LTE-лемма и рекурренты

П.КОЖЕВНИКОВ

Рассмотрим формулировки трех классических задач.

Задача 1. *Докажите, что для каждого натурального k число* $\underbrace{111\ldots1}_{3^k \text{ единиц}}$ *делится на* 3^k.

Задача 2. *Для каждого натурального n определите, на какую наибольшую степень двойки делится число* $5^n - 3^n$.

Задача 3. *Последовательность Фибоначчи определена условиями:* $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ *для* $n \geq 2$. *Докажите, что для каждого натурального k число f_n делится на 5^k тогда и только тогда, когда n делится на 5^k.*

Сходство постановок просматривается: для разных целочисленных последовательностей нас интересует вопрос, на какую степень заданного простого числа делятся члены наших последовательностей.

Ниже для целого числа $a \neq 0$ и простого числа p будем обозначать через $\nu_p(a)$ степень вхождения простого числа p в разложение числа a, т.е. равенство $\nu_p(a) = \alpha$ будет означать, что $a \vdots p^\alpha$, но $a \not\vdots\, p^{\alpha+1}$. В частности, условие $\nu_p(n) = 0$ эквивалентно тому, что n не делится на p. Также условимся считать, что $\nu_p(0) = \infty$.

В этой статье мы начнем с отдельного обсуждения каждой из приведенных задач, а затем разовьем небольшую теорию, объединяющую все эти задачи.

Упражнение 1. а) При каких k работает следующее «решение» задачи 1: «сумма цифр числа равна 3^k, поэтому и само число делится на 3^k»?

б) Используя равенство

$$\underbrace{1111\ldots111}_{3m \text{ единиц}} = \underbrace{111\ldots1}_{m \text{ единиц}} \cdot 100\ldots0100\ldots01,$$

докажите утверждение задачи 1 по индукции.

в) Отметим, что в задаче 1 утверждается, что $\nu_3\left(\underbrace{111\ldots1}_{3^k \text{ единиц}}\right) \geq k$. С помощью рассуждения из пункта б) получите (формально, используя индукцию по $\nu_3(n)$), что для любого натурального n выполнено $\nu_3\left(\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ единиц}}\right) = \nu_3(n)$.

Далее, в задаче 2 нас просят отыскать $\nu_2\left(5^n - 3^n\right)$.

Упражнение 2. а) Докажите, что при нечетном m выполнено $\nu_2\left(5^{km} - 3^{km}\right) = \nu_2\left(5^k - 3^k\right)$. Выведите отсюда, что при нечетном n выполнено $\nu_2\left(5^n - 3^n\right) = 1$.

Указание. Используйте формулу разности степеней.

б) Докажите, что при четном m выполнено $\nu_2\left(5^m + 3^m\right) = 1$.

в) Докажите, что если $\nu_2(n) \geq 1$, то $\nu_2\left(5^n - 3^n\right) = \nu_2(n) + 3$.

Как видим, с задачами 1 и 2 помогает справиться индукция.

Вернемся к обсуждению родства задач 1, 2, 3. Если уйти от десятичной записи в формулировке задачи 1, воспользовавшись тем, что $\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ единиц}} = \dfrac{10^n - 1}{9}$, условия задач 1 и 2 становятся совсем похожими.

Кажется, теперь уместно вспомнить следующее общее утверждение, широко известное в «узких олимпиадных кругах» как Lifting The Exponent Lemma (LTE-лемма).

Формулировка LTE-леммы

1) Случай $p > 2$. *Пусть $p > 2$ – простое число. Пусть a и b – различные целые числа, не делящиеся на p и такие, что $a - b$ делится на p. Тогда для любого натурального n выполнено*

$$\nu_p\left(a^n - b^n\right) = \nu_p(n) + \nu_p(a - b).$$

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20220802

2) Случай $p = 2$. *Пусть a и b – различные целые нечетные числа такие, что $a - b$ делится на 4. Тогда для любого натурального n выполнено*

$$\nu_2\left(a^n - b^n\right) = \nu_2(n) + \nu_2(a - b).$$

Доказательство LTE-леммы можно провести индукцией по $\nu_p(n)$, как показано, например, в статье «Степени n и n-е степени» («Квант» №1 за 2012 г.). Здесь доказывать LTE-лемму не будем, так как ниже мы намерены доказать теорему, обобщающую LTE-лемму.

Видим, что задача 1 сводится к LTE-лемме для $p = 3$, $a = 10$, $b = 1$. Формально условие задачи 2 не удовлетворяет случаю $p = 2$ LTE-леммы. Но все равно LTE-лемма здесь почти все «решает». Для четного n в задаче 2 можно положить $p = 2$, $a = 25$, $b = 9$ и вывести результат напрямую из LTE-леммы. (Случай же нечетного n несложно разобрать отдельно.)

