Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

О. В. Солонуха, О разрешимости параболических уравнений с существенно нелинейными дифференциально-разностными операторами,
*Сиб. матем. журн.*, 2023, том 64, номер 5, 1094–1113

https://www.mathnet.ru/smj7817

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
13 мая 2025 г., 03:12:53

*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2023. Том 64, № 5*

*УДК 517.9*

# О РАЗРЕШИМОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

**О. В. Солонуха**

**Аннотация.** Рассматривается первая смешанная краевая задача для нелинейного дифференциально-разностного уравнения параболического типа. Доказаны достаточные условия, при которых нелинейный дифференциально-разностный оператор обладает свойством $(V, W)$-полуограниченной вариации (при этом сформулировано алгебраическое условие сильной эллиптичности существенно нелинейного дифференциально-разностного оператора), а также является радиально непрерывным и коэрцитивным. На основе этих свойств доказаны теоремы существования обобщенного решения.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.515

**Ключевые слова:** нелинейное параболическое функционально-дифференциальное уравнение, оператор сдвигов по пространственным переменным, оператор с полуограниченной вариацией.

Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных рассматривались начиная с 60-х гг. прошлого века многими математиками (см., например, библиографию в работах [1–3]). Дифференциально-разностные уравнения в частных производных на тот момент рассмотрены не были. В середине 60-х гг. были сформулированы условия принадлежности дифференциальных операторов в частных производных классу операторов с полуограниченной вариацией [4, 2] и доказаны теоремы существования решений для уравнений эллиптического и параболического типов. Данный класс операторов используется в ряде регуляризационных схем.

В 1980-90-х гг. была создана теория линейных функционально-дифференциальных уравнений эллиптического типа [5–8], которая также была применена для исследования параболических задач (см. [9–11] и библиографию). С использованием этой теории ранее автором были рассмотрены параболические дифференциально-разностные уравнения с квазилинейными дифференциальными операторами, удовлетворяющими квазилинейному условию сильной эллиптичности (см. [12]), а также уравнения с существенно нелинейными дифференциально-разностными операторами, удовлетворяющими условию эллиптичности (см. [13]). Для существенно нелинейных дифференциальных операторов условие

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение N 075-15-2022-1115), Российский университет дружбы народов.

© **2023 Солонуха О. В.**

сильной эллиптичности было рассмотрено в [14]. В данной работе использованы свойства операторов и методы исследования из [15, 14].

В § 1 сформулирована начально-краевая задача и построено соответствующее ей операторное уравнение. В § 2 приведены основные свойства разбиения области, а также свойства рассматриваемого разностного оператора, более подробно см. [6, 7, 12, 16, 17]. В § 3–5 доказаны свойства существенно нелинейного дифференциально-разностного оператора, удовлетворяющего условию сильной эллиптичности. В § 6 доказаны теоремы существования обобщенных решений.

## § 1. Постановка задачи

В цилиндре $\Omega_T = Q \times (0,T)$ рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение со сдвигами по пространственным переменным

$$\partial_t u(x,t) + ARu(x,t) = f(x,t) \quad ((x,t) \in \Omega_T) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in Q) \tag{2}$$

и краевым условием

$$u(x,t) = 0 \quad (0 < t < T,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus Q). \tag{3}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q$ класса $C^\infty$ или $Q = (0,d)\times G$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G$ класса $C^\infty$, если $n \geq 3$). В случае $n = 1$ полагаем $Q = (0,d)$. Пусть оператор $A$ задан формулой

$$Au(x,t) = -\sum_{1\leq i\leq n} \partial_i A_i(x,t,u,\nabla u) + A_0(x,t,u,\nabla u). \tag{4}$$

Все функции считаем вещественнозначными. Определим ограниченный разностный оператор $R : L_p(\mathbb{R}^{n+1}) \to L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ по формуле

$$Ru(x,t) = \sum_{h\in\mathscr{M}} a_h u(x+h,t), \tag{5}$$

где $a_h \in \mathbb{R}$, $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов с целочисленными или соизмеримыми координатами, $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что разностный оператор $R$ нелокален. Сдвиги на векторы $h \in \mathscr{M}$ могут отображать точки $x \in Q$ в точки $x + h \in \mathbb{R}^n \setminus Q$. Поэтому краевые условия должны задавать значения неизвестной функции не только на границе цилиндра $\Gamma_T = \partial Q \times (0,T)$, но и на некотором множестве, лежащем в $(\mathbb{R}^n \setminus Q) \times (0,T)$. Для простоты в дальнейшем можно считать, что это множество совпадает с $(\mathbb{R}^n \setminus Q) \times (0,T)$.

Будем искать обобщенные решения данной задачи в соболевских пространствах. Введем определения. Множество всех распределений $y \in \mathscr{D}'(Q)$, являющихся вместе со всеми своими частными производными 1-го порядка функциями из $L_p(Q)$, обозначим через $W_p^1(Q)$. Через $\mathring{W}_p^1(Q)$ обозначается замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых в $Q$ функций $\dot{C}^\infty(Q)$ в пространстве $W_p^1(Q)$ с нормой

$$\|y\|_{\mathring{W}_p^1(Q)} = \left(\sum_{1\leq i\leq n} \int_Q |\partial_i y|^p dx\right)^{1/p}.$$

Линейные пространства

$$L_p(0,T;X) := \left\{ u : [0,T] \to X : \int\limits_0^T \|u\|_X^p \, dt < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{L_p(0,T;X)} = \left( \int\limits_0^T \|u\|_X^p \, dt \right)^{1/p}$$

являются рефлексивными и банаховыми при $1 < p < \infty$, если этими свойствами обладало пространство $X$ (см. [3]). Здесь в качестве $X$ рассматриваются $W_p^1(Q)$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)$.

Пусть $1/p + 1/q = 1$ и рассмотрим рефлексивное банахово пространство

$$\mathscr{V} := L_p\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)\big) \cap L_2(\Omega_T).$$

Таким образом, $\mathscr{V} = L_p\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)\big)$ при $p \in [2,\infty)$ с нормой

$$\|u\|_{\mathscr{V}} = \|u\|_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q))} = \left( \sum_{1 \le i \le n} \int\limits_{\Omega_T} |\partial_i u(x,t)|^p \, dxdt \right)^{1/p},$$

а сопряженным к нему является пространство $\mathscr{V}^* := L_q\big(0,T;W_q^{-1}(Q)\big)$. При $p \in (1,2)$

$$\|u\|_{\mathscr{V}} = \|u\|_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q))} + \|u\|_{L_2(\Omega_T)},$$

а сопряженным к $\mathscr{V}$ является пространство $\mathscr{V}^* := L_q\big(0,T;W_q^{-1}(Q)\big) + L_2(\Omega_T)$. Подробнее эти пространства описаны в [3, гл. IV, § 1, п .5], а также в [1, 2] и др.

Также будем рассматривать рефлексивное банахово пространство

$$W = \{u \in \mathscr{V} : \partial_t u \in \mathscr{V}^*\} \tag{6}$$

с нормой $\|u\|_W = \|u\|_{\mathscr{V}} + \|\partial_t u\|_{\mathscr{V}^*}$, где $\partial_t u$ — производная элемента $u \in \mathscr{V}$ в смысле распределений со значениями в $\mathscr{V}^*$. Как известно, $W \subset C(0,T;L_2(Q))$ (см. теорему 1.17 в [3, гл. IV]), поэтому $u|_{t=0}$ имеет смысл. Будем предполагать, что правая часть в (1) $f \in \mathscr{V}^*$ и начальные условия в (2) $\varphi \in L_2(Q)$.

Введем оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$, где $I_Q : L_p(\Omega_T) \to L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ — оператор продолжения функций из $L_p(\Omega_T)$ нулем в $(\mathbb{R}^n \setminus Q) \times (0,T)$, $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \to L_p(\Omega_T)$ — оператор сужения функций из $L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ на $\Omega_T$.

Таким образом, задача (1)–(3) рассматривается как операторное уравнение

$$\partial_t u + A_R u = f \tag{7}$$

в пространстве $W$ с начальным условием (2), где $A_R := AR_Q$.

Определение. Будем называть функцию $u \in W$ *обобщенным решением задачи* (1)–(3), если она удовлетворяет операторному уравнению (7) и начальному условию (2).

## § 2. Разбиение области $Q$ и свойства разностного оператора

Отметим, что рассматривается оператор со сдвигами только по пространственным переменным. Поэтому можно воспользоваться результатами эллиптической теории. В [17] проведено исследование оператора $R_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$ и его сужения $R_Q : \overset{\circ}{W}{}_p^1(Q) \to W_p^1(Q)$. Для $p = 2$ эти операторы исследованы в [5–7]. В этом параграфе будут сформулированы свойства оператора $R_Q : L_p\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)\big) \to L_p\big(0,T;W_p^1(Q)\big)$ (см. также [12, 16]).

Через $M$ обозначим аддитивную группу, порожденную множеством $\mathscr{M}$, а через $Q_r$ — открытые связные компоненты множества $Q \setminus \big(\bigcup\limits_{h\in M}(\partial Q + h)\big)$.

Определение. Множество $Q_r$ называется *подобластью.* Семейство $\mathscr{R}$ всех подобластей $Q_r$ $(r = 1, 2, \dots)$ называется *разбиением* области $Q$.

