

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

R. F. Bikbaev, Whitham restructuring and time asymptotics of the solution of a nonlinear Schrödinger equation with finite-gap behavior as $x \rightarrow \pm\infty$,
Algebra i Analiz, 1990, Volume 2, Issue 3, 131–143

<https://www.mathnet.ru/eng/aa189>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.85

May 19, 2025, 01:01:33



© 1990 г.

Р. Ф. Бикбаев

**ПЕРЕСТРОЙКА УИЗЕМА И ВРЕМЕННАЯ АСИМПТОТИКА
РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА
С КОНЕЧНОЗОНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ ПРИ $x \rightarrow \pm\infty$**

Построен старший член асимптотики при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера с конечнозонным поведением решения при $x \rightarrow \pm\infty$.

Хорошо известно, что метод обратной задачи рассеяния позволяет детально исследовать задачу Коши для нелинейного уравнения Шредингера

$$ip_t + p_{xx} - 8|p|^2p = 0 \quad (1)$$

в случае быстро убывающих начальных условий, для граничных условий типа конечной плотности [1, 2] и в периодическом случае [3].

Интерес представляют задачи с более сложным поведением решений уравнения (1) при $x \rightarrow \pm\infty$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с начальным условием $p(x, 0)$, быстро (в смысле класса Шварца) стремящимся к конечнозонным [3] предельным значениям при $x \rightarrow \pm\infty$,

$$p(x, 0) \rightarrow \begin{cases} v_+(x, 0, \Gamma_+, D_+, \beta_+), & x \rightarrow \pm\infty, \\ v_-(x, 0, \Gamma_-, D_-, \beta_-), & x \rightarrow \pm\infty. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $v(x, t, \Gamma, D, \beta)$ - конечнозонное (к.-з.) решение уравнения (1), соответствующее римановой поверхности Γ , дивизору D и "фазовому" параметру β (см. § 1).

Целью настоящей работы является исследование асимптотики при $t \rightarrow \infty$ решения задачи (1), (2). Подобные задачи хорошо изучены в быстро убывающем случае [4] и в случае конечной плотности [5], т.е. для вырожденных кривых Γ_+ , Γ_- нулевого рода ($g_+ = g_- = 0$).

В работе [6] получен главный член асимптотики модуля решения $|p(x, t)|$ в окрестности переднего фронта волны в случае $g_+ = g_- = 0$. Отметим также работу [7], в которой на примере уравнения Кортевега-де Фриза исследовался случай совпадающих кривых $\Gamma_+ = \Gamma_-$.

Ниже будет рассмотрен простейший случай несовпадающих кривых Γ_+ и Γ_-

Ключевые слова: метод обратной задачи рассеяния, конечнозонное решение, деформация римановой поверхности, матричная задача Римана.

одинакового рода $g > 0$.

$$\Gamma_+ : z^2(\lambda) = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_j^{(+)}), \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{2g+2},$$

$$\Gamma_- : z^2(\lambda) = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_j^{(-)}) \left. \begin{array}{l} \lambda_j^{(-)} = \lambda_j^{(+)}, \quad j=2, \dots, 2g+2, \\ \lambda_1^{(-)} > \lambda_1^{(+)} \end{array} \right\}$$
(3)

Основной результат работы состоит в следующем.

Решение задачи (1)-(3) имеет при $t \rightarrow \infty$ и в отсутствие солитонов вид

$$p(x, t) = v(x, t, \check{\Gamma}(\xi), \check{D}(\xi), \check{\beta}(\xi)) + o(t^{-\delta}), \quad \delta > 0,$$
(4)

где $\check{\Gamma}(\xi)$ - уиземовская риманова поверхность (см. § 4). Точные формулы для параметров \check{D} и $\check{\beta}$ приведены в § 5.

Характер убывания поправочного члена в (4) зависит от ξ , $\xi = x/t$. Так, при $\xi > \xi_b + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (см. § 4), $\delta = 1/2$; при $\xi \in [\xi_a + \varepsilon, \xi_b - \varepsilon] : 1 > \delta > N$, $N > 0$, для "быстро убывающего" в смысле Шварца потенциала в (2). При $\xi < \xi_a - \varepsilon$ существуют как области экспоненциального, так и области степенного убываний поправки.

§ 1. Предварительные сведения

Напомним необходимые факты из теории конечнозонных решений уравнения (1).

Пусть Γ - гиперэллиптическая риманова поверхность $z^2(\lambda) = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_j)$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$,

$\Gamma \ni P = (\lambda, z)$. На поверхности Γ определим инволюцию σ , переставляющую листы Γ , и антиинволюцию $\tau : \lambda \rightarrow \bar{\lambda}$, не переставляющую листы. Выберем на Γ канонический базис циклов a_1, b_1 так, что $\tau a_1 = a_1$, $\tau b_1 = -b_1$ (см. рисунок для $g=2$). Совокупность заштрихованных контуров $\partial\Gamma^+$ разделяет Γ на два листа - Γ^+ и Γ^- . Две бесконечно удаленные точки на Γ обозначим ω^\pm . Голоморфные дифференциалы $\omega_1, \dots, \omega_g$ нормируем условием $\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$.

