

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

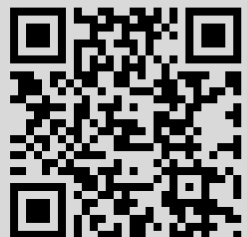
А. С. Шварц, К определению суперпространства, *ТМФ*,
1984, том 60, номер 1, 37–42

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.192.67.10

13 ноября 2024 г., 07:16:05



К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СУПЕРПРОСТРАНСТВА

Шварц А. С.

Указывается математическая формализация используемых в физике понятий суперматематики на языке, не использующем теории пучков.

Ф. А. Березин был первым, кто понял, что наряду с обычными анализом и алгеброй существуют аналогичные теории, в которых роль действительных чисел играют антикоммутирующие величины. Он показал, что при изучении метода вторичного квантования полезно использовать дифференцирование и интегрирование функций от антикоммутирующих переменных [1]. Далее, в статье [2] было предложено понятие групп с антикоммутирующими параметрами и введено соответствующее понятие алгебр Ли (в настоящее время эти объекты носят название супергрупп Ли и супералгебр Ли). Широкое применение в физике эти понятия получили после открытия симметрий, перемешивающих бозоны и фермионы (суперсимметрий) [3–5]. В работе [6] было показано, что при изучении таких теорий очень удобно рассматривать поле на пространствах, координатами в которых служат как коммутирующие, так и антикоммутирующие величины (на суперпространствах). Физические работы стимулировали математическое изучение соответствующих вопросов. В частности, в [7] было введено понятие супермногообразия, неявным образом это понятие возникло и в физических работах. Данное в [7] определение супермногообразия основано на теории пучков и трудно воспринимается физиками. Цель настоящей статьи — дать определения супермногообразия и связанных с ним понятий, которые, с одной стороны, были бы математически строгими, а с другой стороны, — максимально близкими к интуитивному представлению физика. Можно сказать, что предлагаемые определения являются математической формализацией понятий, используемых в физике.

Основная идея этих определений содержится в [8].

С точки зрения физика, (p, q) -мерное суперпространство $\mathbb{R}^{p,q}$ — это пространство, в котором точка имеет p четных координат и q нечетных координат. Четные координаты рассматриваются как четные элементы грассмановой алгебры, а нечетные координаты — как нечетные элементы грассмановой алгебры. У математика это определение сразу вызывает вопрос: какой именно грассмановой алгебре принадлежат координаты точки? Физик должен ответить, что грассманова алгебра в этом определении не фиксируется, она произвольна. Тогда математик приходит к вы-

воду, что есть не одно (p, q) -мерное суперпространство, а бесконечное множество суперпространств $\mathbb{R}_\Lambda^{p, q}$, определяемых различными грассмановыми алгебрами Λ (точка в $\mathbb{R}_\Lambda^{p, q}$ определяется строкой из p четных и q нечетных элементов алгебры Λ). Физик, вероятно, не согласится с этим, объяснив, что все пространства $\mathbb{R}_\Lambda^{p, q}$ принадлежат одному и тому же суперпространству. Теперь осталось сделать последний шаг: разрешение спора между математиком и физиком состоит в том, что суперпространство $\mathbb{R}^{p, q}$ следует рассматривать как совокупность всех пространств $\mathbb{R}_\Lambda^{p, q}$, но эти пространства нужно считать связанными между собой. Именно следует заметить, что по всякому сохраняющему четность гомоморфизму ρ грассмановой алгебры Λ в грассманову алгебру Λ' естественным образом строится отображение $\bar{\rho}$ пространства $\mathbb{R}_\Lambda^{p, q}$ в $\mathbb{R}_{\Lambda'}^{p, q}$. Обобщая эту схему, мы введем общее понятие суперпространства, на основе которого далее будут определены понятие супермногообразия, супергруппы Ли и т. д. Отметим, что в работе [9] предложен несколько иной подход. В ней рассматриваются пространства $\mathbb{R}_\Lambda^{p, q}$ при фиксированном Λ , но вся теория строится таким образом, чтобы от выбора Λ ничего не зависело.