Легко видеть, что множество $\mathscr{R}$ не более чем счетно, при этом

$$\bigcup_r \partial Q_r = \Big(\bigcup_{h\in M}(\partial Q + h)\Big) \cap \overline{Q} \quad \text{и} \quad \bigcup_r \overline{Q}_r = \overline{Q}.$$

Известно, что для любой подобласти $Q_{r_1}$ и произвольного вектора $h \in M$ либо найдется подобласть $Q_{r_2}$ такая, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, либо $Q_{r_1} + h \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$ (см. лемму 7.1 из [6, гл. II, § 7]). Таким образом, семейство $\mathscr{R}$ можно разбить на непересекающиеся классы следующим образом: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathscr{R}$ принадлежат одному классу, если $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$ для некоторого $h \in M$. Будем обозначать подобласти $Q_r$ через $Q_{sl}$, где $s$ — номер класса, а $l$ — номер подобласти в $s$-м классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей $Q_{sl}$. Множество классов может быть конечным или счетным (см. примеры в § 7 гл. II из [6]). Соответственно перенумеруем множество сдвигов $\{h_{sl}\} \subset M$:

$$h_{s1} = 0, \quad Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}, \quad l = 1, \dots, N(s).$$

**Лемма 2.1.** *Операторы $I_Q : L_p(\Omega_T) \to L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ и $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \to L_p(\Omega_T)$, а также $R : L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \to L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ и $R_Q : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$, ограничены, $1 < p < \infty$.*

Обозначим через $L_p\big(\bigcup\limits_l Q_{sl} \times (0,T)\big)$ подпространство функций из $L_p(\Omega_T)$, обращающихся в нуль при $x \notin \bigcup\limits_l Q_{sl}$ $(l = 1, \dots, N(s))$. Введем ограниченный оператор $P_s : L_p(\Omega_T) \to L_p\big(\bigcup\limits_l Q_{sl} \times (0,T)\big)$ по формуле $P_s u(x,t) = u(x,t)$ при $x \in \bigcup\limits_l Q_{sl}$ и $t \in (0,T)$, $P_s u(x,t) = 0$ при $x \in Q \setminus \bigcup\limits_l Q_{sl}$ и $t \in (0,T)$. $P_s$ является оператором проектирования на $L_p\big(\bigcup\limits_l Q_{sl} \times (0,T)\big)$. Поскольку $\operatorname{mes}_n(\partial Q_{sl}) = 0$, имеем

$$L_p(Q) = \dotplus_s L_p\Big(\bigcup_l Q_{sl}\Big); \quad L_p(\Omega_T) = \dotplus_s L_p\Big(\bigcup_l Q_{sl} \times (0,T)\Big). \tag{8}$$

Изоморфизм рефлексивных банаховых пространств

$$U_s : L_p\Big(\bigcup_l Q_{sl} \times (0,T)\Big) \to L_p^{N(s)}(Q_{s1} \times (0,T))$$

определяется по формуле

$$(U_s u)_l(x,t) = u(x + h_{sl}, t) \quad (x \in Q_{s1},\ t \in (0,T),\ l = 1, \dots, N(s)). \tag{9}$$

Здесь $L_p^{N(s)}(Q_{s1}) = \prod_l L_p(Q_{s1})$, $L_p^{N(s)}(Q_{s1} \times (0,T)) = \prod_l L_p(Q_{s1} \times (0,T))$.

Введем матрицу $R_s$ порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h, & h = h_{sj} - h_{si} \in \mathscr{M}, \\ 0, & h_{sj} - h_{si} \notin \mathscr{M}. \end{cases} \tag{10}$$

Оператор $R_{Qs} : L_p^{N(s)}(Q_{s1}\times(0,T)) \to L_p^{N(s)}(Q_{s1}\times(0,T))$, заданный соотношением

$$R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}, \tag{11}$$

является оператором умножения на матрицу $R_s$ (ср. с леммой 3 из [17] и леммой 8.9 из [6]). Из ограниченности области $Q$ и формул (10) следует, что в случае постоянных коэффициентов $a_h$ число различных матриц $R_s$ конечно. Обозначим это число через $n_1$, и пусть $R_{s_\nu}$ — все различные матрицы $R_s$ ($\nu = 1, \dots, n_1$).

**Лемма 2.2** (см. леммы 2 и 3 из [12], а также леммы 5 и 6 из [17]). *Спектр оператора $\sigma(R_Q)$ равен $\sum\limits_{1\le\nu\le n_1} \sigma(R_{s_\nu})$. Более того,*

1) *оператор $R_Q$ непрерывно отображает $L_p\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)\big)$ в $L_p\big(0,T;W_p^1(Q)\big)$, причем*

$$\partial_i(R_Q u)(x,t) = R_Q \partial_i u(x,t) \quad ((x,t) \in \Omega_T); \tag{12}$$

2) *для всех $u \in L_p\big(0,T;W_p^1(Q)\big)$ имеем $R_Q u \in L_p\big(0,T;W_p^1(Q_{sl})\big)$ и*

$$\|R_Q u\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q_{sl}))} \le c_1 \sum_{j=1}^{N(s)} \|u\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q_{sj}))} \quad (s = 1,2,\dots; l = 1,\dots,N(s)); \tag{13}$$

3) *если $\det R_{s_\nu} \ne 0$ ($\nu = 1, \dots, n_1$), то существует обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$ и $R_Q^{-1} w \in L_p\big(0,T;W_p^1(Q_{sl})\big)$ для всех $w \in L_p\big(0,T;W_p^1(Q)\big)$, при этом для всех $s = 1,2,\dots$ и $l = 1,\dots,N(s)$*

$$\partial_i\big(R_Q^{-1} w\big)(x,t) = R_Q^{-1}\partial_i w(x,t), \quad ((x,t) \in Q_{sl} \times (0,T)), \tag{14}$$

*обратный оператор определен формулой*

$$R_Q^{-1} = \sum_s U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s, \tag{15}$$

*а также для всех $s = 1,2,\dots$ и $l = 1,\dots,N(s)$ справедлива оценка*

$$\big\|R_Q^{-1} w\big\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q_{sl}))} \le c_2 \sum_{j=1}^{N(s)} \|w\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q_{sj}))}. \tag{16}$$

*Здесь константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят от $u$, $w$, а также от $s$.*

Заметим, что свойства, указанные в леммах 2.1 и 2.2, справедливы для всех $p \in (1,\infty)$. Таким образом, лемма 2.2 оказывается справедливой не только для оператора $R_Q : \mathscr{V} = L_p\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)\big) \to L_p\big(0,T;W_p^1(Q)\big)$ при $p \in [2,\infty)$, но и для $R_Q : \mathscr{V} = L_p\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(Q)\big) \cap L_2(\Omega_T) \to L_p\big(0,T;W_p^1(Q)\big) \cap L_2(\Omega_T)$ при $p \in (1,2)$.

**Лемма 2.3.** *Пусть $\det R_{s_\nu} \ne 0$ ($\nu = 1, \dots, n_1$). Тогда существует константа $c_3 > 0$ такая, что*

$$\|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)} \ge c_3 \|u\|_{L_p(\Omega_T)}, \tag{17}$$

*причем $c_3$ не зависит от $u$, но зависит от $p$.*

## § 3. Дифференциально-разностный оператор, некоторые свойства

Определение. $\mathscr{A} : \mathscr{V} \to \mathscr{V}^*$ называется *радиально непрерывным*, если для любых фиксированных $u, v, y \in \mathscr{V}$ $(u + \lambda v \in \mathscr{D}(\mathscr{A}))$ функция $\lambda \mapsto \langle \mathscr{A}(u + \lambda v), y\rangle$ непрерывна. Оператор $\mathscr{A} : \mathscr{V} \to \mathscr{V}^*$ *деминепрерывен*, если он непрерывен из сильной топологии $\mathscr{V}$ в слабую топологию $\mathscr{V}^*$. Оператор $\mathscr{A} : \mathscr{V} \to \mathscr{V}^*$ *ограничен*, если образ ограниченного множества ограничен. Оператор $\mathscr{A} : \mathscr{V} \to \mathscr{V}^*$ *коэрцитивен*, если существует элемент $u_0 \in \mathscr{V}$ такой, что

$$\lim_{\|u\|_{\mathscr{V}} \to \infty} \|u\|_{\mathscr{V}}^{-1} \langle \mathscr{A} u, u - u_0\rangle = \infty. \tag{18}$$

Определим оператор $A_R : \mathscr{V} \to \mathscr{V}^*$ по формуле

$$A_R u(x) = -\sum_{1\le i\le n} \partial_i A_i(x, t, R_Q u, \partial_1 R_Q u, \cdots, \partial_n R_Q u) + A_0(x, t, R_Q u, \partial_1 R_Q u, \cdots, \partial_n R_Q u). \tag{19}$$

Будем использовать матрицы $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$:

$$\zeta := \begin{pmatrix} \zeta_{10} & \zeta_{11} & \zeta_{12} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \zeta_{20} & \zeta_{21} & \zeta_{22} & \cdots & \zeta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{N(s)0} & \zeta_{N(s)1} & \zeta_{N(s)2} & \cdots & \zeta_{N(s)n} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Будем обозначать через $\zeta_{\cdot i}$ $i$-й столбец $\zeta$, а через $\zeta_{l\cdot}$ обозначим $l$-ю строку $\zeta$.

Предположим, что для любого класса $s$ функции $A_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, и матрицы $R_s$ удовлетворяют следующим условиям.