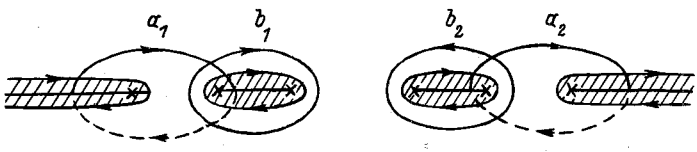
Удаленные точки на Γ обозначим ω^\pm . Голоморфные дифференциалы $\omega_1, \dots, \omega_g$ нормируем условием $\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$.

$$U(P) = \int_{\omega^+}^P \omega$$

соответствующее отображение Абеля.

Определим абелевы интегралы Ω_i , $i=1, 2, 3$, имеющие нулевые а-периоды и особенности в ω^\pm вида

$$\begin{aligned} \Omega_1(P) &\sim \mp(\lambda + w_1), \quad P \rightarrow \omega^\pm, \\ \Omega_2(P) &\sim \mp(2\lambda^2 + w_2), \quad P \rightarrow \omega^\pm, \\ \Omega_3(P) &\sim \mp(\ln \lambda + w_3), \quad P \rightarrow \omega^\pm. \end{aligned}$$
(5)



Пусть $n = \int_{\omega^-}^{\omega^+} \omega$, причем путь интегрирования не пересекает базисных циклов; $V = \int_b^a d\Omega_1$, $W = \int_b^a d\Omega_2$.

Формула для к.-з. решения $v(x, t)$ имеет вид [3]

$$v = \beta \frac{\Theta(\Omega + d - n)}{\Theta(\Omega + d)} \exp(2i(w_1 x + w_2 t)), \quad \beta = \exp(-w_3 + i\varphi). \quad (6)$$

Здесь $\varphi \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^g$ - произвольные вещественные параметры, $\Omega = \frac{Vx + Wt}{2\pi}$, Θ - тэта-функция Римана. С уравнением (1) связана вспомогательная линейная задача

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = L\Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = M\Psi,$$

$$L = -i\lambda\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0, & 2ip \\ -2i\bar{p}, & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = 2\lambda L(\lambda) + \begin{pmatrix} -4i|p|^2, & -2p_x \\ -2\bar{p}_x, & 4i|p|^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Векторное решение системы (7), соответствующее к.-з. потенциалу (6), обозначим $e(P)$. Функция $e(P) = (e_1, e_2)^T$ (функция Бейкера-Ахиезера) задается формулами

$$e_1(P) = \sqrt{\beta} \frac{\Theta(U(P) + \Omega + d) \Theta(d)}{\Theta(U(P) + d) \Theta(\Omega + d)} \cdot \exp(i(\Omega_1 + w_1) + i(\Omega_2 + w_2)t), \quad (8)$$

$$e_2(P) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{\Theta(U(P) + \Omega + d + n) \Theta(d - n)}{\Theta(U(P) + d) \Theta(\Omega + d)} \times \\ \times \exp(i(\Omega_1 - w_1)x + i(\Omega_2 - w_2)t + (\Omega_3 - w_3)). \quad (9)$$

Вектор d связан с дивизором полюсов D функции $e(P)$ формулой

$$d = -U(D) - K,$$

где K - вектор констант Римана.

Из формул (8), (9) следует, что функция $e(P)$ представляется в виде

$$e(P) = E(x, t, P) \cdot \exp(ix\Omega_1 + it\Omega_2), \quad (10)$$

где $E(x, t, P)$ - квазипериодическая по x, t вектор-функция, ограниченная и гладкая при $P \in \partial\Gamma^+ \setminus \{\omega^-\}$. Отметим, что $\text{Im } \Omega_1(P) \geq 0$ при $P \in \Gamma^+$.

Приступим к исследованию задачи Коши (1)-(3). Прежде всего построим вариант теории рассеяния для L -оператора (7) с потенциалом $p(x, t)$ вида (2).

§ 2. Прямая задача рассеяния

Предположим, что эволюция по времени, описываемая уравнением (1), оставляет решение $p(x, t)$ в функциональном классе (2), т.е. для $\forall t > 0$

$$p(x, t) \longrightarrow v_{\pm}(x, t, \Gamma_{\pm}, D_{\pm}, \beta_{\pm}) \text{ при } x \longrightarrow \pm\infty. \quad (11)$$

Результаты настоящей работы согласуются с предположением (11). Строгое доказательство, по-видимому, может быть получено методами работ [6, 8].

Определим решения Йоста Ψ_{+} , Ψ_{-} как векторные решения системы (7), фиксированные асимптотиками

$$\Psi_{\pm}(x, t, P) \longrightarrow e_{\pm}(x, t, P) \text{ при } x \longrightarrow \pm\infty. \quad (12)$$

Здесь e_{\pm} - функции Бейкера-Ахизера (8), соответствующие к.-з. потенциалам. Стандартным образом [6] устанавливается, что функция Ψ_{\pm} продолжается до мероморфной функции на нижнем Γ_{+}^{-} (верхнем Γ_{-}^{+}) листе поверхности $\Gamma_{+}(\Gamma_{-})$ и имеет полюса в тех точках дивизора $D_{+}(D_{-})$, которые расположены на этом листе. Проведем естественное отождествление верхних (нижних) листов поверхностей Γ_{+} и Γ_{-} . Тогда на граничном контуре $\partial\Gamma_{+}^{-}$ функции $\Psi_{+}(P)$ и $\Psi_{+}(\sigma P)$ образуют базис в пространстве решений системы (7), и выполнено соотношение

$$\Psi_{+}(P) = \Psi_{-}(P) a(P) + \Psi_{-}(\sigma P) b(P), \quad P \in \partial\Gamma_{+}^{-}, \quad (13)$$

где $a(P)$, $b(P)$ - скалярные функции, не зависящие от x, t и связанные при $P \in \partial\Gamma_{+}^{-}$ соотношением

$$a(P) a(\sigma P) - b(P) b(\sigma P) = \Delta_{+}/\Delta_{-},$$

$$\Delta_{\pm} = z_{\pm}(\lambda) / \prod_{j=1}^g \left(\lambda - \lambda \left(\frac{P^j}{z_{\pm}} \right) \right),$$

где P^j - точки дивизора D_{\pm} .