Будем говорить, что задано суперпространство \mathcal{E} , если каждой грассмановой алгебре Λ сопоставлено множество \mathcal{E}_Λ (множество Λ -точек суперпространства \mathcal{E}) и каждому сохраняющему четность гомоморфизму ρ грассмановой алгебры Λ в грассманову алгебру Λ' сопоставлено отображение множеств $\bar{\rho}: \mathcal{E}_\Lambda \rightarrow \mathcal{E}_{\Lambda'}$ таким образом, что произведению гомоморфизмов ρ_1, ρ_2 отвечает произведение отображений $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$ (т. е. $\overline{\rho_1 \rho_2} = \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2$). Пространство \mathcal{E}_0 , отвечающее грассмановой алгебре $\Lambda = \mathbb{R}$ (грассмановой алгебре, имеющей нуль образующих), называется подстилающим пространством суперпространства \mathcal{E} . Для всякой грассмановой алгебры Λ определен гомоморфизм $m: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющий элементу алгебры его числовую часть. Отвечающее этому гомоморфизму отображение \tilde{m} сопоставляет каждой Λ -точке $x \in \mathcal{E}_\Lambda$ точку $\tilde{m}(x) \in \mathcal{E}_0$ («числовую часть» Λ -точки). Данное только что определение суперпространства является слишком общим для построения содержательной теории. Для того чтобы построить такую теорию, нужно считать, что в множествах \mathcal{E}_Λ введена некоторая дополнительная структура, и наложить соответствующие условия на отображения $\bar{\rho}$. Например, можно определить понятие супергруппы, предположив, что все множества \mathcal{E}_Λ являются группами, а все отображения $\bar{\rho}$ — гомоморфизмами; тогда естественно называть суперпространство \mathcal{E} супергруппой.

Мы сейчас приведем несколько примеров суперпространств в смысле данного выше общего определения. Далее мы укажем определения линейного суперпространства, алгебры Ли, супермногообразия, супергруппы Ли и покажем, в каких примерах можно ввести соответствующие структуры.

1. Пусть M — \mathbb{Z}_2 -градуированное линейное пространство, т. е. линейное пространство, представленное в виде прямой суммы $M_0 \oplus M_1$, где M_0 называется четным подпространством, а M_1 — нечетным. Определим множество Λ -точек \mathcal{M}_Λ как совокупность формальных линейных комбинаций $\sum a_i e_i + \sum b_j f_j$, где $e_i \in M_0$, $f_j \in M_1$, a_i — четные, b_j — нечетные элементы алгебры Λ (при этом считается, что $(a' + a'')m = a'm + a''m$, $a(m' + m'') = am' + am''$, $a, a', a'' \in \Lambda$; $m, m', m'' \in M$). Отображение $\bar{\rho}$ переводит точку $\sum a_i e_i + \sum b_j f_j$ в

$\sum \rho(a_i)e_i + \sum \rho(b_j)f_j$. Совокупность множеств \mathcal{M}_Λ и отображений $\bar{\rho}$ определяет суперпространство \mathcal{M} , которое отвечает \mathbb{Z}_2 -градуированному пространству M . В частном случае, когда M_0 — p -мерное, M_1 — q -мерное линейное пространство, суперпространство \mathcal{M} естественно отождествляется с суперпространством $\mathbb{R}^{p,q}$.

Примером бесконечномерного суперпространства является суперпространство, построенное по \mathbb{Z}_2 -градуированному пространству $B_{p,q}$, элементами которого являются выражения вида

$$(1) \quad \sum_{i=0}^q \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_i \leq q} f_{\alpha_1 \dots \alpha_i}(x^1, \dots, x^p) \xi^{\alpha_1} \dots \xi^{\alpha_i},$$

где $f_{\alpha_1 \dots \alpha_i}$ — бесконечно дифференцируемые функции действительных переменных x^1, \dots, x^p , а ξ^1, \dots, ξ^q — образующие грассмановой алгебры Λ_q (выражение вида (1) считается четным, если все слагаемые в (1) содержат четное число образующих ξ , и нечетным, если число ξ нечетно). Выражения вида (1) образуют алгебру, которую можно рассматривать как алгебру с p коммутирующими и q антикоммутирующими образующими (такие алгебры естественно называть алгебрами Березина). Важно заметить, что выражение (1) сохраняет смысл, если вместо действительных чисел x^1, \dots, x^p подставить произвольные четные элементы алгебры Грассмана Λ , а вместо ξ^1, \dots, ξ^q — произвольные нечетные элементы алгебры Λ (для того чтобы придать смысл $f_{\alpha_1 \dots \alpha_i}(x^1, \dots, x^p)$, если x^i — четные элементы алгебры Грассмана, следует воспользоваться разложением в ряд Тейлора по нильпотентным частям элементов x^i). Сделанное замечание позволяет рассматривать выражение вида (1) как функции на суперпространстве $\mathbb{R}^{p,q}$. Линейные комбинации выражений вида (1) с коэффициентами из алгебры Грассмана Λ будем называть Λ -функциями на $\mathbb{R}^{p,q}$. Множество Λ -точек суперпространства, отвечающего \mathbb{Z}_2 -градуированному пространству $B_{p,q}$, можно отождествить с множеством четных Λ -функций на суперпространстве $\mathbb{R}^{p,q}$.