**(A0) Условие невырожденности**: $\det R_{s_\nu} \ne 0$, $\nu = 1, \dots, n_1$.

**(A1) Условие интегрируемости**: $A_i$ — функции типа Каратеодори, т. е. $A_i(x, t, \xi)$ измеримы по $x$ и $t$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ и непрерывны по $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ для п.в. $(x, t) \in \overline{\Omega_T}$; более того, для п.в. $(x, t) \in \overline{\Omega_T}$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$|A_i(x, t, \xi)| \le g_0(x, t) + c_5 \sum_{0\le i\le n} |\xi_i|^{p-1}, \quad i = 0, \dots, n,$$

где $c_5 > 0$, $g_0 \in L_q(Q)$.

**(A2) Условие коэрцитивности:** для всех $s$, п.в. $(x, t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0, T]$ и любых $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ существуют $\widehat{p} \in (1, p)$, $c_6 > 0$ и $c_7, c_8 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\sum_{1\le l\le N(s)} \sum_{0\le i\le n} A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_{l\cdot})\bigl(R_s^{-1}\zeta_{\cdot i}\bigr)_l \ge c_6 \sum_{1\le l\le N(s)} \sum_{1\le i\le n} |\zeta_{li}|^p - c_7 \sum_{1\le l\le N(s)} |\zeta_{l0}|^{\widehat{p}} - c_8. \tag{21}$$

Условие интегрируемости (A1) стандартно (с небольшими вариациями) для построения интегрального представления дифференциального оператора (см. [19, 1, 2] и др. Благодаря этому условию из (19) следует, что для любых $u, v \in \mathscr{V}$

$$\langle A_R u, v\rangle = \sum_{0\le i\le n} \int_{\Omega_T} A_i(x, t, R_Q u, \partial_1 R_Q u, \cdots, \partial_n R_Q u)\partial_i v \, dxdt, \tag{22}$$

здесь и ниже $\partial_0 v := v$.

**Лемма 3.1.** *Пусть выполнено условие* (A1). *Тогда оператор* $A_R : \mathscr{V} \to \mathscr{V}^*$, *заданный формулой* (19), *деминепрерывен и ограничен.*

Доказательство. Дифференциальный оператор $A$, заданный формулой (4), деминепрерывен и ограничен вследствие условия (A1) и предложения о непрерывности оператора Немыцкого (см. [19, гл. 1, § 2] или лемму 2.2 в [3, гл. 2, § 2]). Линейный разностный оператор $R_Q$ ограничен (см. лемму 2.2). Следовательно, их композиция будет деминепрерывным ограниченным оператором. □

Рассмотрим также оператор $\widetilde{A}_R : \mathscr{D}(\widetilde{A}_R) \subset \mathscr{V} \to \widetilde{\mathscr{V}} \subset \mathscr{V}^*$, заданный формулой

$$\widetilde{A}_R u = A_R u \quad \forall u \in \mathscr{D}(\widetilde{A}_R) := \{u \in \mathscr{V} : A_R u \in \widetilde{\mathscr{V}}\}. \tag{23}$$

**Лемма 3.2.** *Пусть выполнено условие* (A1). *Тогда оператор* $\widetilde{A}_R : \mathscr{D}(\widetilde{A}_R) \to \widetilde{\mathscr{V}} \subset \mathscr{V}^*$ *с линейной областью определения* $\mathscr{D}(\widetilde{A}_R)$, *заданный формулой* (23), *радиально непрерывен.*

Доказательство. В силу условия (A1) оператор $A_R$ деминепрерывен (см. лемму 3.1), а область определения $\mathscr{D}(\widetilde{A}_R)$ — линейное подпространство (или аффинное подпространство) $\mathscr{V}$. □

**Лемма 3.3** (см. лемму 5 в [13]). *Пусть выполнены условия* (A0)–(A2). *Тогда оператор* $A_R : \mathscr{V} \to \mathscr{V}^*$, *заданный формулой* (19), *коэрцитивен.*

## § 4. Операторы с $(\mathscr{V}; W)$-полуограниченной вариацией, $p \in [2, \infty)$

Условие полуограниченной вариации было введено Ю. А. Дубинским как новое обобщение свойства монотонности, отличное от псевдомонотонности (см. [4, 2] и библиографию). Позже было доказано, что радиально непрерывные операторы с полуограниченной вариацией удовлетворяют условию псевдомонотонности. Условие $(\mathscr{V}; W)$-полуограниченной вариации используется в регуляризационных схемах и др. При доказательстве этого свойства не будет использовано свойство коэрцитивности[1)].

Определение. Оператор $A_R : \mathscr{V} \to \mathscr{V}^*$ называется *оператором с* $(\mathscr{V}, W)$-*полуограниченной вариацией*, если существует непрерывная функция $C$ такая, что для любых $u, y \in W$, $\|u\|_{\mathscr{V}} \le r$, $\|y\|_{\mathscr{V}} \le r$, справедливо неравенство

$$\langle A_R u - A_R y, u - y\rangle \ge -C(r; \|u - y\|'_W), \tag{24}$$

где $\tau^{-1}C(r, \tau h) \to +0$ при $\tau \to 0$ для всех $r, h > 0$, $\|\cdot\|'_W$ — компактная полунорма относительно $\|\cdot\|_W$ и непрерывная относительно $\|\cdot\|_{\mathscr{V}}$.

В качестве $\|\cdot\|'_W$ в этой работе удобно рассмотреть $\|\cdot\|_{L_p(\Omega_T)}$. Компактность вложения $W \subset L_p(\Omega_T)$ известна (см., например, (2.16) из [1, гл. 3, п. 2] и теорему 5.1 из [1, гл. 1, п. 5]).

[1)] Свойство коэрцитивности обычно используют при доказательстве псевдомонотонности на $W$ операторов, если вместо алгебраического условия сильной эллиптичности рассматривать условие эллиптичности. Заметим также, что чаще всего при локализации решения задачи на некоем множестве используют лемму об остром угле. При этом свойство коэрцитивности весьма удобно, но не является единственным вариантом.

**Лемма 4.1.** *Пусть $p \in [2,\infty)$, справедливы условия* (A0), (A1), *а также*

**(A3) Условие сильной эллиптичности:** *для всех $s$, п.в. $(x,t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0,T]$ и любых $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ таких, что $\eta_{l0} = \zeta_{l0} \neq 0$, существует константа $\widehat{\Upsilon} > 0$ такая, что справедлива оценка*[2)]

$$\sum_{1\le l\le N(s)} \sum_{1\le i\le n} \big(A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}) - A_i(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot})\big)\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\big)_l$$

$$\ge \widehat{\Upsilon} \sum_{1\le l\le N(s)} \sum_{1\le i\le n} |\zeta_{li}-\eta_{li}|^p. \tag{25}$$

**(A4)** *Функции $A_i(x,t,\xi)$ $(i=\overline{1,n})$ локально липшицевы по $\xi_0$, $A_0(x,t,\xi)$ локально липшецева по $\xi_j$ $(j=\overline{0,n})$, т. е. существуют $\varepsilon>0$ и функция типа Каратеодори $\Psi$ ($\Psi(x,t,\xi)$ измерима по $x$, $t$ для всех $\xi\in\mathbb{R}^{n+1}$ и непрерывна по $\xi\in\mathbb{R}^{n+1}$ для п.в. $(x,t)\in\overline{\Omega_T}$) такие, что для любых $\delta\in\mathbb{R}^{n+1}$ $(|\delta| = \sum\limits_{0\le j\le n}|\delta_j| < \varepsilon)$*

$$|A_i(x,t,\xi+\delta) - A_i(x,t,\xi)| \le \Psi(x,t,\xi)|\delta|, \tag{26}$$

$$|\Psi(x,t,\xi)| \le g_\Psi(x,t) + \widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} |\xi_k|^{p-2}, \tag{27}$$

*где $\widehat{\Psi}>0$, $g_\Psi \in L_{q'}(\Omega_T)$, $q' = p/(p-2)$ при $p>2$ и $q'=\infty$ при $p=2$.*

*Тогда оператор $A_R : L_p\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)\big) \to L_q\big(0,T;W_q^{-1}(Q)\big)$, заданный формулой* (19), *обладает $(\mathscr{V};W)$-полуограниченной вариацией.*

При доказательстве леммы 4.1 нам понадобятся повторяющиеся вычисления. Проведем их в абстрактной лемме.

**Лемма 4.2.** *В силу непрерывности функции $\Psi$ из условий* (26), (27) *следует, что для всех $\xi,\widehat{\xi}\in\mathbb{R}^{n+1}$ $(\xi_j \ne \widehat{\xi}_j$, $\xi_k = \widehat{\xi}_k$ для $k\ne j)$*

$$|A_i(x,t,\widehat{\xi}) - A_i(x,t,\xi)| \le \Big(\widehat{\Psi}|\widehat{\xi}_j|^{p-2} + \widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\xi_k|^{p-2} + g_\Psi(x,t)\Big)|\widehat{\xi}_j - \xi_j|. \tag{28}$$

Доказательство. Очевидно, что существуют $n_2\in\mathbb{N}$ и $\delta\in\mathbb{R}^{n+1}$ $(|\delta|<\varepsilon)$ такие, что $\xi = \widehat{\xi} + n_2\delta$. Тогда

$$|A_i(x,t,\widehat{\xi}) - A_i(x,t,\xi)| = \Big|\sum_{1\le k\le n_2}\big(A_i(x,t,\widehat{\xi}+k\delta) - A_i(x,t,\widehat{\xi}+(k-1)\delta)\big)\Big|$$

$$\le \sum_{1\le k\le n_2} |A_i(x,t,\widehat{\xi}+k\delta) - A_i(x,t,\widehat{\xi}+(k-1)\delta)|.$$

Воспользуемся оценкой (26):

$$|A_i(x,t,\widehat{\xi}+k\delta) - A_i(x,t,\widehat{\xi}+(k-1)\delta)| \le \Psi(x,t,\widehat{\xi}+(k-1)\widehat{\delta})|\delta|$$

$$= \Psi\left(x,t,\widehat{\xi} + \frac{k-1}{n_2}(\xi-\widehat{\xi})\right)\frac{|\widehat{\xi}-\xi|}{n_2},$$

т. е.

$$|A_i(x,t,\widehat{\xi}) - A_i(x,t,\xi)| \le \frac{1}{n_2}\sum_{1\le k\le n_2}\Psi\left(x,t,\widehat{\xi}+\frac{k-1}{n_2}(\xi-\widehat{\xi})\right)|\widehat{\xi}-\xi|.$$

[2)]Заметим, что в оценке (A3) участвуют только старшие производные. Поэтому из этой оценки нельзя получить оценку типа (A2).