Функция $a(P)$ аналитически продолжается на лист Γ_{-}^{-} , имея полюса в точках P_{+}^j и нули в точках P_{-}^j , лежащих на этом листе.

В дальнейшем будем предполагать, что других нулей функция $a(P)$ не имеет. Это соответствует рассмотрению бессолитонного случая. Из формулы (13) следует, что справедливы формулы

$$a(P) = \{\Psi_{+}(P), \Psi_{-}(\sigma P)\} / \Delta_{-}(P),$$

$$b(P) = -\{\Psi_{+}(P), \Psi_{-}(P)\} / \Delta_{-}(P),$$

$$\{\varphi, \psi\} \equiv \det(\varphi, \psi),$$

откуда вытекает, что $a(P) \longrightarrow \lambda \left(\frac{\beta_{+}}{\beta_{-}} \right)^{1/2}$ при $P \longrightarrow \infty$, $r(P) \longrightarrow 0$ при $P \longrightarrow \infty$, где функция $r(P)$ определена формулой $r(P) = b(P)/a(P)$. Нетрудно убедиться, что при $P \in \partial\Gamma_{-}^{-} \setminus \partial\Gamma_{+}^{-}$

$$a(P) = b(\tau P). \quad (14)$$

Заметим, что для решения $\Psi_{\pm}(P)$ выполнено соотношение „вещественности“

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi_{(\pm)}(\tau P) = \Psi_{(\pm)}(P) m_{(\pm)}(P) \quad (14')$$

с некоторой не зависящей от x, t скалярной функцией $m_{(\pm)}(P)$ такой, что $\bar{m}(\tau P)m(P)=1$.

Из (13), (14') следует, что при $P \in \partial\Gamma_+^+$

$$\begin{aligned} a(P) &= \bar{a}(\tau P) m_-(P)/m_+(P), \\ r(P) &= \bar{r}(\tau P) m_-(\tau P)/m_-(P), \end{aligned}$$

откуда, в частности, вытекает неотрицательность функции $r(P)r(\tau P)$ при $P \in \partial\Gamma_+^+$.

Можно показать, что при $P \in \partial\Gamma_+^+$

$$r(P)r(\tau P) < 1,$$

причем знак равенства может достигаться только в изолированных (см. (15)) точках (в отличие от (14)). В случае общего положения (который только и будет рассматриваться) в точках $\tilde{\lambda}_j \in \Gamma^-: \lambda(\tilde{\lambda}_j) = \lambda_j^{(-)}$ выполнено условие $\{\Psi_+(\tilde{\lambda}_j), \Psi_-(\sigma\tilde{\lambda}_j)\} \neq 0$,

откуда следует, что $a(P) \rightarrow \infty$ при $P \rightarrow \tilde{\lambda}_j$ и верно равенство

$$r(\tilde{\lambda}_j) = -1. \quad (15)$$

Набор $\{r(P), D_{\pm}, \beta_{\pm}\}$ будем называть данными рассеяния. В § 3 будет показано, как по данным рассеяния восстанавливается потенциал $p(x, t)$.

В заключение этого параграфа выведем формулы связи для данных рассеяния.

Рассмотрим функцию

$$\alpha(P) = \begin{cases} a(P), & P \in \Gamma_+^-, \\ a^{-1}(\sigma P) \frac{\Delta_+}{\Delta_-}(P), & P \in \Gamma_+^+, \end{cases}$$

обладающую следующими свойствами:

1) $\alpha(P)$ - кусочно-мероморфная на Γ_+ функция с дивизорами нулей D_- и полюсов D_+ , асимптотикой при $P \rightarrow \infty^{(\pm)}$ вида

$$\alpha(P) \rightarrow (\beta_{(-)} / \beta_{(+)}^{(\pm)})^{1/2}; \quad (15')$$

$$2) \alpha(P) \sim \begin{cases} O((\lambda - \lambda_1^{(-)})^{-1/2}) & \text{при } P \sim \tilde{\lambda}_1, \\ O(1) & \text{при } P \sim \sigma\tilde{\lambda}_1; \end{cases}$$

3) на контуре \mathcal{L} , $\mathcal{L} = \{P: P \in \partial\Gamma_+^+ \cup I^+ \cup I^-\}$, $I^+ \subset \Gamma_+^+$, $\lambda(I^+) = [\lambda_1^{(+)}, [\lambda_1^{(-)}]$, $I^+ = \sigma I^-$ выполнены следующие условия сопряжения:

$$\begin{aligned} \alpha_*^-(P) &= \alpha_*^+(P)g(P), \\ g(P) &= \begin{cases} [1 - r(P)r(\tau P)]^{-1}, & P \in \partial\Gamma_+^+, \\ -\bar{r}_*^-(P), & P \in I^+, \\ r_*^+(P), & P \in I^-. \end{cases} \end{aligned}$$