2. Рассмотрим в $\mathbb{R}_\Lambda^{p,q}$ множество A_Λ , состоящее из точек, выделяемых уравнениями

$$(2) \quad \begin{aligned} f_1(x^1, \dots, x^p, \xi^1, \dots, \xi^q) &= 0, \\ \vdots \\ f_r(x^1, \dots, x^p, \xi^1, \dots, \xi^q) &= 0, \\ g_1(x^1, \dots, x^p, \xi^1, \dots, \xi^q) &= 0, \\ \vdots \\ g_s(x^1, \dots, x^p, \xi^1, \dots, \xi^q) &= 0, \end{aligned}$$

где x^i — четные, ξ^j — нечетные элементы грассмановой алгебры, f_1, \dots, f_r — четные, а g_1, \dots, g_s — нечетные функции на суперпространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ (напомним, что функция на $\mathbb{R}^{p,q}$ определяется выражением вида (1)). Легко видеть, что отображение $\bar{\rho}$ множества $\mathbb{R}_\Lambda^{p,q}$ в $\mathbb{R}_\Lambda^{p,q}$, построенное по гомоморфизму ρ , переводит множество A_Λ в A_Λ' . Поэтому множество A_Λ вместе с отображениями $\bar{\rho}$ определяет суперпространство \mathcal{A} .

3. Приведенная только что конструкция суперпространства \mathcal{A} является частным случаем более общей конструкции. Именно, если для супер-

пространства \mathcal{E} в каждом из множеств \mathcal{E}_Λ выделено подмножество \mathcal{E}'_Λ , удовлетворяющее условию $\bar{\rho}(\mathcal{E}'_\Lambda) \subset \mathcal{E}'_\Lambda$ для каждого из гомоморфизмов $\rho: \Lambda \rightarrow \Lambda'$, то множество \mathcal{E}'_Λ вместе с отображениями $\bar{\rho}_\Lambda$ образует суперпространство, которое естественно назвать подсуперпространством суперпространства \mathcal{E} . В частности, если $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}_0$ — подмножество подстилающего пространства \mathcal{E}_0 , рассмотрим множества $\mathcal{E}_\Lambda^{\mathcal{U}}$, состоящие из таких точек $x \in \mathcal{E}_\Lambda$, что $\bar{m}(x) \in \mathcal{U}$ для гомоморфизма $m: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$. Эти множества определяют суперпространство $\mathcal{E}^{\mathcal{U}}$, которое называется подсуперпространством, лежащим над \mathcal{U} . Если $\mathcal{E} = \mathbb{R}^{p,q}$, а \mathcal{U} — область в $\mathbb{R}^{p,0}$, то $\mathcal{E}^{\mathcal{U}}$ называется суперобластью (иначе можно сказать, что суперобласть $(\mathbb{R}^{p,q})^{\mathcal{U}}$ состоит из точек, числовые части которых принадлежат \mathcal{U}).

4. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_\Lambda^{p,q|p',q'}$, состоящее из блочных матриц

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где A и D состоят из четных элементов алгебры Λ и имеют размерности $p \times p'$ и $q \times q'$, а B и C состоят из нечетных элементов алгебры Λ и имеют размерности $q \times p'$ и $p \times q'$. Множества $\mathcal{M}_\Lambda^{p,q|p',q'}$ определяют суперпространство $\mathcal{M}^{p,q|p',q'}$. Это пространство изоморфно суперпространству $\mathbb{R}^{pp'+qq', qp'+pq'}$. В случае, если $p=p'$, $q=q'$, матрицы из $\mathcal{M}_\Lambda^{p,q|p',q'}$ можно перемножать по обычным правилам. Множество обратимых элементов из $\mathcal{M}_\Lambda^{p,q|p',q'}$ обозначим $GL_\Lambda(p, q)$. Это множество образует группу. Легко проверить, что $GL_\Lambda(p, q)$ состоит из матриц, числовые части которых обратимы. Это позволяет рассматривать суперпространство $GL(p, q)$ как суперобласть над областью $GL(p) \times GL(q) \subset \mathcal{M}_\mathbb{R}^{p,q|p,q}$.