Переходя к пределу при $n_2 \to \infty$, в силу непрерывности функции $\Psi$ получаем, что

$$|A_i(x,t,\widehat{\xi}) - A_i(x,t,\xi)| \le \int\limits_0^1 \Psi(x,t,\widehat{\xi} + \tau(\xi - \widehat{\xi}))\,d\tau|\xi - \widehat{\xi}|. \qquad (29)$$

Оценим интеграл по $\tau$ из формулы (29). Для этого подставим в (29) оценку (27) и используем известное неравенство

$$\int\limits_0^1 |a + \tau(b-a)|^\alpha d\tau \le |a|^\alpha + |b|^\alpha$$

при $\alpha \ge 0$:

$$\int\limits_0^1 \Psi(x,t,\widehat{\xi} + \tau(\xi - \widehat{\xi}))\,d\tau \le \int\limits_0^1 \Big(\widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} |\widehat{\xi}_k + \tau(\xi_k - \widehat{\xi}_k)|^{p-2} + g_\Psi(x,t)\Big)\,d\tau$$
$$\le \widehat{\Psi}|\widehat{\xi}_j|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} |\xi_k|^{p-2} + g_\Psi(x,t).$$

Подставив это выражение в (29), получаем оценку (28). $\square$

Доказательство леммы 4.1. Обозначим $w = R_Q u$ и $v = R_Q y$, $u, y \in L_p\big(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)\big)$, причем в силу невырожденности оператора $R_Q$ существует обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$ (см. лемму 2.2). По определению оператора $A_R$ и в силу формулы (15)

$$\begin{aligned}
&\langle A_R u - A_R y, u - y\rangle \\
&\quad= \sum_{0\le i\le n} \int\limits_{\Omega_T} (A_i(x,t,R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x,t,R_Q y, \nabla R_Q y))\partial_i(u-y)\,dxdt \\
&\quad= \sum_{0\le i\le n} \int\limits_{\Omega_T} (A_i(x,t,w,\nabla w) - A_i(x,t,w,\nabla v))R_Q^{-1}\partial_i(w-v)\,dxdt \\
&= \sum_s \sum_{0\le i\le n} \int\limits_0^T \int\limits_{\bigcup_l Q_{sl}} P_s(A_i(x,t,w,\nabla w) - A_i(x,t,v,\nabla v))U_s^{-1}R_s^{-1}U_sP_s\partial_i(w-v)\,dxdt \\
&= \sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} \sum_{0\le i\le n} (U_sP_s(A_i(x,t,w,\nabla w) - A_i(x,t,v,\nabla v)), R_s^{-1}U_sP_s\partial_i(w-v))\,dxdt \\
&= \sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} (I_{s1} + I_{s2} + I_{s3})\,dxdt, \qquad (30)
\end{aligned}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{N(s)}$. Очевидно, что при $u(x,t) = y(x,t)$ для почти всех $(x,t) \in \Omega_T$ значение данного интеграла неотрицательно. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $u(x,t) \ne y(x,t)$ для почти всех $(x,t) \in \Omega_T$. Очевидно, что при этом $w(x,t) \ne v(x,t)$ и существует $\lambda \in [0,1]$ такое, что $\lambda w(x,t) + (1-\lambda)v(x,t) \ne 0$ для почти всех $(x,t) \in \Omega_T$, возможно, $\lambda = \lambda(x,t)$.

Введем матрицы порядка $N(s)\times(n+1)$:

$$\zeta=(U_sP_sw, U_sP_s\partial_1 w\dots, U_sP_s\partial_n w),\quad \eta=(U_sP_sv, U_sP_s\partial_1 v\dots, U_sP_s\partial_n v),$$

а также матрицы $\widehat{\zeta}$ и $\widehat{\eta}$ такие, что для некоторого $\lambda\in[0,1]$

$$\widehat{\zeta}_{\cdot i}=\zeta_{\cdot i},\quad \widehat{\eta}_{\cdot i}=\eta_{\cdot i}\quad \forall i=1,\dots,n, \tag{31}$$

$$\widehat{\zeta}_{l0}=\widehat{\eta}_{l0}=\lambda\zeta_{l0}+(1-\lambda)\eta_{l0}\neq 0\quad \forall l=1,\dots,N(s), \tag{32}$$

$\lambda=\lambda(x,t,l)$. Сначала оценим часть подынтегральной суммы правой части (30):

$$\begin{aligned}
I_{s1}+I_{s2}&=\sum_{1\le i\le n}\big(U_sP_s(A_i(x,t,w,\nabla w)-A_i(x,t,v,\nabla v)),R_s^{-1}U_sP_s\partial_i(w-v)\big)\\
&=\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}(A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}))\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\big)_l\\
&=\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}(A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot}))\big(R_s^{-1}(\widehat{\zeta}_{\cdot i}-\widehat{\eta}_{\cdot i})\big)_l\\
&+\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}(A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot}))\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\big)_l\\
&+\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}(A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}))\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\big)_l.
\end{aligned}\tag{33}$$

Первую сумму в правой части (33) оценим с помощью (25):

$$\begin{aligned}
I_{s1}&=\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}(A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot}))\big(R_s^{-1}(\widehat{\zeta}_{\cdot i}-\widehat{\eta}_{\cdot i})\big)_l\\
&\ge\widehat{\Upsilon}\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}|\widehat{\zeta}_{li}-\widehat{\eta}_{li}|^p=\widehat{\Upsilon}\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}|\partial_i w(x+h_{sl},t)-\partial_i v(x+h_{sl},t)|^p,
\end{aligned}$$

т. е.

$$\sum_s\int_0^T\int_{Q_{s1}}I_{s1}\,dxdt\ge\widehat{\Upsilon}\|w-v\|^p_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q))}. \tag{34}$$

Рассмотрим вторую и третью суммы в правой части (33):

$$\begin{aligned}
|I_{s2}|&\le\Big|\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}(A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot}))\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\big)_l\\
&+\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}(A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}))\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\big)_l\Big|\\
&\le\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}|A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot})|\big|\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\big)_l\big|\\
&+\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}|A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot})|\big|\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\big)_l\big|.
\end{aligned}\tag{35}$$

Исходя из условия липшицевости (A4), воспользуемся оценкой (28) (см. лемму 4.2):

$$\begin{aligned}
&|A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot})|\\
&\qquad\le\Big(\widehat{\Psi}|\widehat{\zeta}_{l0}|^{p-2}+\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\zeta_{lk}|^{p-2}+g_\Psi(x+h_{sl},t)\Big)|\zeta_{l0}-\widehat{\zeta}_{l0}|.
\end{aligned}\tag{36}$$

Аналогично для второй группы слагаемых в правой части (35) имеем

$$
\begin{aligned}
&|A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot}) - A_i(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot})| \\
&\qquad \le \Big(\widehat{\Psi}|\widehat{\eta}_{l0}|^{p-2} + \widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\eta_{lk}|^{p-2} + g_\Psi(x+h_{sl},t)\Big)|\eta_{l0}-\widehat{\eta}_{l0}|. \quad (37)
\end{aligned}
$$

Подставим (36) и (37) в (35); учитывая, что $\eta_{l0}-\widehat{\eta}_{l0} = \lambda(\eta_{l0}-\zeta_{l0})$ и $\zeta_{l0}-\widehat{\zeta}_{l0} = (1-\lambda)(\zeta_{l0}-\eta_{l0})$ (см. (32)), получаем оценку

$$
\begin{aligned}
|I_{s2}| \le &\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}\Big(\widehat{\Psi}|\lambda\zeta_{l0}+(1-\lambda)\eta_{l0}|^{p-2} + (1-\lambda)\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\zeta_{lk}|^{p-2} \\
&+ \lambda\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\eta_{lk}|^{p-2} + g_\Psi(x+h_{sl},t)\Big)|\zeta_{l0}-\eta_{l0}|\big|\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\big)_l\big|. \quad (38)
\end{aligned}
$$