Таким образом, LTE-лемма для последовательностей $u_n = a^n - b^n$, удовлетворяющих особым условиям, дает результат: $\nu_p(u_n) = \nu_p(n) + \text{const}$.

Подумаем теперь, как связана формулировка задачи 3 с формулировками задач 1,2, ну или с LTE-леммой. Известно (и можно убедиться в этом, решив упражнение ниже), что последовательность $u_n = a^n - b^n$ так же, как, например, последовательность Фибоначчи, представляет собой линейную рекурренту второго порядка (т.е. каждый член последовательности выражается линейно через два предыдущих).

Упражнение 3. а) Проверьте, что каждая из последовательностей $\{a^n\}$ и $\{b^n\}$, $a \neq b$, удовлетворяет условию (линейной рекурренте)

$$u_{n+1} = cu_n - du_{n-1}, \qquad (1)$$

где $c = a + b$, $d = ab$, так что многочлен $x^2 - cx + d$ имеет различные корни a и b.

б) Наоборот, пусть многочлен $x^2 - cx + d$ имеет различные корни a и b. Тогда условию (1) удовлетворяет каждая последовательность вида $\{\lambda a^n + \mu b^n\}$, где λ и μ – фиксированные константы.

С рекуррентами, кажется, иметь дело сложнее, поскольку член последовательности выражен не явно, а через предыдущие. Явная формула для линейных рекуррент, в частности для чисел Фибоначчи, тоже существует, но она не такая простая, в ней фигурируют иррациональности, и можно усомниться, поможет ли такая формула...

В следующей лемме пока что вспомним, как для рекуррент, похожих на последовательность Фибоначчи, ведут себя остатки при делении на фиксированное число k.

Лемма. *Пусть k – натуральное число, а u_0, u_1, ... – такая последовательность целых чисел, что*

$$u_{n+1} = cu_n - du_{n-1}$$

для фиксированных целых c и d, где d взаимно просто с k. Кроме того, пусть u_0 и u_1 дают соответственно остатки 0 и 1 при делении на k. Пусть m – минимальное натуральное такое, что $u_m \vdots k$. Тогда $u_s \vdots k$ тогда и только тогда, когда номер $s \vdots m$.

Доказательство. Заметим, что u_{m+1} взаимно просто с k. Действительно, если предположить противное, u_{m+1} делится на некоторое простое q такое, что $k \vdots q$. Из (1) по цепочке мы получили бы, что $u_{m-1} \vdots q$, $u_{m-2} \vdots q$, ..., $u_1 \vdots q$ – противоречие.

Положим $u_{m+1} \equiv t \pmod k$, где НОД$(t, k) = 1$. Имеем $u_m \equiv tu_0 \equiv 0 \pmod p$, $u_{m+1} \equiv tu_1 \equiv t \pmod p$. Видим, что остатки u_m и u_{m+1} по модулю p получаются, соответственно, из u_0 и u_1 домножением на t. Пользуясь рекуррентным соотношением $u_{n+1} = cu_n - du_{n-1}$, получаем последовательно, что $u_{l+m} \equiv tu_l \pmod p$ для всех натуральных $l = 1, 2, \ldots$. Значит, $u_{m+l} \vdots k$ тогда и только тогда, когда $u_m \vdots k$. Отсюда получаем утверждение леммы.

(Отметим, что утверждение леммы не изменится, если условие $u_1 \equiv 1 \pmod k$ заменить на $u_1 \equiv s \pmod k$, где НОД$(s, k) = 1$.)

Упражнение 4. Рассмотрим последовательность остатков при делении на 5 членов последовательности Фибоначчи f_n. Она имеет вид:

1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, ... Докажите, что эта последовательность остатков имеет период длины 20, при этом f_n делится на 5 тогда и только тогда, когда n делится на 5. Как определить момент, с которого последовательность остатков начнет повторяться?

Оказывается, «регулярное» поведение последовательности $\nu_p(u_n)$ наблюдается не только у последовательностей, удовлетворяющих LTE-лемме, но и у более широкого класса линейных рекуррент второго порядка. Ниже сформулируем и докажем соответствующие теоремы.

Основная теорема для $p \geq 5$

Формулировка. *Пусть $p \geq 5$ – простое число. Пусть c, d – целые числа, не делящиеся на p, для которых $D = c^2 - 4d$ не равно 0 и делится на p. Рассмотрим линейную рекурренту $\{u_n\}$, заданную равенством*

$$u_{n+1} = cu_n - du_{n-1} \qquad (1)$$

и начальными условиями $u_0 = 0$, $u_1 \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\nu_p(u_n) = \nu_p(u_1) + \nu_p(n). \qquad (2)$$

Перед тем, как доказать эту теорему, сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. Нам потребуется как данное равенство (1), так и приведенная ниже явная формула (3), задающая u_n из условия теоремы:

$$u_n = \frac{u_1}{\sqrt{D}}\left(\left(\frac{c+\sqrt{D}}{2}\right)^n - \left(\frac{c-\sqrt{D}}{2}\right)^n\right) \qquad (3)$$

(здесь при $D < 0$ число $\sqrt{D}$ – комплексное чисто мнимое).