Отметим, что множества $\mathbb{R}_\Lambda^{p,q}$ можно рассматривать как линейные пространства. Более того элементы из $\mathbb{R}^{p,q}$ можно умножать не только на числа, но и на четные элементы грассмановой алгебры. Иными словами, $\mathbb{R}_\Lambda^{p,q}$ можно рассматривать как Λ_0 -модуль (через Λ_0 , как обычно, обозначено кольцо четных элементов алгебры Λ). Поэтому мы будем называть суперпространство \mathcal{E} линейным суперпространством, если все множества \mathcal{E}_Λ являются Λ_0 -модулями, а отображения $\bar{\rho}$ — гомоморфизмами Λ_0 -модулей. Условиям этого определения удовлетворяют не только суперпространства $\mathbb{R}^{p,q}$, но и более общие суперпространства \mathcal{M} , построенные по \mathbb{Z}_2 -градуированному суперпространству.

Линейное суперпространство \mathcal{E} называется супералгеброй Ли, если каждое из множеств \mathcal{E}_Λ является алгеброй Ли, а отображения $\bar{\rho}$ — гомоморфизмами алгебр Ли (точнее, требуется, чтобы \mathcal{E}_Λ было Λ_0 -алгеброй Ли, т. е. чтобы выполнялось требование $[\lambda a, b] = \lambda [a, b]$ для любого $\lambda \in \Lambda_0$). Суперпространство $\mathcal{M}^{p,q|p',q'}$ является супералгеброй Ли относительно обычного коммутатора матриц.

Пусть в \mathbb{Z}_2 -градуированном пространстве M введена структура \mathbb{Z}_2 -градуированной алгебры Ли, т. е. введена операция $[\cdot, \cdot]$, удовлетворяющая модифицированному тождеству Якоби. Тогда соответствующее линейное суперпространство \mathcal{M} естественно превращается в супералгебру Ли. Мож-

но проверить, что справедливо и обратное утверждение: всякая структура супералгебры Ли в линейном суперпространстве \mathcal{M} порождается с помощью этой конструкции.

Если все множества \mathcal{E}_Λ являются группами, а отображения $\bar{\rho}$ — гомоморфизмами групп, то суперпространство \mathcal{E} называется супергруппой. Простейшим примером супергруппы является описанное выше суперпространство $GL(p, q)$ (напомним, что, как мы уже говорили, множества $GL_\Lambda(p, q)$ снабжены структурой группы).

Перед тем как определять понятие гладкого супермногообразия, вспомним, что для линейного суперпространства мы требовали, чтобы в множествах \mathcal{E}_Λ была определена структура Λ_0 -модуля. Поэтому для определения гладкого супермногообразия недостаточно требовать, чтобы \mathcal{E}_Λ были гладкими многообразиями. Мы потребуем еще, чтобы каждое из касательных пространств к \mathcal{E}_Λ было снабжено структурой Λ_0 -модуля. Отображения $\bar{\rho}$ должны быть, конечно, гладкими. Однако на них нужно наложить еще дополнительное требование, чтобы порождаемые ими отображения касательных пространств были гомоморфизмами Λ_0 -модулей.

Мы введем понятие Λ_0 -многообразия как такого гладкого многообразия, каждое из касательных пространств к которому снабжено структурой Λ_0 -модуля. Гладкое отображение Λ_0 -многообразий будем называть Λ_0 -гладким, если порождаемые им отображения касательных пространств являются гомоморфизмами Λ_0 -модулей. Пользуясь этим понятием, можно определить понятие гладкого супермногообразия как суперпространства, для которого \mathcal{E}_Λ являются Λ_0 -многообразиями, а $\bar{\rho}$ — Λ_0 -гладкими отображениями Λ_0 -многообразий.