Заметим, что $|\lambda\zeta_{l0}+(1-\lambda)\eta_{l0}|^\alpha \le |\zeta_{l0}|^\alpha + |\eta_{l0}|^\alpha$ для всех $\lambda\in[0,1]$ при $\alpha\ge 0$, а также в силу ограниченности и невырожденности матриц $R_s^{-1}$ для некоторого $c_{13}>0$

$$
\sum_{1\le i\le n}\big|\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\big)_l\big| \le c_{13}\sum_{1\le i\le n}|\zeta_{li}-\eta_{li}|.
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
|I_{s2}| \le c_{13}&\sum_{1\le l\le N(s)}\Big(\widehat{\Psi}|\zeta_{l0}|^{p-2} + \widehat{\Psi}|\eta_{l0}|^{p-2} + (1-\lambda)\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\zeta_{lk}|^{p-2} \\
&+ \lambda\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\eta_{lk}|^{p-2} + g_\Psi(x+h_{sl},t)\Big)|\zeta_{l0}-\eta_{l0}|\sum_{1\le i\le n}|\zeta_{li}-\eta_{li}| \\
\le c_{13}&\sum_{1\le l\le N(s)}\Big(\widehat{\Psi}|\zeta_{l0}|^{p-2} + \widehat{\Psi}|\eta_{l0}|^{p-2} + \widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\zeta_{lk}|^{p-2} + \widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\eta_{lk}|^{p-2} \\
&+ g_\Psi(x+h_{sl},t)\Big)|\zeta_{l0}-\eta_{l0}|\sum_{1\le i\le n}|\zeta_{li}-\eta_{li}|. \quad (39)
\end{aligned}
$$

Перейдем к переменным $w$ и $v$:

$$
\begin{aligned}
\sum_s\int_0^T\int_{Q_{s1}}|I_{s2}|\,dxdt \le{}& c_{13}\Big(\widehat{\Psi}\|w\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} + \widehat{\Psi}\|v\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} + \widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}\|\partial_i w\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} \\
&+ \widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}\|\partial_i v\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} + \|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)}\Big)\|w-v\|_{L_p(\Omega_T)}\sum_{1\le i\le n}\|\partial_i w-\partial_i v\|_{L_p(\Omega_T)} \\
&\le c_{13}(c_{14}r^{p-2} + \|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)})\|w-v\|_{L_p(\Omega_T)}\sum_{1\le i\le n}\|\partial_i w-\partial_i v\|_{L_p(\Omega_T)}, \quad (40)
\end{aligned}
$$

где $\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \le r$ и $\|y\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \le r$. В этой оценке учтено, что

$$
\|w\|_{L_p(\Omega_T)} = \|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)} \le c_{15}\|u\|_{L_p(\Omega_T)}
$$

(см. (13)) и

$$
\|u\|_{L_p(\Omega_T)} \le c_{16}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \le c_{16}r
$$

(неравенство Фридрихса), для $v = R_Q y$ оценки аналогичны. Для сокращения записи введем функцию $\widehat{c}_1(r) := c_{13}(c_{14}r^{p-2} + \|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)})$. В силу неравенства Юнга из (40) следует, что

$$\sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} |I_{s2}|\,dxdt \le \frac{\widehat{\Upsilon}}{p}\|w-v\|^p_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q))} + \frac{\widehat{c}_1^{\,q}(r)}{q\widehat{\Upsilon}^{q/p}}\|w-v\|^q_{L_p(\Omega_T)}. \tag{41}$$

Осталось оценить слагаемое при $i = 0$ в подынтегральной сумме правой части (30):

$$\begin{aligned} |I_{s3}| &\le \big|\big(U_sP_s(A_0(x,t,w,\nabla w) - A_0(x,t,v,\nabla v)), R_s^{-1}U_sP_s(w-v)\big)\big| \\ &= \Big|\sum_{1\le l\le N(s)} (A_0(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}) - A_0(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}))\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0}-\eta_{\cdot 0})\big)_l\Big| \\ &\le \sum_{1\le l\le N(s)} |A_0(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}) - A_0(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot})|\big|\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0}-\eta_{\cdot 0})\big)_l\big|. \end{aligned} \tag{42}$$

Исходя из условия липшицевости (A4), для первых множителей суммы произведений в правой части (42) воспользуемся покоординатно оценкой (28) (см. лемму 4.2). Тогда

$$\begin{aligned} &|A_0(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}) - A_0(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot})| \\ &\qquad = |A_0(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}) - A_0(x+h_{sl},t,\eta_{l0},\zeta_{l1},\dots,\zeta_{ln})| \\ &\quad + |A_0(x+h_{sl},t,\eta_{l0},\zeta_{l1},\dots,\zeta_{ln}) - A_0(x+h_{sl},t,\eta_{l0},\eta_{l1},\zeta_{l2},\dots,\zeta_{ln})| \\ &\quad + \dots + |A_0(x+h_{sl},t,\eta_{l0},\dots,\eta_{l,n-1},\zeta_{ln}) - A_0(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot})| \\ &\quad \le \sum_{0\le k\le n}\Big(\widehat{\Psi}\sum_{0\le j\le k}|\eta_{lj}|^{p-2} + \widehat{\Psi}\sum_{k\le j\le n}|\zeta_{lj}|^{p-2} + g_\Psi(x,t)\Big)|\zeta_{lk}-\eta_{lk}| \\ &\quad \le \Big(\widehat{\Psi}\sum_{0\le j\le n}|\zeta_{lj}|^{p-2} + \Psi\sum_{0\le j\le n}|\eta_{lj}|^{p-2} + g_\Psi(x,t)\Big)\sum_{0\le k\le n}|\zeta_{lk}-\eta_{lk}| \\ &\qquad \equiv \Big(\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\zeta_{lk}|^{p-2} + \widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\eta_{lk}|^{p-2} + g_\Psi(x,t)\Big)|\zeta_{l\cdot}-\eta_{l\cdot}|. \end{aligned}$$

Подставим полученные оценки в правую часть (42):

$$|I_{s3}| \le \sum_{1\le l\le N(s)}\Big(\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}(|\zeta_{lk}|^{p-2}+|\eta_{lk}|^{p-2}) + g_\Psi(x+h_{sl},t)\Big)|\zeta_{l\cdot}-\eta_{l\cdot}|\big|\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0}-\eta_{\cdot 0})\big)_l\big|.$$

Вернемся к функциям $w, v, u$ и $y$ и воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\begin{aligned} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} |I_{s3}|\,dxdt &\le \sum_s \sum_{1\le l\le N(s)} \sum_{0\le j\le n} \int_0^T \int_{Q_{s1}} \Big(\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\partial_k v(x+h_{sl},t)|^{p-2} \\ &+ \sum_{0\le k\le n}\sum_{0\le k\le n}|\partial_k w(x+h_{sl},t)|^{p-2} + g_\Psi(x+h_{sl},t)\Big)|\partial_j w(x+h_{sl},t) - \partial_j v(x+h_{sl},t)| \\ &\qquad \times |u(x+h_{sl},t) - y(x+h_{sl},t)|\,dxdt \\ &= \sum_{0\le j\le n}\int_{\Omega_T}\Big(\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\partial_k v|^{p-2} + \widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\partial_k w|^{p-2} + g_\Psi\Big)|\partial_j w - \partial_j v||u-y|\,dxdt \end{aligned}$$

$$\le \sum_{0\le j\le n} \Big\| \widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} |\partial_k v|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} |\partial_k w|^{p-2} + g_\Psi \Big\|_{L_{q'}(\Omega_T)} \\ \times \|\partial_j w - \partial_j v\|_{L_p(\Omega_T)} \|u-y\|_{L_p(\Omega_T)}.$$

Заметим, что

$$\Big\| \widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} |\partial_k v|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} |\partial_k w|^{p-2} + g_\Psi \Big\|_{L_{q'}(\Omega_T)} \\ \le c_{17}\big(\|v\|^{p-2}_{L_p(0,T;W^1_p(Q))} + \|w\|^{p-2}_{L_p(0,T;W^1_p(Q))}\big) + \|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)} \\ \le c_{18} r^{p-2} + \|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)} =: \widehat{c}_2(r).$$

Здесь, как и выше, учтены оценки $\|w\|_{L_p(\Omega_T)} = \|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)} \le c_{15}\|u\|_{L_p(\Omega_T)}$ (см. (13)) и $\|u\|_{L_p(\Omega_T)} \le c_{16}\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \le c_{16} r$ (неравенство Фридрихса), а также аналогичные оценки для $v = R_Q y$. Осталось воспользоваться неравенством Гёльдера:

$$\sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} |I_{s3}|\,dxdt \le \widehat{c}_2(r)\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)} \sum_{0\le j\le n} \|\partial_j w - \partial_j v\|_{L_p(\Omega_T)} \\ = \widehat{c}_2(r)\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)}\|w-v\|_{L_p(\Omega_T)} + \widehat{c}_2(r)\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)}\|w-v\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \\ \le c_{15}\widehat{c}_2(r)\|u-y\|^2_{L_p(\Omega_T)} + \frac{\widehat{\Upsilon}}{p}\|w-v\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} + \frac{\widehat{c}_2^{\,q}(r)}{q\widehat{\Upsilon}^{q/p}}\|u-y\|^q_{L_p(\Omega_T)}. \quad (43)$$

Подставляя (34), (41) и (43) в (32), получим

$$\langle A_R u - A_R y, u-y\rangle \ge \sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} I_{s1} - |I_{s2}| - |I_{s3}|\,dxdt \\ \ge \Big(\widehat{\Upsilon} - 2\frac{\widehat{\Upsilon}}{p}\Big)\|w-v\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - \frac{\widehat{c}_1^{\,q}(r)}{q\widehat{\Upsilon}^{q/p}}\|w-v\|^q_{L_p(\Omega_T)} \\ - c_{15}\widehat{c}_2(r)\|u-y\|^2_{L_p(\Omega_T)} - \frac{\widehat{c}_2^{\,q}(r)}{q\widehat{\Upsilon}^{q/p}}\|u-y\|^q_{L_p(\Omega_T)} \\ \ge -c_{15}\widehat{c}_2(r)\|u-y\|^2_{L_p(\Omega_T)} - \frac{c_{15}^q\widehat{c}_1^{\,q}(r) + \widehat{c}_2^{\,q}(r)}{q\widehat{\Upsilon}^{q/p}}\|u-y\|^q_{L_p(\Omega_T)} \\ =: -C(r;\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)}), \quad (44)$$

поскольку $(1-\frac{2}{p})\widehat{\Upsilon}(u,y) \ge 0$. Так как $2>1$, $q>1$ и $W \subset L_p(\Omega_T)$ компактно, то $A_R$ — оператор с $(\mathscr{V};W)$-полуограниченной вариацией. $\square$

При рассмотрении квазилинейных дифференциально-разностных операторов оценка (25) в условии (A3) может быть заменена на (45). Преимуществом использования оценки (45) является то, что мы работаем с прямыми матрицами $R_s$, а не с обратными $R_s^{-1}$.