Символ $f_*^{\pm}(P)$, $P \in \mathcal{L}$ для всякой функции $f(P)$ на Γ_+ имеет следующий смысл:

$$f_*^{(\pm)}(P) \equiv \begin{cases} \lim_{P' \rightarrow P} f(P'), & P \in \partial\Gamma_+^+, \\ P' \in \Gamma_+^+, & \\ f(P(\pm) i0), & P \in I^+ \cup I^-. \end{cases} \quad (16)$$

По указанным свойствам функция $\alpha(P)$ восстанавливается однозначно и задается формулой

$$\alpha(P) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}(Q)} \int_{\infty^+}^P \hat{M}(P', Q) \operatorname{lng}(Q)\right) \cdot \frac{\theta(U(P) - U(D_-) - K)}{\theta(U(P) - U(D_+) - K)} \cdot C. \quad (17)$$

Здесь $\hat{M}(P, Q)$ - мероморфный бидифференциал, нормированный условием $\oint_{a_1(P)} \hat{M}(P, Q) = 0$ и имеющий особенность на диагонали $P=Q$ вида

$$\hat{M}(P, Q) = (q(P) - q(Q))^{-2} dq(P) dq(Q),$$

где q - локальный параметр.

Отметим, что $\oint_{b_1(P)} \hat{M}(P, Q) = 2\pi i \cdot \omega_1(Q)$, а дифференциал $\int_{\infty^+}^P \hat{M}(P, Q)$ имеет смысл многозначного аналога ядра Коши.

В формуле (17) фиксируется согласованный с поведением функции $\alpha(P)$ в окрестности точки λ_1 выбор аргумента функции $g(P)$ на контурах l^\pm :

$$\begin{aligned} \arg(r(\lambda_1)) &= \pi, \\ \arg(-r(\sigma\lambda_1)) &= 0. \end{aligned}$$

Константа C_0 в (17) определяется из асимптотик (15'). (Для наших целей эта константа несущественна).

Из условия однозначности функции $\alpha(P)$ на Γ_+ получаем

$$U(D_-) = U(D_+) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}(Q)} \operatorname{lng}(Q) \omega(Q), \quad (18)$$

а из асимптотических формул (15') имеем

$$\beta_- / \beta_+ = \alpha(\infty^+) / \alpha(\infty^-). \quad (19)$$

Формулы (18), (19) показывают, что в качестве "минимального" набора данных рассеяния можно выбрать $\{r(P), D_+, \beta_+\}$. Параметры D_-, β_- восстанавливаются по этому набору.

§ 3. Матричная задача Римана

Перейдем к проблеме восстановления потенциала $p(x, t)$ по данным рассеяния.

Рассмотрим (2×2) -матричную функцию

$$\Psi(P) = (\Psi_+(\sigma P), \Psi_-(P)) \begin{pmatrix} \Psi_+(\sigma P), \Psi_-(P) \\ 0, 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad P \in \Gamma_+. \quad (20)$$

1) функция $\Psi(P)$ мероморфна при $P \notin \partial\Gamma^+ \cup \infty^\pm$ и имеет асимптотику при $P \rightarrow \infty^{(\pm)}$

$$\Psi(P) \rightarrow M_{\pm} \left(I + \frac{V(\pm)}{\lambda} + \dots \right) \exp \left((\pm) i \lambda \sigma_3 (x + 2\lambda t) \right),$$

$$M_{+} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\beta_{-}} \\ \frac{-1}{\sqrt{\beta_{-}}} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{-} = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_{-}} / -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda / \sqrt{\beta_{-}} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

2) Пусть E - образ контура $\partial\Gamma_{\pm}^{+}$ при канонической проекции $\lambda: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}(E \subset \mathbb{R})$. Тогда при $P \in E$ выполнено условие сопряжения

$$\Psi(P - i0) = \Psi(P + i0)G(P),$$

$$G(P) = - \begin{pmatrix} r^{+}(\tau P), & \Delta_{-}(P) \\ \frac{r^{+}(P)r^{+}(\tau P) - 1}{\Delta_{-}(P)}, & r^{+}(P) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Здесь $r^{+}(P)$ есть значение функции $r(P)$ на верхнем берегу контура $\partial\Gamma_{\pm}^{+}$. Заметим, что при $P \in [\lambda_1^{(+)}, \lambda_1^{(-)}]$ матрица $G(P)$ становится верхнетреугольной.

3) Пусть на листе Γ_{\pm}^{+} найдутся точки $P_j^{(-)}$, принадлежащие дивизору D_{-} . Тогда второй столбец функции $\Psi(P)$ имеет полюса в этих точках и справедливо представление

$$\Psi(P) = \Psi_0(P) (P - P_j^{(-)})^{\sigma_3}, \quad (23)$$

где функция $\Psi_0(P)$ голоморфна и обратима в окрестности точек $P_j^{(-)}$.

Пользуясь теоремой Лиувилля нетрудно убедиться, что свойства (21)-(23) полностью характеризуют функцию $\Psi(P)$, т.е. всякое решение $\hat{\Psi}(P)$ сформулированной матричной задачи Римана (МЗР) (21)-(23) совпадает с функцией $\Psi(P)$. При этом потенциал $p(x, t)$ восстанавливается по формуле

$$p(x, t) = V_{12}^{-} \beta_{-}, \quad (24)$$

где V^{-} - матричный коэффициент разложения (21).

