидов оказывается таким же, как и для алгебр с двумя унарными операциями.

Теорема 3. *Существует конечноопределенное многообразие ранга 1 группоидов $\mathfrak{G}$, такое, что проблема тождественных соотношений ранга 1 алгоритмически не разрешима на любом классе группоидов, содержащемся в $\mathfrak{G}$ и содержащем совокупность $\mathfrak{G}_0$ всех бесконечных коммутативных квазигрупп с нулем, принадлежащих $\mathfrak{G}$.*

Рассмотрим систему тождеств (4), упоминающуюся в лемме из § 2. В каждом тождестве (4) выражения вида $A_2(z)$, $A_1(z)$ последовательно заменяем термами сигнатуры $\circ$ с помощью формул

$$A_2(z) = z \circ z, \tag{12}$$

$$A_1(z) = (z \circ z) \circ z. \tag{13}$$

Например, выражение $A_2(A_1(x))$ при таком преобразовании перейдет в терм

$$((x \circ x) \circ x) \circ ((x \circ x) \circ x). \tag{14}$$

В результате из тождеств (4) получим тождества вида

$$G_i(x) = H_i(x), \tag{15}$$

где G_i, H_i — термы от переменной x сигнатуры $\circ$. Обозначим через $\mathfrak{G}$ многообразие группоидов, удовлетворяющих тождествам (15), и через $\mathfrak{G}_0$ — класс всех коммутативных квазигрупп с нулем, содержащихся в $\mathfrak{G}$.

Возьмем произвольное тождество вида (5). Преобразуя его указанным способом, получим тождество вида

$$F(x) = G(x). \tag{16}$$

Для доказательства теоремы 4 достаточно показать, что 1) из истинности тождества (16) на классе $\mathfrak{G}_0$ следует истинность тождества (5) на классе $\mathfrak{M}_0$ алгебр с операциями A_1, A_2 и 2) из истинности (5) на классе $\mathfrak{M}_0$ вытекает истинность тождества (16) на многообразии $\mathfrak{G}$.

Начнем со второго утверждения. Пусть тождество (5) истинно на классе $\mathfrak{M}_0$ (из леммы § 2). Тогда оно, согласно этой лемме, истинно и на многообразии $\mathfrak{M}$, определенном тождествами (4). Возьмем произвольный группоид G из многообразия $\mathfrak{G}$. Определив на G новые операции A_1, A_2 по формулам (12), (13), мы обратим G в алгебру сигнатуры A_1, A_2. Так как на группоиде G истинны тождества (15), то на алгебре G истинны тождества (4), т. е. алгебра G принадлежит многообразию $\mathfrak{M}$, и потому на алгебре G истинно тождество (5), означающее, в силу формул (12), (13), что на группоиде G истинно тождество (16).

Первое утверждение доказывается несколько сложнее. Пусть тождество (16) истинно на классе $\mathfrak{G}_0$ и пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебра класса $\mathfrak{M}_0$, удовлетворяющая требованиям α) — ε) леммы из § 2. В частности, $\mathfrak{A}$ содержит элемент 0, удовлетворяющий перечисленным требованиям. На совокупности элементов алгебры $\mathfrak{A}$ определяем частичную операцию $\circ$ с помощью формул (12), (13) и соглашений

$$z \circ (z \circ z) = A_1 z, \tag{17}$$

$$0 \circ z = z \circ 0 = z. \tag{18}$$

Из свойств α) — ε) вытекает, что формулы (12), (13), (17), (18) не противоречат друг другу. В самом деле, формула (12) определяет произведение для диагональных пар (z, z) и для этих пар находится в согласии с формулой (18), так как $A_2 0 = 0$. Пара $(z \circ z, z)$ может быть диагональной только в том случае, когда $z \circ z = z$, т. е. когда $A_2 z = z$. Согласно свойству α) отсюда следует, что $z = 0$, а согласно свойству β) следует, что $A_1 0 = 0$. Наконец, пара вида $(z \circ z, z)$ не может быть при $z \neq 0$ парой $(0, z)$ в силу того же свойства α). Итак, на множестве элементов алгебры $\mathfrak{A}$ с помощью формул (12), (13), (17), (18) определяется некоторый *частичный группоид*, который мы обозначим через Q_0. Этот частичный группоид коммутативен и содержит нулевой элемент 0. Проверим закон сокращения. Пусть для некоторых