**Лемма 4.3.** *Пусть* $2 \le p < \infty$, $R_s^* + R_s > 0$ *и справедливо условие* (A1). *Пусть также оператор* $A : L_p\big(0,T;W^1_p(Q)\big) \to L_q\big(0,T;W^{-1}_q(Q)\big)$ *задан диффе-*

*ренцируемыми по $\xi_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, \dots, n)$ функциями $A_i(x, t, \xi)$, которые измеримы по $(x, t) \in \Omega_T$, а также справедливы оценки*

$$\sum_{1\le m,l\le N(s)} \sum_{1\le i,j\le n} r^s_{ml} A_{ij}(x + h_{sm}, t, \zeta_{m\cdot})\eta_{lj}\eta_{mi} \ge c_{18} \sum_{1\le m\le N(s)} \sum_{1\le i\le n} |\zeta_{mi}|^{p-2}|\eta_{mi}|^2, \tag{45}$$

$$|A_{ij}(x, t, \xi)| \le c_{19} \sum_{0\le k\le n} |\xi_k|^{p-2} + g_1(x, t), \tag{46}$$

*где* $A_{ij}(x, t, \xi) := \frac{\partial A_i(x,t,\xi)}{\partial \xi_j}$, $c_{18}, c_{19} > 0$ *не зависят от* $(x, t) \in \Omega_T$, $g_1 \in L_{q/(q-2)}(\Omega_T)$, $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$, $\zeta_{m\cdot} = \{\zeta_{m0}, \zeta_{m1}, \dots, \zeta_{mn}\}$, $m = 1, \dots, N(s)$.

*Тогда оператор* $A_R : L_p\big(0, T; \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)\big) \to L_q\big(0, T; W^{-1}_q(Q)\big)$, *заданный формулой* (19), *обладает* $(\mathscr{V}; W)$*-полуограниченной вариацией.*

Доказательство. По условию леммы $R^*_s + R_s > 0$, а также справедливы условие (A1) и оценка (45). Это означает, что справедлива оценка (34), полное доказательство см. в теореме 1 в [12]. Поскольку из оценки (46) следует выполнение условия липшицевости (A4), дальнейшее доказательство аналогично приведенному выше в лемме 4.1. $\square$

Алгебраическое условие сильной эллиптичности может быть выбрано неоднозначно. Другое алгебраическое условие сильной эллиптичности для симметрических операторов исследовано в [18].

Замечание 4.1. Если $\widetilde{W} = \big\{u \in L_p\big(0, T; \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)\big) : \partial_t u \in L_2(\Omega_T)\big\}$, то построенная в (44) непрерывная функция

$$C(r; \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}) = c_{15}\widehat{c}_2(r)\|u - y\|^2_{L_p(\Omega_T)} + \frac{c^q_{15}\widehat{c}^q_1(r) + \widehat{c}^q_2(r)}{q\widehat{\Upsilon}^{q/p}}\|u - y\|^q_{L_p(\Omega_T)}$$

такова, что $\tau^{-1}C(r, \tau h) \to +0$ при $\tau \to 0$ для всех $r, h > 0$, а норма $\|\cdot\|_{L_p(\Omega_T)}$ компактна относительно $\|\cdot\|_{\widetilde{W}}$ и непрерывна относительно $\|\cdot\|_{\mathscr{V}}$. Таким образом, при $p \in [2, \infty)$ и выполнении условий (A0), (A1), (A3) и (A4) (либо условий (A0), (A1), (45) и (46)) оператор $\widetilde{A}_R : \mathscr{D}(\widetilde{A}_R) \subset L_p\big(0, T; \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)\big) \to L_2(\Omega_T)$, заданный в (23), является оператором с $(\mathscr{V}; \widetilde{W})$-полуограниченной вариацией.

## § 5. Операторы с $(\mathscr{V}; W)$-полуограниченной вариацией при $p \in (1, 2)$

При $p \in (1, 2)$ также можно определить условия, гарантирующие принадлежность оператора $A_R : \mathscr{V} \to \mathscr{V}^*$ классу операторов с $(\mathscr{V}; W)$-полуограниченной вариацией. Но поскольку мы хотим рассматривать только интегрируемые функции, то вместо условия локальной липшицевости функций $A_i(x, t, \xi)$ необходимо рассмотреть их локальную гёльдеровость при сохранении условия сильной эллиптичности.

**(A5)** Существует $\rho$ такая, что $(p - 1)/p < \rho \le p - 1$, а также функции $A_i(x, t, \xi)$ $(i = \overline{1, n})$ локально гёльдеровы по $\xi_0$, $A_0(x, t, y, \xi)$ локально гёльдерова по $\xi_j$ $(j = \overline{0, n})$ в степени $\rho$ в следующем смысле[3)]: для любых $\xi, \widehat{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1}$ $(\xi_j \ne \widehat{\xi}_j$,

[3)] Ср. с оценкой из леммы 4.2, соответствующей локальной липшицевости (A4) при $p \in [2, \infty)$.

$\xi_k = \widehat{\xi}_j$ для $k \neq j$)

$$|A_i(x,t,\widehat{\xi}) - A_i(x,t,\xi)| \leq \Big(\Psi|\widehat{\xi}_j|^{p-1-\rho} + \Psi \sum_{0\leq k\leq n} |\xi_k|^{p-1-\rho} + g_\Psi(x,t)\Big)|\widehat{\xi}_j - \xi_j|^\rho. \quad (47)$$

где $\widehat{\Psi} > 0$, $g_\Psi \in L_{q'}(\Omega_T)$, $q' = p/(p-1-\rho)$ при $\rho < p-1$ и $q' = \infty$ при $\rho = p-1$.

**Лемма 5.1.** *Пусть* $p \in (1,2)$, *справедливы условия* (A0), (A1), (A3) *и* (A5). *Тогда оператор* $A_R : \mathscr{V} = L_p\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)\big) \cap L_2(\Omega_T) \to \mathscr{V}^*$, *заданный формулой* (19), *обладает* $(\mathscr{V};W)$*-полуограниченной вариацией.*

Доказательство будем проводить по схеме доказательства леммы 4.1, останавливаясь на отличиях в формулах.

Обозначим $w = R_Q u$ и $v = R_Q y$, $u, y \in \mathscr{V}$, причем в силу невырожденности оператора $R_Q$ существует обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(\Omega_T) \to L_p(\Omega_T)$ (см. лемму 2.2). Введем матрицы

$$\zeta = (U_sP_sw, U_sP_s\partial_1 w \ldots, U_sP_s\partial_n w), \quad \eta = (U_sP_sv, U_sP_s\partial_1 v \ldots, U_sP_s\partial_n v),$$

а также матрицы $\widehat{\zeta}$ и $\widehat{\eta}$ такие, что для некоторого $\lambda \in [0,1]$

$$\widehat{\zeta}_{\cdot i} = \zeta_{\cdot i}, \quad \widehat{\eta}_{\cdot i} = \eta_{\cdot i} \quad \forall i = 1,\ldots,n, \quad (48)$$

$$\widehat{\zeta}_{l0} = \widehat{\eta}_{l0} = \lambda\zeta_{l0} + (1-\lambda)\eta_{l0} \neq 0 \quad \forall l = 1,\ldots,N(s). \quad (49)$$

Как показано в (30),

$$\langle A_R u - A_R y, u - y\rangle = \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} (I_{s1} + I_{s2} + I_{s3})\, dxdt, \quad (50)$$

где

$$I_{s1} = \sum_{1\leq l\leq N(s)} \sum_{1\leq i\leq n} (A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot}) - A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot}))\big(R_s^{-1}(\widehat{\zeta}_{\cdot i} - \widehat{\eta}_{\cdot i})\big)_l,$$

$$I_{s2} = \sum_{1\leq l\leq N(s)} \sum_{1\leq i\leq n} (A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}) - A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot}))\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i})\big)_l$$
$$+ \sum_{1\leq l\leq N(s)} \sum_{1\leq i\leq n} (A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot}) - A_i(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}))\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i})\big)_l,$$

$$I_{s3} = \sum_{1\leq l\leq N(s)} (A_0(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}) - A_0(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}))\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0} - \eta_{\cdot 0})\big)_l,$$

причем, как показано в (34),

$$\sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} I_{s1}\, dxdt \geq \widehat{\Upsilon}\|w - v\|^p_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q))}. \quad (51)$$

Рассмотрим $I_{s2}$:

$$|I_{s2}| \leq \Big| \sum_{1\leq l\leq N(s)} \sum_{1\leq i\leq n} (A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}) - A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot}))\big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i})\big)_l$$

$$+\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}\left(A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot})\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\Big|$$

$$\le\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}\left|A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot})\right|\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\right|$$

$$+\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}\left|A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot})\right|\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\right|. \quad (52)$$