Наша дальнейшая цель состоит в асимптотическом решении МЗР (21)-(24) при $t \rightarrow \infty$.

§ 4. Уиземовская деформация римановой поверхности

Будем искать решение задачи Коши (1), (2) при $t \rightarrow \infty$ в виде (4), где параметры $\tilde{\Gamma}$, \tilde{D} , $\tilde{\beta}$ зависят от медленной переменной $\xi = x/t$.

Хорошо известно (см. [9-11]), что необходимым условием существования решения типа (4) является выполнение $2g+2$ уравнений Уизема на точки ветвления λ_j римановой поверхности $\tilde{\Gamma}$:

$$(\xi + s(\lambda_j)) \frac{d\lambda_j}{d\xi} = 0, \quad j = 1, \dots, 2g + 2,$$

$$s(\lambda) = (d\Omega_2/d\Omega_1)(\lambda), \quad (\text{см. (5)}). \quad (25)$$

Нас интересуют такие решения уравнений (25), что

$$\Gamma(\xi) \longrightarrow \begin{cases} \Gamma_+ & \text{при } \xi \longrightarrow +\infty, \\ \Gamma_- & \text{при } \xi \longrightarrow -\infty. \end{cases} \quad (26)$$

Важным свойством уиземовских деформаций (25) является следующая

Теорема 1. Пусть при некотором $\xi = \xi_0$ точка ветвления λ_j движется: $\partial_{\xi} \lambda_j |_{\xi = \xi_0} \neq 0$, тогда

1) все другие точки ветвления неподвижны

$$\partial_{\xi} \lambda_i |_{\xi = \xi_0} = 0, \quad i \neq j; \quad (27)$$

2) точка λ_j движется влево по вещественной оси

$$\partial_{\xi} \lambda_i |_{\xi = \xi_0} < 0. \quad (28)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\gamma(P) = \frac{(d\Omega_1 x + d\Omega_2 t)}{d\lambda}$,

допускающую представление вида $\gamma(P) = R(\lambda)z(\lambda)$, где R - полином степени $g+2$. Из нормированности $d\Omega_1(P)$ следует, что в каждой лакуне $\nabla_i = [\lambda_{2i-1}, \lambda_{2i}]$, $i=1, \dots, g+1$, функция $\gamma(P)$ имеет нуль.

Заметим теперь, что на вещественной оси вне лакун ∇_i функция $s(\lambda)$ (см. (25)) монотонно возрастает. Действительно, $s(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, а немонотонность $s(\lambda)$ означала бы, что при некотором ξ функция $\gamma(P)$ имела бы на вещественной оси $g+3$ нуля, что невозможно. Из монотонности $s(\lambda)$ следует формула (27).

Для доказательства формулы (28) заметим, что для функции $s = s(\lambda, \{\lambda_j\})$ справедливо равенство

$$\frac{ds(\lambda_1, \{\lambda_j\})}{d\lambda_1} \Big|_{\lambda = \lambda_1} = \partial_{\lambda_1} s(\lambda, \{\lambda_j\}) \Big|_{\lambda = \lambda_1} + \partial_{\lambda} s(\lambda, \{\lambda_j\}) \Big|_{\lambda = \lambda_1}. \quad (29)$$

Второе слагаемое в правой части (29) положительно в силу монотонности $s(\lambda)$ на $\mathbb{R} \setminus \cup \nabla_i$: $\partial_{\lambda} s(\lambda) > 0$. Покажем, что

$$\partial_{\lambda_1} s(\lambda) \Big|_{\lambda = \lambda_1} = -\frac{1}{2} \partial_{\lambda} s(\lambda) \Big|_{\lambda = \lambda_1}. \quad (30)$$

Действительно, функция $s(\lambda)$ представляется в виде отношения двух полиномов от λ : $s(\lambda) = A(\lambda)/B(\lambda)$, причем выполнено тождество

$$2(\lambda - \lambda_1)(\partial_{\lambda_1} A - s(\lambda_1)\partial_{\lambda_1} B) + (A - s(\lambda_1)B) = 0, \quad (30')$$

так как в левой части стоит полином степени g (члены порядка λ^{g+2} и λ^{g+1} в асимптотике при $\lambda \rightarrow \infty$ сокращаются), имеющий $g+1$ нуль в лакунах ∇_i , $i=1, \dots, g+1$. Вычисляя левую часть в (30) и используя тождество (30'), мы приходим к равенству

(30) и, следовательно, к доказательству формулы (28).

Теорема 1 доказана (см. [13, 15]).

С помощью теоремы 1 могут быть доказаны существование и единственность уиземовской деформации Γ , удовлетворяющей граничным условиям (26). Доказательство этого факта достаточно громоздко и полностью аналогично приведенному в [11], поэтому мы его опустим.

Отметим лишь, что в интересующем нас случае граничных условий (3) уиземовская перестройка представляет собой монотонное движение точки ветвления λ_1 кривой Γ . Движение начинается при $\xi = \xi_a$ и кончается при $\xi = \xi_b$. Константы ξ_a , ξ_b определяются из (25) и условий $\tilde{\lambda}_1(\xi_a) = \lambda_1^{(-)}$, $\tilde{\lambda}_1(\xi_b) = \lambda_1^{(+)}$. При $\xi < \xi_a$ кривая Γ совпадает с Γ_- при $\xi > \xi_b$ - с Γ_+ .