a, x, y имеем $a \circ x = a \circ y$ в Q_0. Если $a = 0$, то $x = y$. Поэтому далее предполагаем $a \neq 0$. Произведение $a \circ x$ определено в Q_0 только в следующих четырех случаях:

$$x = 0,\ x = a,\ x = a \circ a,\ a = x \circ x.$$

Аналогично, произведение $a \circ y$ определено также лишь в случаях

$$y = 0,\ y = a,\ y = a \circ a,\ a = y \circ y. \tag{19}$$

Надо просмотреть всевозможные комбинации этих случаев. Если $x = 0$, то в трех последних случаях в (19) соответственно получим

$$a = a \circ a = A_2 a,\ a = A_1 a,\ a = A_1 y = A_2 y,$$

т. е., в силу свойств α) — γ), $y = a = 0$. Аналогично и во всех остальных случаях получим $x = y$. Таким образом, Q_0 — частичная коммутативная квазигруппа с нулем 0.

Легко проверяется, что Q_0 удовлетворяет и требованиям *i*), *ii*) теоремы 2. Действительно, пусть $a \in Q_0$, $a \neq 0$. Тогда произведение $a \circ y$ будет определено только в случаях (19). Но уравнение $y \circ y = A_2 y = a$, в силу δ), имеет не более одного решения. Поэтому существует не более четырех значений для y, при которых $a \circ y$ определено в Q_0, и свойство *i*) истинно для Q_0.

С другой стороны, пусть задан произвольный элемент $r \in Q_0$. Если $r = 0$, то уравнение $p \circ x = r$ не разрешимо в Q_0 для любого $p \neq 0$. Пусть $r \neq 0$. Рассмотрим элементы $A_2 r, A_2^2 r, \ldots$. Согласно α), все эти элементы различны. Уравнение $(A_2^{i+1} r) \circ y = r$ может иметь решение y лишь в случаях (19). Но в этих случаях соответственно получаем

$$A_2^{i+1} r = r,\ A_2^{i+2} r = r,\ A_2 y = A_2^{i+1} r \to y = A_2^i r,\ A_1 A_2^i r = r,$$

откуда, в силу α), β), получаем, что $r = 0$.

Итак, частичная коммутативная квазигруппа Q_0 удовлетворяет требованиям теоремы 2, и потому ее можно доопределить до коммутативной квазигруппы Q с нулевым элементом 0. На алгебре $\mathfrak{A}$ выполняются тождества (4). Поэтому, в силу соотношений (12), (13), на квазигруппе Q удовлетворяются тождества (15), т. е. $Q \in \mathfrak{S}_0$, и, следовательно, на Q истинно тождество (16). В силу тех же соотношений (12), (13), это означает, что на алгебре $\mathfrak{A}$ истинно тождество (5), что и требовалось.

Лупой (примитивной лупой) называется алгебра с операцией умножения и операциями деления $/$, $\backslash$, связанными тождествами

$$(xy)/y = y\backslash(yx) = y(y\backslash x) = (x/y)y = x, \quad x\backslash x = y/y.$$

Лупа, удовлетворяющая тождеству $xy = yx$, называется коммутативной.

Каждая лупа относительно операции умножения является квазигруппой с нулевым элементом. Обратно, на каждой квазигруппе с нулевым элементом можно так доопределить операции деления, чтобы она обратилась в лупу. Поэтому из теоремы 4 непосредственно вытекает

С л е д с т в и е. *Существует конечноопределенное многообразие ранга* 1 *луп* L, *такое, что проблема истинности тождеств ранга* 1 *алгоритмически не разрешима на любом классе луп, содержащемся в* L *и содержащем все коммутативные лупы из* L.

В частности, проблема истинности тождеств ранга 1 алгоритмически не разрешима на многообразии всех коммутативных луп, содержащихся в L.

Помимо известного вопроса об алгоритмической разрешимости проблемы тождественных соотношений на любом конечноопределенном многообразии групп, интересно было бы решить вопрос о существовании конечноопределенного многообразия луп, конечные лупы которого составляют класс с алгоритмически неразрешимой проблемой тождественных соотношений.

(Поступило в редакцию 19/II 1965 г.)

Литература

1. А. А. М а р к о в. Теория алгоритмов, Труды Матем. ин-та им. В А. Стеклова, т. **XVII** (1954).
2. M. H a l l Jr, The word problem for semi-groups with two generators, J. Symb. Logic, **14** (1949), 115—119.