Исходя из условия локальной гёльдеровости (A5), имеем

$$|A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\zeta}_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot})|$$
$$\le\Big(\widehat{\Psi}|\widehat{\zeta}_{l0}|^{p-1-\rho}+\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\zeta_{lk}|^{p-1-\rho}+g_\Psi(x+h_{sl},t)\Big)|\zeta_{l0}-\widehat{\zeta}_{l0}|^\rho. \quad (53)$$

Аналогично

$$|A_i(x+h_{sl},t,\widehat{\eta}_{l\cdot})-A_i(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot})|$$
$$\le\Big(\widehat{\Psi}|\widehat{\eta}_{l0}|^{p-1-\rho}+\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\eta_{lk}|^{p-1-\rho}+g_\Psi(x+h_{sl},t)\Big)|\eta_{l0}-\widehat{\eta}_{l0}|^\rho. \quad (54)$$

Подставим (53) и (54) в (52). Тогда, учитывая, что $\eta_{l0}-\widehat{\eta}_{l0}=\lambda(\eta_{l0}-\zeta_{l0})$ и $\zeta_{l0}-\widehat{\zeta}_{l0}=(1-\lambda)(\zeta_{l0}-\eta_{l0})$ (см. (49)), получаем оценку

$$|I_{s2}|\le\sum_{1\le l\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}\Big(\widehat{\Psi}|\lambda\zeta_{l0}+(1-\lambda)\eta_{l0}|^{p-1-\rho}+(1-\lambda)\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\zeta_{lk}|^{p-1-\rho}$$
$$+\lambda\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\eta_{lk}|^{p-1-\rho}+g_\Psi(x+h_{sl},t)\Big)|\zeta_{l0}-\eta_{l0}|^\rho\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\right|. \quad (55)$$

Заметим, что $|\lambda\zeta_{l0}+(1-\lambda)\eta_{l0}|^\alpha\le|\zeta_{l0}|^\alpha+|\eta_{l0}|^\alpha$ для всех $\lambda\in[0,1]$ при $\alpha>0$. В силу ограниченности и невырожденности матриц $R_s^{-1}$ для некоторого $c_{13}>0$ получаем

$$\sum_{1\le i\le n}\left|\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l\right|\le c_{13}\sum_{1\le i\le n}|\zeta_{li}-\eta_{li}|.$$

Следовательно,

$$|I_{s2}|\le c_{13}\sum_{1\le l\le N(s)}\Big(\widehat{\Psi}|\zeta_{l0}|^{p-1-\rho}+\widehat{\Psi}|\eta_{l0}|^{p-1-\rho}+\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\zeta_{lk}|^{p-1-\rho}$$
$$+\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}|\eta_{lk}|^{p-1-\rho}+g_\Psi(x+h_{sl},t)\Big)|\zeta_{l0}-\eta_{l0}|^\rho\sum_{1\le i\le n}|\zeta_{li}-\eta_{li}|. \quad (56)$$

Перейдем к переменным $w$ и $v$:

$$\sum_s\int_0^T\int_{Q_{s1}}|I_{s2}|\,dxdt\le c_{13}\Big(\widehat{\Psi}\|w\|^{p-1-\rho}_{L_p(\Omega_T)}+\widehat{\Psi}\|v\|^{p-1-\rho}_{L_p(\Omega_T)}+(1-\lambda)\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}\|\partial_i w\|^{p-1-\rho}_{L_p(\Omega_T)}$$
$$+\lambda\widehat{\Psi}\sum_{0\le k\le n}\|\partial_i v\|^{p-1-\rho}_{L_p(\Omega_T)}+\|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)}\Big)\|w-v\|^\rho_{L_p(\Omega_T)}\sum_{1\le i\le n}\|\partial_i w-\partial_i v\|_{L_p(\Omega_T)}$$
$$\le c_{13}(c_{14}r^{p-1-\rho}+\|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)})\|w-v\|^\rho_{L_p(\Omega_T)}\sum_{1\le i\le n}\|\partial_i w-\partial_i v\|_{L_p(\Omega_T)}, \quad (57)$$

где $\|u\|_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q))} \le r$ и $\|y\|_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q))} \le r$. В этой оценке учтено, что

$$\|w\|_{L_p(\Omega_T)} = \|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)} \le c_{15}\|u\|_{L_p(\Omega_T)}$$

(см. (13)) и

$$\|u\|_{L_p(\Omega_T)} \le c_{16}\|u\|_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q))} \le c_{16} r$$

(неравенство Фридрихса), для $v = R_Q y$ оценки аналогичны. Для сокращения записи введем функцию $\widehat{c}_3(r) := c_{13}(c_{14} r^{p-1-\rho} + \|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)})$. В силу неравенства Юнга из (57) следует, что

$$\sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} |I_{s2}|\, dxdt \le \frac{\widehat{\Upsilon}}{p} \|w - v\|^p_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q))} + \frac{\widehat{c}_3^{\,q}(r)}{q \widehat{\Upsilon}^{q/p}} \|w - v\|^{\rho q}_{L_p(\Omega_T)}. \tag{58}$$

Осталось оценить $I_{s3}$, опять применяя условие локальной гёльдеровости (47):

$$\begin{aligned} |I_{s3}| \le \sum_{1\le l\le N(s)} &|A_0(x+h_{sl}, t, \zeta_{l\cdot}) - A_0(x+h_{sl}, t, \eta_{l\cdot})| \big| \big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0} - \eta_{\cdot 0})\big)_l \big| \\ &\le \sum_{1\le l\le N(s)} \Big( \widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} (|\zeta_{lk}|^{p-1-\rho} + |\eta_{lk}|^{p-1-\rho}) + g_\Psi(x+h_{sl}, t) \Big) \\ &\qquad \times \sum_{0\le j\le n} |\zeta_{lj} - \eta_{lj}|^\rho \big| \big(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot 0} - \eta_{\cdot 0})\big)_l \big|. \end{aligned} \tag{59}$$

Вернемся к функциям $w, v, u$ и $y$ и воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\begin{aligned} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} |I_{s3}|\, dxdt &\le \sum_s \sum_{1\le l\le N(s)} \sum_{0\le j\le n} \int_0^T \int_{Q_{s1}} \Big( \widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} |\partial_k v(x+h_{sl}, t)|^{p-1-\rho} \\ &\quad + \sum_{0\le k\le n} |\partial_k w(x+h_{sl}, t)|^{p-1-\rho} + g_\Psi(x+h_{sl}, t) \Big) \\ &\quad \times |\partial_j w(x+h_{sl}, t) - \partial_j v(x+h_{sl}, t)|^\rho |u(x+h_{sl}, t) - y(x+h_{sl}, t)|\, dxdt \\ = \sum_{0\le j\le n} \int_{\Omega_T} \Big( \widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} |\partial_k v|^{p-1-\rho} &+ \widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} |\partial_k w|^{p-1-\rho} + g_\Psi \Big) |\partial_j w - \partial_j v|^\rho |u - y|\, dxdt \\ &\le \Big\| \widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} |\partial_k v|^{p-1-\rho} + \widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} |\partial_k w|^{p-1-\rho} + g_\Psi \Big\|_{L_{q'}(\Omega_T)} \\ &\qquad \times \sum_{0\le j\le n} \|\partial_j w - \partial_j v\|^\rho_{L_p(\Omega_T)} \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \Big\| \widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} |\partial_k v|^{p-1-\rho} &+ \widehat{\Psi} \sum_{0\le k\le n} |\partial_k w|^{p-1-\rho} + g_\Psi \Big\|_{L_{q'}(\Omega_T)} \\ &\le c_{17} \big( \|v\|^{p-1-\rho}_{L_p(0,T;W^1_p(Q))} + \|w\|^{p-1-\rho}_{L_p(0,T;W^1_p(Q))} \big) + \|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)} \\ &\qquad \le c_{18} r^{p-1-\rho} + \|g_\Psi\|_{L_{q'}(\Omega_T)} =: \widehat{c}_4(r). \end{aligned}$$

Здесь, как и выше, учтены оценки

$$\|w\|_{L_p(\Omega_T)} = \|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)} \le c_{15}\|u\|_{L_p(\Omega_T)}$$

(см. (13)) и

$$\|u\|_{L_p(\Omega_T)} \le c_{16}\|u\|_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q))} \le c_{16} r$$

(неравенство Фридрихса), а также аналогичные оценки для $v = R_Q y$. Осталось воспользоваться неравенством Гёльдера:

$$\begin{aligned}
&\sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} |I_{s3}|\,dxdt \le \widehat{c}_4(r)\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)} \sum_{0\le j\le n} \|\partial_j w - \partial_j v\|^\rho_{L_p(\Omega_T)} \\
&= \widehat{c}_4(r)\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)}\|w-v\|^\rho_{L_p(\Omega_T)} + \widehat{c}_4(r)\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)}\|w-v\|^\rho_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q))} \\
&\le c_{15}^\rho \widehat{c}_4(r)\|u-y\|^{1+\rho}_{L_p(\Omega_T)} + \frac{\widehat{\Upsilon}\rho}{p}\|w-v\|^p_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q))} + \frac{p\widehat{c}_4^{\,p/(p-\rho)}(r)}{(p-\rho)\widehat{\Upsilon}^{\rho/(p-\rho)}}\|u-y\|^{p/(p-\rho)}_{L_p(\Omega_T)}.
\end{aligned} \tag{60}$$