В заключение параграфа приведем факты, необходимые для дальнейшего асимптотического анализа.

О п р е д е л е н и е. Точка $P_0 \in \Gamma$ называется стационарной, если выполнено равенство

$$d(\Omega_1(P_0)\xi + \Omega_2(P_0)) = 0. \quad (31)$$

Из доказанной выше монотонности функции $s(\lambda)$ следует, что при фиксированном ξ на контуре $\partial\Gamma^+$ не может находиться более двух стационарных точек (кроме $P_0, \sigma P_0$).

Пусть $P_0 \in \partial\Gamma^+$. Рассмотрим функцию $f(P) = \text{Im}(\Omega_1\xi + \Omega_2)$ при $P \in \Gamma^+$. Справедлива следующая

Л е м м а 1. Функция $f(P)$ не меняет знака в каждой из лакун спектра \mathcal{V}_1 , при этом

$$\text{sign } f(P) = \begin{cases} 1, & \lambda(P) > \lambda(P_0), \\ -1, & \lambda(P) < \lambda(P_0). \end{cases} \quad (32)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при $P \in \mathcal{V}_1$, $\text{Im}(\Omega_1\xi + \Omega_2) = (\Omega_1\xi + \Omega_2)(P)$. По условию нуль функции $f'(P)$ лежит на контуре $\partial\Gamma^+$, поэтому в каждой из $g+1$ лакун находится лишь один из нулей функции $f'(P)$ (см. доказательство теоремы 1).

Из нормированности дифференциалов $d\Omega_i$ следует, что $f(\lambda_i) = 0$, $i = 1, \dots, 2g+2$.

Следовательно, функция $f(P)$ не меняет знака внутри каждой из лакун. Формула (32) следует из монотонности функции $s(\lambda)$ на $\mathbb{R} \setminus \{\cup \mathcal{V}_1\}$, которая позволяет оценить знак функции $f'(P)$ вблизи края лакуны $\text{sign } f'(P) = \text{sign } \text{Im } \Omega_1(P) \cdot \text{sign } (\xi + s(\lambda))$.

Лемма 1 доказана.

§ 5. Асимптотический анализ задачи Римана

Построим приближенное решение МЭР (21)-(23). Для этого рассмотрим уиземовскую поверхность Γ и построим (2×2) -матричную функцию $\Psi_\Lambda(P)$ по формуле

$$\Psi_{\Lambda}(P) = \begin{pmatrix} \frac{\Phi(\sigma P)}{\Delta_{-}(\sigma P)}, & \Phi(P) \end{pmatrix}, \quad P \in \Gamma^{*}, \quad (33)$$

где функция $\Phi(P)$ задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \tilde{e}_{-}(P) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\mathcal{L}}} M(P, Q) f(Q), \\ f(P) &= \begin{cases} -r(P) (A\tilde{e}(\sigma P) + B(\sigma P) \tilde{e}P), & P \in \partial\Gamma^{*}, \\ (1+r_{*}^{+}(P)) A\tilde{e}(P), & P \in \gamma^{+}, \\ (1-r_{*}^{+}(P)) A\tilde{e}(P), & P \in \gamma^{-}. \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

Контур интегрирования $\tilde{\mathcal{L}}$ есть объединение трех контуров $\tilde{\mathcal{L}} = \{P: P \in \partial\Gamma^{*} \cup \gamma^{+} \cup \gamma^{-}\}$, где $\gamma^{-} = \sigma\gamma^{+}$, а контур γ^{+} лежит на верхнем листе $\gamma^{+} \subset \Gamma^{*}$ и соединяет точку ветвления $\tilde{\lambda}_1$ с точкой $\sigma\tilde{\lambda}_1$ (см. (15)), т. е. $\lambda(\gamma^{+}) = [\tilde{\lambda}_1, \sigma\tilde{\lambda}_1]$.

Аналог ядра Коши $M(P, Q)$ имеет вид

$$M(P, Q) = \frac{d\lambda(Q)}{\lambda(Q) - \lambda(P)} \frac{\{\tilde{e}_{-}(P), \tilde{e}_{-}(\sigma Q)\}}{\{\tilde{e}_{-}(Q), \tilde{e}_{-}(\sigma Q)\}}. \quad (35)$$

Функция Бейкера-Ахиезера $\tilde{e}_{-}(P)$ построена по поверхности Γ , дивизору D_{-} и параметру β_{-} . Функции $A(P)$, $B(P)$ определены следующим образом

$$\begin{cases} B(P) = -r(P) A(\sigma P) \eta(\lambda(P) - \lambda(P_0)), & P \in \partial\Gamma^{*}, \\ A(P) = \tilde{\alpha}_{*}^{+}(P), & P \in \tilde{\mathcal{L}}. \end{cases} \quad (36)$$

Здесь $\eta(x) = \frac{1 + \operatorname{sign} x}{2}$ - функция Хэвисайда,

$$\tilde{\alpha}(P) = c_1 \frac{\Theta(U(P) - U(D) - K)}{\Theta(U(P) - U(D_{-}) - K)} \exp \left(- \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\mathcal{L}}} \int_{\infty^{+}}^P \hat{M}(P', Q) \times \ln \tilde{g}(Q) \right), \quad (37)$$

