Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Л. К. Орлик, М. А. Рутман, Об экспоненциальных показателях решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами,
Изв. вузов. Матем., 1982, номер 6, 80–81

https://www.mathnet.ru/ivm6838

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.169
11 декабря 2025 г., 13:09:01

Л. К. Орлик, М. А. Рутман УДК 517.926

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть $f(t)$—вещественная или комплекснозначная функция экспоненциального типа, заданная на полуоси: $0 \leqslant t < \infty$. Экспоненциальным показателем (коротко: показателем) этой функции называется вещественное число

$$\alpha = \overline{\lim_{t\to\infty}} (t^{-1} \ln |f(t)|).$$

Ясно, что при любом $\varepsilon > 0$

$$1^\circ.\ \lim_{t\to\infty} (|f(t)| / e^{(\alpha+\varepsilon)t}) = 0; \quad 2^\circ.\ \overline{\lim_{t\to\infty}} (|f(t)| / e^{(\alpha-\varepsilon)t}) = \infty.$$

Класс функций, показатель которых не превосходит α, обозначим через E_α. Это линейное пространство. Рассмотрим множество функций из E_α, удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} (|f(t)| e^{\alpha t}) < \infty.$$

Обозначим это множество через B_α. Легко видеть, что B_α — банахово пространство с нормой

$$\|f\|_\alpha = \sup_{0\leqslant t<\infty} (|f(t)| / e^{\alpha t}).$$

Читатель легко убедится, что сходимость по данной норме равносильна равномерной сходимости на всяком ограниченном множестве, принадлежащем полуоси.)

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $L(y) = y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(t) y$ $(0 \leqslant t < \infty)$ с коэффициентами, ограниченными на полуоси: $|p_k(t)| \leqslant c_k < \infty$ $(k = \overline{1, n})$.

Известно [1], что все решения однородного уравнения

$$L(y) = 0 \tag{1}$$

имеют конечные показатели [1]. Пусть $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$—базис уравнения (1), $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$—соответствующие показатели. Наибольший из них обозначим через α_0. Он называется старшим показателем (см. [2]). Ясно, что всякое решение уравнения (1) имеет показатель не больше α_0.

Рассмотрим, далее, неоднородное уравнение

$$L(y) = f(t). \tag{2}$$

Пусть правая часть $f(t)$ пробегает E_α. Легко видеть, что при этом множество всех решений уравнения (2) (при всевозможных $f(t)$ и произвольных начальных условиях) покрывается некоторым классом E_β при β достаточно большом. Точную нижнюю грань таких β обозначим через $\varkappa(\alpha)$. В данной работе выясняется вид $\varkappa(\alpha)$ для случая уравнения с периодическими коэффициентами. Пусть, таким образом,

$$p_j(t+\omega) = p_j(t) \quad (j = \overline{1, n}). \tag{3}$$

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. $\varkappa(\alpha) = \alpha_0$ *при* $\alpha \leqslant \alpha_0$; $\varkappa(\alpha) = \alpha$ *при* $\alpha > \alpha_0$.

Этот результат аналогичен приведенным в [3], [4], [5]. Там, однако, рассматривается уравнение с постоянными или „медленно" меняющимися коэффициентами. (Ниже мы покажем, что для уравнения с ограниченными непериодическими коэффициентами теорема, вообще говоря, неверна.)

Доказательство основывается на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть* $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$—*базис уравнения* (1), $W(t) = |y_j^{(k-1)}(t)|_1^n$ — *вронскиан. Миноры элементов последней строки этого вронскиана линейно независимы на любом (как угодно малом) промежутке из* $[0, \infty)$.

Пусть $F(t, s)$—функция двух переменных, заданная при $0 \leqslant t < \infty$. Экспоненциальным показателем этой функции по t называется верхняя грань всевозможных показателей функций $(F(t, s_0)$ $(0 \leqslant s_0 < \infty)$.

---

[1] Предполагается, что для этого и для соответствующего неоднородного уравнения имеет место теорема существования и единственности.

Лемма 2. *Рассмотрим функцию* $F(t, s) = \gamma_1(s) f_1(t) + \gamma_2(s) f_2(t) + \ldots + \gamma_m(s) f_m(t)$. *Если показатели функций* $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$ *равны соответственно* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, *а* $\gamma_1(s), \gamma_2(s), \ldots, \gamma_m(s)$ *линейно независимы, то показатель* $F(t, s)$ *равен наибольшему из* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$.

Основная теорема доказывается посредством довольно кропотливого исследования функции Коши

$$K(t, s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & \ldots & y_n(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) & \ldots & y_n'(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(s) & y_2^{(n-2)}(s) & \ldots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \end{vmatrix},$$

ее производной $\partial K(t, s)/\partial s$, а также интегрального оператора

$$z(t) = \int_0^t K(t, s) f(s)\, ds,$$

который задает решение уравнения (2) при нулевых начальных условиях. Исследуется поведение этого оператора на пространствах E_α и B_α. Используется, в частности, классическая теорема Банаха о замкнутом операторе.

Замечание. Как было уже сказано, теорема неверна для произвольного уравнения (2) с ограниченными, но непериодическими коэффициентами. Это видно из следующего примера. Рассмотрим уравнение $y'(t) - p(t) y(t) = f(t)$, где

$$p(t) = \begin{cases} -1, \text{ если } 2^n - 2 \leqslant t < 3 \cdot 2^{n-1} - 2; \\ 1, \text{ если } 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \leqslant t < 2^{n+1} - 2, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Решением соответствующего однородного уравнения является функция с показателем, равным нулю. Следовательно, $\alpha_0 = 0$. Однако, при $f(t) \equiv 1$ ($f(t) \in E_0$) решение данного неоднородного уравнения имеет показатель, равный 1/4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боль П. Г. Избранные труды.—Рига, 1961.—238 с.
2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.—М., 1970.—534 с.
3. Персидский К. П. К теории устойчивости интегралов системы дифференциальных уравнений, I.—Изв. физ.-матем. о-ва при Казан. ун-те, 1936—37, сер. 3, т. 8, с. 47—85.
4. Персидский К. П. К теории устойчивости интегралов системы дифференциальных уравнений.—Изв. физ.-матем. о-ва при Казан. ун-те, 1939, т. 11, с. 29—45.
5. Рутман М. А. Критерий ограниченности решений для линейных дифференциальных уравнений с частными производными, обладающих старшим членом.—ДАН СССР, 1962, т. 147, № 4, с. 789—792.

г. Одесса

Поступила
12 XII 1980

Р. Н. Шарипов

УДК 519.644

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Вопросы оптимизации квадратурных и кубатурных формул (кв. и куб. ф.) для сингулярных интегралов (с. и.) рассматривались в работах В. В. Иванова, Б. Г. Габдулхаева, Ю. И. Маковоза и М. А. Шешко, Р. Н. Шарипова (см. [1]—[5]). В данной работе эти вопросы исследованы для с. и. Адамара, а также предложен другой подход к оптимизации методов вычисления с. и.

Пусть $H_\alpha^r[-1, 1]$—класс r ($r \geqslant 0$ целое) раз непрерывно дифференцируемых функций на $[-1, 1]$, r-е производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α. Через $H_{\alpha,\beta}[-1, 1]^2$ обозначим класс функций двух переменных на $[-1, 1]^2$, удовлетворяющих условию Гёльдера по первой переменной с показателем α равномерно относительно второй и по второй переменной с показателем β равномерно относительно первой.