Подставляя (34), (41) и (43) в (32), получим

$$\begin{aligned}
\langle A_R u - A_R y, u-y\rangle &\ge \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} I_{s1} - |I_{s2}| - |I_{s3}|\,dxdt \\
&\ge \left(\widehat{\Upsilon} - \frac{\widehat{\Upsilon}}{p} - \frac{\widehat{\Upsilon}\rho}{p}\right)\|w-v\|^p_{L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q))} - \frac{\widehat{c}_3^{\,q}(r)}{q\widehat{\Upsilon}^{q/p}}\|w-v\|^{q\rho}_{L_p(\Omega_T)} \\
&\quad - c_{15}^\rho\widehat{c}_4(r)\|u-y\|^{1+\rho}_{L_p(\Omega_T)} - \frac{p\widehat{c}_4^{\,p/(p-\rho)}(r)}{(p-\rho)\widehat{\Upsilon}^{\rho/(p-\rho)}}\|u-y\|^{p/(p-\rho)}_{L_p(\Omega_T)} \\
&\ge -\frac{c_{15}^{q\rho}\widehat{c}_3^{\,q}(r)}{q\widehat{\Upsilon}^{q/p}}\|u-y\|^{q\rho}_{L_p(\Omega_T)} - c_{15}\widehat{c}_4(r)\|u-y\|^{1+\rho}_{L_p(\Omega_T)} \\
&\quad - \frac{p\widehat{c}_4^{\,p/(p-\rho)}(r)}{(p-\rho)\widehat{\Upsilon}^{\rho/(p-\rho)}}\|u-y\|^{p/(p-\rho)}_{L_p(\Omega_T)} =: -C(r;\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)}),
\end{aligned} \tag{61}$$

поскольку $1 - \frac{1+\rho}{p} = \frac{p-1-\rho}{p} \ge 0$. Заметим, что $W \subset L_p(\Omega_T)$ компактно (см. (2.16) из [1, гл. 3, п. 2] и теорему 5.1 из [1, гл. 1, п. 5]), т. е. при $\mathscr{V} = L_p\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)\big) \cap L_2(\Omega_T)$ полунорма $\|\cdot\|_{L_p(\Omega_T)}$ компактна относительно $\|\cdot\|_W$ и непрерывна относительно $\|\cdot\|_{\mathscr{V}}$. Поскольку $1+\rho > 1$, $\rho q = \frac{\rho p}{p-1} > 1$ и $\frac{p}{p-\rho} > 1$, то $A_R$ — оператор с $(\mathscr{V}; W)$-полуограниченной вариацией. $\square$

Замечание 5.1. Пусть $\widetilde{W} = \{u \in \mathscr{V} : \partial_t u \in L_2(\Omega_T)\}$. Заметим, что построенная в (61) непрерывная функция $C(r;\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)})$ такова, что $\tau^{-1}C(r,\tau h) \to +0$ при $\tau \to 0$ для всех $r, h > 0$ полунорма $\|\cdot\|_{L_p(\Omega_T)}$ компактна относительно $\|\cdot\|_{\widetilde{W}}$ и непрерывна относительно $\|\cdot\|_{\mathscr{V}}$. Таким образом, при $p \in (1,2)$ и выполнении условий (A0), (A1), (A3) и (A5) оператор $\widetilde{A}_R : \mathscr{D}(\widetilde{A}_R) \subset L_p\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)\big) \to L_2(\Omega_T)$, заданный формулой (23), является оператором с $(\mathscr{V};\widetilde{W})$-полуограниченной вариацией.

## § 6. Существование обобщенного решения

**Теорема 6.1.** *Пусть* $p \in [2,\infty)$ *и справедливы условия* (A0)–(A2), *а также либо условия* (A3), (A4), *либо условия* (45), (46). *Тогда для любых* $f \in$

$L_q\big(0,T;W_q^{-1}(Q)\big)$ *и* $\varphi \in L_2(Q)$ *существует обобщенное решение задачи* (1)–(3) $u \in W$.

Доказательство. В силу условий (A0)–(A4) $A_R$ ограниченный, радиально непрерывный, коэрцитивный оператор с $(\mathscr{V};W)$-полуограниченной вариацией (см. леммы 3.1, 3.3 и 4.1, в случае справедливости оценок (45), (46) см. лемму 4.3). Согласно теореме 3.2 из гл. 3 в [2] существует обобщенное решение задачи (1)–(3) $u \in W$. □

**Теорема 6.2.** *Пусть* $p \in [2,\infty)$ *и справедливы условия* (A0)–(A2), *а также либо условия* (A3), (A4), *либо условия* (45), (46). *Тогда для любых* $f \in L_2(\Omega_T)$ *и* $\varphi \in L_2(Q)$ *существует обобщенное решение задачи* (1)–(3) $u \in \widetilde{W}$.

Доказательство. В силу условий (A0)–(A4) $A_R$ радиально непрерывный, коэрцитивный оператор с $(\mathscr{V};\widetilde{W})$-полуограниченной вариацией (см. леммы 3.2, 3.3, а также замечание 4.1). Следовательно, существует обобщенное решение задачи (1)–(3) $u \in \widetilde{W}$ (см. доказательство теоремы 3.2 из гл. 3 в [2] или § 4.2 в [15]). □

**Теорема 6.3.** *Пусть* $p \in (1,2)$ *и справедливы условия* (A0)–(A3) *и* (A5). *Тогда для любых* $f \in \mathscr{V}^*$ *и* $\varphi \in L_2(Q)$ *существует обобщенное решение задачи* (1)–(3) $u \in W$.

Доказательство. В силу условий (A0)–(A3) и (A5) $A_R$ — ограниченный, радиально непрерывный, коэрцитивный оператор с $(\mathscr{V};W)$-полуограниченной вариацией (см. леммы 3.1, 3.3 и 5.1). Согласно теореме 3.2 из гл. 3 в [2] существует обобщенное решение задачи (1)–(3) $u \in W$. □

**Теорема 6.4.** *Пусть* $p \in (1,2)$ *и справедливы условия* (A0)–(A3) *и* (A5). *Тогда для любых* $f \in L_2(\Omega_T)$ *и* $\varphi \in L_2(Q)$ *существует обобщенное решение* задачи (1)–(3) $u \in \widetilde{W}$.

Доказательство. В силу условий (A0)–(A3) и (A5) $A_R$ — радиально непрерывный коэрцитивный оператор с $(\mathscr{V};\widetilde{W})$-полуограниченной вариацией (см. леммы 3.2, 3.3, а также замечание 5.1). Следовательно, существует обобщенное решение задачи (1)–(3) $u \in \widetilde{W}$ (см. доказательство теоремы 3.2 из гл. 3 в [2] или § 4.2 в [15]). □

Замечание 6.1. При $p \in (1,2]$ вышеизложенные теоремы справедливы без выполнения условия коэрцитивности (A2), так как аналогично оценкам, гарантирующим $(\mathscr{V};\widetilde{W})$-полуограниченность вариации, из условия сильной эллиптичности (A3) и локальной гёльдеровости (локальной липшицевости для $p=2$) можно получить существование $\gamma,\lambda,\alpha > 0$ таких, что

$$\langle A_R u, u\rangle \geq \gamma \|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - \lambda \|u\|^2_{L_2(\Omega_T)} - \alpha,$$

см. замечание 4.2.3 в [15].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1976. Т. 9. С. 5–130.
3. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторно-дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
4. *Дубинский Ю. А.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23, № 1. С. 45–90.

**5.** *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations // J. Differ. Equ. 1986. V. 63. P. 332–361.

**6.** *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1997.

**7.** *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71, № 5. С. 3–112.

**8.** *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // Современная математика. Фундаментальные направления. 2014. Т. 54. С. 3–138.

**9.** *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlinear Anal. 1998. V. 32. P. 261–278.

**10.** *Скубачевский А. Л., Селицкий А. М.* Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 1. С. 207-208.

**11.** *Муравник А. Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства задачи Коши // Современная математика. Фундаментальные направления. 2014. Т. 52. С. 3–143.

**12.** *Solonukha O. V.* The first boundary value problem for quasilinear parabolic differential-difference equations // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, N 5. P. 1067–1077.

**13.** *Солонуха О. В.* О разрешимости нелинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений со сдвигами по пространственным переменным // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 5. С. 757–773.

**14.** *Солонуха О. В.* О существовании решений нелинейных параболических вариационных неравенств с односторонними ограничениями // Мат. заметки. 2005. Т. 77, № 3. С. 460–476.

**15.** *Мельник В. С., Згуровский М. З.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. Киев: Наукова думка, 1999.

**16.** *Solonukha O. V.* On nonlinear nonlocal parabolic problem // Russian J. Math. Physics. 2022. V. 29, N 1. P. 121–140.

**17.** *Солонуха О. В.* Об одном классе существенно нелинейных эллиптических дифференциально- разностных уравнений // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 226–244.

**18.** *Solonukha O. V.* On nonlinear and quasilinear elliptic functional-differential equations // Discrete and Continuous Dynamic Systems. Ser. S. 2016. V. 9, N 3. P. 847–868.

**19.** *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.



*Поступила в редакцию 10 мая 2023 г.*
*После доработки 6 июля 2023 г.*
*Принята к публикации 2 августа 2023 г.*



Солонуха Олеся Владимировна (ORCID 0000-0002-2042-8886)
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской Академии наук,
ул. Вавилова, 44, корп. 2, Москва 119333
solonukha@yandex.ru