функция $\tilde{g}(P)$ задается формулой

$$\tilde{g}(P) = \begin{cases} 1 - r(P) r(\sigma P) \eta(\lambda(P) - \lambda(P_0)), & P \in \partial\Gamma^{*}, \\ -r_{*}^{+}(P), & P \in \gamma^{+}, \\ r_{*}^{+}(\tau P), & P \in \gamma^{-}. \end{cases} \quad (38)$$

Аргумент функций $r_{*}^{+}(P)$ фиксируется условием

$$\begin{cases} \arg r_{*}^{+}(\tilde{\lambda}_1) = -\pi, \\ \arg r_{*}^{+}(\sigma\tilde{\lambda}_1) = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Дивизор $\tilde{D}(\xi)$ определяется из условия однозначности

$$U(\tilde{D}) = U(D_-) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\alpha}} \ln \tilde{g}(Q) \omega(Q). \quad (40)$$

Функции $\tilde{e}(P)$ в (34) построены на Γ по дивизору \tilde{D} и параметру $\tilde{\beta}$, определяемому из соотношения

$$\tilde{\beta} = \beta_- \tilde{\alpha}(\omega^-) / \tilde{\alpha}(\omega^+). \quad (41)$$

Константа c_1 в (37) вычисляется из условия $\tilde{\alpha}(\omega^-) = \sqrt{\tilde{\beta}/\beta_-}$.

Построенная функция $\Psi_A(P)$ асимптотически удовлетворяет МЗР (21)-(23) при $t \rightarrow \infty$.

Действительно, заметим, что интеграл типа Коши в (34) содержит быстрые осцилляции при $t \rightarrow \infty$, и воспользуемся аналогом известной формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta)}{\eta - \mu - i0} e^{it\varphi(\eta)} d\eta = f(\mu) e^{it\varphi(\mu)} + O(1/\sqrt{t} (\mu - \mu_0)), \quad (42)$$

где μ_0 - простой нуль функции $\varphi'(\mu)$, расположенный на вещественной оси, $\eta(x)$ - функция Хэвисайда.

Роль $\varphi'(\mu)$ в нашем случае играет функция $\frac{d(\Omega_1 \xi + \Omega_2)}{d\lambda}$ (см. (10)), определяющая,

согласно (31), стационарные точки $P_0, \sigma P_0$.

Отметим, что в процессе уиземовской деформации при $\xi \in [\xi_a, \xi_b]$ точка P_0 совпадает с подвижной точкой ветвления $\tilde{\lambda}_1$; при $\xi > \xi_b$ точка P_0 принадлежит контуру $\partial\Gamma^+$, поэтому поправочный член имеет тот же вид, что и в (42). При $\xi < \xi_a$ существуют как области экспоненциального убывания поправки (стационарная точка P_0 находится в лакуне ∇_1), так и в области с описанным выше степенным убыванием по t .

Нетрудно убедиться, что при $P \in \partial\Gamma^+$ в старшем порядке по t выполнено равенство

$$\Phi_*^-(P) - \Phi_*^+(P) = r(P) \Phi_*^+(\sigma P), \quad (43)$$

которое является следствием (42), и условия сопряжения для $\tilde{\alpha}(P)$

$$\tilde{\alpha}_*^-(P) = \tilde{\alpha}_*^+(P) \tilde{g}(P), \quad P \in \tilde{\mathcal{L}}. \quad (44)$$

Кроме того, заметим, что при $P \in \gamma$ выполнено соотношение

$$\Phi_*^-(P) = \Phi_*^+(P) \tilde{g}(P). \quad (45)$$

Из (43), (45) немедленно следует справедливость в старшем порядке по t условий сопряжения (22) для функции $\tilde{\Psi}(P)$.

Для $P \in \partial\Gamma^+$ это проверяется непосредственно, а при $P \in \gamma^\pm$ достаточно заметить, что первый столбец функции $\Psi_A(P)$ экспоненциально мал по t , согласно лемме 1, а также учесть треугольность матрицы сопряжения $G(P)$ при $P \in [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_1^{(-)}]$.

Отметим, что для функции $\Psi_A(P)$ выполнено условие "регулярности особенностей" (23). Требование (39) позволяет скомпенсировать нуль функции $\Delta_-(P)$ в точке $P = \Lambda_1$

(см. (33)) и тем самым обеспечивает регулярность $\Psi_A(P)$ в этой точке.

Выбор параметра β в виде (41) обеспечивает выполнение условия (21).

Таким образом, построенная функция $\Psi_A(P)$ асимптотически решает МЗР (21)-(23), причем при $P \in E$ выполнена оценка

$$\Psi_A(P+i0) G(P) \Psi_A^{-1}(P-i0) = I + \delta(P, \xi, t), \quad (46)$$

$$\delta(P, \xi, t) = \begin{cases} O((P-P_0)^{-1} \cdot t^{-\delta_0}), & |P-P_0| \geq t^{-\delta_0}, \\ O(1), & |P-P_0| \leq t^{-\delta_0}, \quad \delta_0 > 0. \end{cases}$$

Это позволяет получить следующую оценку для истинного решения МЗР (21)-(23):

$$\Psi(P) = (I + O(t^{-\delta_0})) \Psi_A(P), \quad |\operatorname{Im} P| > c_2 > 0. \quad (47)$$