Примером гладкого супермногообразия может служить линейное суперпространство, а также суперпространство, выделяемое уравнениями (2) в случае, если числовые части матриц $(\partial f_i / \partial x^k)$ и $(\partial g_j / \partial \xi^l)$ имеют соответственно ранги r и s . Всякое супермногообразие в обычном смысле [10] может рассматриваться как гладкое супермногообразие в смысле данного выше определения. Естественным образом определяется действие супергруппы \mathcal{G} на суперпространстве \mathcal{E} : при каждом Λ группа \mathcal{G}_Λ должна действовать на \mathcal{E}_Λ , и эти действия при разных Λ должны быть согласованы с помощью отображений $\bar{\rho}$ (если φ_g — преобразование пространства \mathcal{E}_Λ , отвечающее элементу $g \in \mathcal{G}_\Lambda$, то $\bar{\rho}\varphi_g = \varphi_{\bar{\rho}(g)}$). Пространство орбит (фактор-пространство) \mathcal{E}/\mathcal{G} действия супергруппы \mathcal{G} в суперпространстве \mathcal{E} определяется с помощью множеств $\mathcal{E}_\Lambda/\mathcal{G}_\Lambda$ (отображение $\bar{\rho}$ строится естественным образом).

Отметим, что определение суперпространства, указанное выше, является существенно более общим, чем стандартное. Это, в частности, сказывается в том, что, пользуясь стандартными понятиями, вообще говоря, нельзя даже в простых ситуациях определить, что такое фактор-пространство \mathcal{E}/\mathcal{G} . Рассмотрим простой пример. Пусть \mathcal{G} — супергруппа $GL(1, 0)$, действующая на суперпространстве $\mathcal{E} = \mathbb{R}^{0,q}$ (множество $GL_\Lambda(1, 0)$ состоит из обратимых четных элементов алгебры Λ ; каждому такому элементу λ сопоставляется преобразование множества $\mathbb{R}_\Lambda^{0,q}$, состоящее в умножении всех координат на λ). Легко проверить, что фактор-пространство $\mathbb{R}^{0,q}/GL(1, 0)$ не является супермногообразием в смысле настоящей статьи и

тем более не является супермногообразием в стандартном смысле. Пример гладкого супермногообразия, не являющегося супермногообразием в обычном смысле, можно построить, слегка модифицировав определение суперпространства $\mathbb{R}^{p,q}$. Именно следует рассмотреть в $\mathbb{R}_{\Lambda}^{p,q}$ подмножество $\widetilde{\mathbb{R}_{\Lambda}^{p,q}}$, состоящее из точек, у которых все координаты нильпотентны. Эти подмножества определяют суперпространство $\widetilde{\mathbb{R}^{p,q}}$, которое можно рассматривать как линейное суперпространство (другими словами, можно определить $\widetilde{\mathbb{R}^{p,q}}$ как подсуперпространство $\mathbb{R}^{p,q}$, лежащее над началом координат в подстилающем многообразии \mathbb{R}^p).

Будем называть гладкое супермногообразие \mathcal{E} (p, q) -мерным супермногообразием, если для каждой точки подстилающего многообразия \mathcal{E}_0 можно найти такую окрестность \mathcal{U} , что гладкое многообразие $\mathcal{E}^{\mathcal{U}}$, лежащее над \mathcal{U} , эквивалентно суперобласти. В работе А. А. Воронова [11] доказано, что определенное только что понятие (p, q) -мерного супермногообразия эквивалентно стандартному.

Литература

- [1] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М., Наука, 1965.
- [2] Березин Ф. А., Кац Г. И. — Матем. сб., 1970, 82, № 3, 343.
- [3] Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П. — Письма в ЖЭТФ, 1971, 13, 452.
- [4] Volkov D. B., Akulov V. P. — Phys. Lett., 1973, 46B, 109.
- [5] Wess J., Zumino B. — Nucl. Phys., 1974, B70, 39.
- [6] Salam A., Strathdee J. — Phys. Rev., 1975, 11D, 1521.
- [7] Березин Ф. А., Лейрес Д. А. — ДАН СССР, 1975, 224, № 3, 505.
- [8] Schwarz A. S. — Commun. Math. Phys., 1982, 87, 37.
- [9] Волович И. В. — ДАН СССР, 1983, 269, 524.
- [10] Воронов А. А. — ТМФ, 60, № 1, 43–48.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию 5.X.1983 г.

TO THE DEFINITION OF SUPERSPACE

Schwarz A. S.

A mathematical formalisation of notions of the supermathematics used in physics is implemented in the framework which does not use any elements of the theory of sheaves.