Не будем останавливаться на выводе формулы (3), полагая, что читатель либо может вывести ее сам (для линейных рекуррент на этот счет есть соответствующая теория), либо убедиться в правильности этой формулы непосредственно, проверив, что явное выражение из (3) удовлетворяет и рекурренте (1) и начальным условиям.

Замечание 2. Теорему будем доказывать в случае $u_1 = 1$. Этого достаточно, так как общий случай сводится к этому частному случаю домножением всей последовательности на константу.

Упражнения

5. Проверьте, что утверждение LTE-леммы для $p \geq 5$ является частным случаем нашей теоремы.

Указание. Положите $c = a + b$, $d = ab$ и проверьте все условия теоремы: покажите, что из условий LTE-леммы следует, что c и d не делятся на p, а D делится на p (и даже на p^2).

6. Проверьте, что задача 3 про числа Фибоначчи является частным случаем теоремы.

Доказательство теоремы. Далее, в силу замечания 2, будем рассматривать лишь случай $u_1 = 1$. Применим (как и для решения наших вводных задач) индукцию по $\nu_p(n)$.

Переход: $n \to np$. Наша цель – показать, что при любом натуральном n выполнено $\nu_p(u_{np}) = \nu_p(u_n) + 1$.

Положим $\left(c+\sqrt{D}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{D}$, где $x_n = c^n + C_n^2 \cdot c^{n-2}D + \ldots$ – сумма слагаемых бинома, взятых через один, а $y_n\sqrt{D}$ – сумма остальных слагаемых бинома. Ясно, что $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$. При этом так как c не делится на p, а D делится на p, то x_n не делится на p. Далее, имеем $\left(c-\sqrt{D}\right)^n = x_n - y_n\sqrt{D}$, поэтому из явной формулы (3) следует, что

$$u_n = \frac{y_n}{2^{n-1}}.$$

Запишем

$$u_{np} = \frac{1}{2^{np}\cdot\sqrt{D}}\left(\left(\left(c+\sqrt{D}\right)^n\right)^p - \left(\left(c-\sqrt{D}\right)^n\right)^p\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{np}\cdot\sqrt{D}}\left(\left(x_n + y_n\sqrt{D}\right)^p - \left(x_n - y_n\sqrt{D}\right)^p\right) =$$

$$= \frac{2}{2^{np}\cdot\sqrt{D}}\left(C_p^1 x_n^{p-1} y_n\sqrt{D} + C_p^3 x_n^{p-3} y_n^3 \left(\sqrt{D}\right)^3 + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + y_n^p\left(\sqrt{D}\right)^p\right) =$$

$$= \frac{y_n}{2^{np-1}}\left(px_n^{p-1} + C_p^3 x_n^{p-3} y_n^2 D + C_p^5 x_n^{p-5} y_n^4 D^2 + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + y_n^{p-1} D^{\frac{p-1}{2}}\right).$$

Обозначим последнюю скобку через S. Видим, что в этой скобке для первого

слагаемого $\nu_p\left(px_n^{p-1}\right)=1$, второе слагаемое делится на p^2, так как C_p^3 и D делятся на p; остальные же слагаемые в скобке S делятся на D^2 и, следовательно, на p^2. Таким образом, $\nu_p(S)=1$, а значит,

$$\nu_p\left(u_{np}\right)=\nu_p\left(y_n\right)+1=\nu_p\left(u_n\right)+1.$$

Доказательство перехода завершено.

База: $n=0$. Наша цель – показать, что если $\nu_p(n)=0$, т.е. если n не делится на p, то и u_n не делится на p. Из перехода мы уже знаем, что при всех натуральных m, кратных p, выполнено $\nu_p(u_m)>0$, т.е. $u_p, u_{2p}, u_{3p}, \ldots$ делятся на p. Также по условию теоремы $u_0=0$ делится на p.

Используем доказанную выше лемму (проверьте, что все условия ее применения выполнены).

Пусть m – минимальное натуральное такое, что $u_m \vdots p$. Мы знаем, что $1<m\le p$ (так как $u_1=1$ и $u_p \vdots p$). Из леммы мы знаем, что $u_k \vdots p$ тогда и только тогда, когда номер $k \vdots m$. В частности, $p \vdots m$, и поскольку p – простое число, имеем $m=p$. Окончательно, $u_k \vdots p$ тогда и только тогда, когда $k \vdots p$. В частности, это завершает доказательство базы.