Действительно, рассмотрим функцию $\chi = \Psi \Psi_A^{-1}$. Легко видеть, что $\chi(P)$ аналитична при $|\operatorname{Im} P| > 0$, имеет асимптотику $\chi(P) \rightarrow I$ при $P \rightarrow \infty^{\pm}$ и удовлетворяет условию сопряжения при $P \in E$

$$\chi(P+i) = (I + \delta(P, \xi, t_0)) \chi(P-i0). \quad (48)$$

Отсюда устанавливается представление для $\chi(P)$

$$\chi(P) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{d\eta}{\eta-P} \delta(\eta, t) \chi(\eta-i0). \quad (49)$$

Исследуя соответствующее сингулярное интегральное уравнение, можно доказать, что $\chi(P)$ - ограниченная функция, поэтому из (49) следует оценка (47), а следовательно (см. (24)), и требуемая асимптотическая формула (4), в которой $\tilde{\Gamma}$ - уиземовская риманова поверхность, а параметры \tilde{D} и $\tilde{\beta}$ задаются формулами (40), (41). Асимптотический анализ МЗР при $\xi \in [\xi_a, \xi_b]$ совершенно аналогичен вышеизложенному. Отметим лишь, что характер убывания поправочного члена в (47) и (4) несколько иной (см. (42)). Так, при $\xi > \xi_b + \epsilon$, $\delta = \frac{1}{2}$ в формуле (4) (ср. с [7]).

В заключение отметим, что учет солитонных степеней свободы, а также рассмотрение более общих, чем (3) начальных условий, также могут быть проведены в рамках предложенной в работе схемы.

Соответствующая модификация асимптотической конструкции изложена в [12] на примере уравнения Кортевега-де Фриза.

З а м е ч а н и е 1. В [14] описано приложение задачи (1), (2) к задаче о нелинейной дифракции Фраунгофера в дефокусирующей среде.

З а м е ч а н и е 2. Уравнения (25) являются автомоделной редукцией уравнений модуляций Уизема

$$(\partial_T + s(\lambda_1) \partial_X) \lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, 2g+2. \quad (50)$$

Результаты о монотонности функции $s(\lambda)$, полученные в ходе доказательства теоремы 1, позволяют провести детальное исследование уравнений (50), в частности выделить класс начальных данных, для которых при $\forall T > 0$ существует гладкое решение задачи Коши для уравнения (50), и вычислить асимптотику этого решения при $T \rightarrow \infty$ (см. [13, 15]).

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Захаров В.Е. и др. Теория солитонов. М.: Наука, 1980. 495 с.
- [2] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. 528 с.
- [3] Итс А.Р. Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений // Вестн. ЛГУ. 1976. N 7. С.39-46.
- [4] Захаров В.Е., Мананков С.В. Асимптотическое поведение нелинейных волновых систем, интегрируемых методом обратной задачи // ЖЭТФ. 1976. Т.71, N 1. С.203-215.
- [5] Итс А.Р., Устинов А.Ф. Временная асимптотика решения нелинейного уравнения Шредингера с граничными условиями типа "ступеньки" // ДАН СССР. 1986. Т.291, вып.1. С.91-95.
- [6] Котляров В.П. Асимптотические солитоны нелинейного уравнения Шредингера. Препринт ФТИНТ АН УССР. Харьков, 1986. N 39. 36 с.
- [7] Бикбаев Р.Ф., Шарипов Р.А. Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для уравнения $Kg\phi$ в классе потенциалов с конечнозонным поведением при $x \rightarrow \pm \infty$ // ТМФ. 1989. Т.78, N 3. С.345-356.
- [8] Фирсова Н.Е. Уравнение $Kg\phi$ с периодическими граничными условиями // Мат. сб. 1988. Т.135(177), N 2. С.261-268.
- [9] Flaschka H., Forest M., McLaughlin L. Multiphase averaging and the inverse scattering solution of KdV // Comm. Pure Appl. Math. 1980. Vol.33, N 6. P.739-784.
- [10] Кричевер И.М. Метод усреднения для двумерных интегрируемых уравнений // Функцион. анализ и его прил. 1988. Т.22, вып.3. С.37-53.
- [11] B i k b a e v R.F., N o v o k s h e n o v V.Yu. Self-similar solutions of the Whitham equations and KdV equation with finite-gap boundary conditions // Proc. III Intern. Workshop. Kiev, 1988. Vol.1. P.32-35. Бикбаев Р.Ф., Новокшенов В.Ю. Уравнение $Kg\phi$ с конечнозонными граничными условиями и однопараметрические решения уравнений Уизема // Асимптот. свойства диффер. уравнений. Уфа, 1989. С.3-35.
- [12] Бикбаев Р.Ф. Об уравнении $Kg\phi$ с конечнозонными граничными условиями. Препринт БНЦ УРО АН СССР. Уфа, 1988. 28 с.
- [13] Бикбаев Р.Ф. Гиперболические системы Уизема и интегрируемые уравнения // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1989. Т.181. С.3-14.
- [14] Бикбаев Р.Ф. О дифракции в дефокусирующей нелинейной среде // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1989. Т.180. С.15-24.
- [15] Levermore C.D. Hyperbolic structure of the KdV zero dispersion limit // Com. in partial dif. equat. 1988. Vol.13, N 4. P.495-511.

Институт математики

с ВЦ Уро АН СССР

450057, Уфа

ул. Тукаева, д. 50

Поступило 14 июня 1989 г.