Теперь теорема полностью доказана.

Основная теорема для $p=3$

Следующее упражнение показывает, что дословно повторить условие нашей теоремы для $p=3$ не получается.

Упражнение 7. Рассмотрите последовательность $u_0=0$, $u_1=1$, $u_2=2$, $u_{n+1}=2u_n+5u_{n-1}$. Убедитесь, что условия, указанные в теореме для $p\ge 5$, оказываются выполненными при подстановке $p=3$, однако $\nu_3(u_3)\ne 1$.

Приведем верную формулировку для $p=3$.

Формулировка. *Пусть c, d – целые числа, не делящиеся на 3, для которых $D=c^2-4d$ не равно 0 и делится на 3. Рассмотрим линейную рекурренту $\{u_n\}$, заданную равенством*

$$u_{n+1}=cu_n-du_{n-1} \qquad (1)$$

и начальными условиями $u_0=0$, $u_1\in\mathbb{Z}$.

Если $\nu_3(n)=0$, то $\nu_3(u_n)=\nu_3(u_1)$.

Если же $\nu_3(n)\ge 1$, то

$$\nu_3(u_n)=\nu_3(u_1)+\nu_3(n)+\nu_3\left(c^2-d\right)-1. \qquad (2')$$

Таким образом, для n, делящихся на 3, выполнено $\nu_3(u_n)=\nu_3(n)+\mathrm{const}$, только константа здесь не обязательно нулевая. Видим, в частности, что если $c^2-d=0$, то все члены с номерами, кратными 3, будут равны 0.

Упражнение 8. Убедитесь, что LTE-лемма для $p=3$ является частным случаем основной теоремы.

Далее полагаем $u_1=1$. Основные шаги в доказательстве теоремы будут схожи со случаем $p\ge 5$, поэтому приводим схему доказательства в виде упражнений. Для доказательства достаточно:

– сделать *переход*, т.е. показать, что при любом натуральном n, кратном 3, выполнено $\nu_3(u_{3n})=\nu_3(u_n)+1$;

– рассмотреть *базу* $\nu_3(n)=0$, т.е. показать, что в этом случае u_n не делится на 3;

– показать, что при $\nu_3(n)=1$ выполнено $\nu_3(u_n)=\nu_3\left(c^2-d\right)$.

Упражнения

9. а) Убедитесь, что все рассуждения в переходе $n\to 3n$, кроме последнего вывода о $\nu_3(S)=1$, где $S=3x_n^2+y_n^2\cdot D$, остаются в силе. Покажите, что тем самым верно неравенство $\nu_3(S)\ge 1$, а вместе с ним и $\nu_3(u_{3n})\ge\nu_3(u_n)+1$. В частности, видим, что $\nu_3(u_n)\ge 1$ при $\nu_3(n)\ge 1$.

б) Докажите, что имеет место равенство $\nu_3(S)=1$, а вместе с ним и вывод $\nu_3(u_{3n})=$ $=\nu_3(u_n)+1$, если $u_n \vdots 3$.

10. Убедитесь, что все рассуждения в базе $\nu_3(n)=0$ остаются в силе. При этом базу можно доказать и проще, непосредственно изучив остатки по модулю 3. Действительно, последовательность остатков по модулю 3 имеет вид $0,\ 1,\ c,\ c^2-d,\ \ldots$

11. Пусть $\nu_3(n)=1$, т.е. $n=3s$, где s не делится на 3. Пусть $t=\nu_3(u_3)=\nu_3\left(c^2-d\right)$. Рассмотрим последовательность остатков u_n при делении на 3^t. Из леммы мы знаем, что $u_n \vdots 3^t$ тогда и только тогда, когда $n \vdots 3$. Остается выяснить, что $u_n \not\vdots\, 3^{t+1}$ при $\nu_3(n)=1$.

Из перехода знаем, что $\nu_3(u_9)=\nu_3(u_3)+1$, значит, $u_9 \vdots 3^{t+1}$. Докажите, что $m=9$ – минимальное натуральное такое, что $u_m \vdots 3^{t+1}$. Отсюда последует, что $u_n \vdots 3^{t+1}$ тогда и только тогда, когда $n \vdots 9$, т.е. при $\nu_3(u_n)\ge 2$.

Основная теорема для $p = 2$

Формулировка. *Пусть c, d – целые числа, при этом $\nu_2(c) = 1$, d не делится на 2, $D = c^2 - 4d$ не равно 0 (нетрудно показать, что при данных условиях автоматически D делится на 8). Рассмотрим линейную рекурренту $\{u_n\}$, заданную равенством*

$$u_{n+1} = cu_n - du_{n-1} \qquad (1)$$

и начальными условиями $u_0 = 0$, $u_1 \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\nu_2(u_n) = \nu_2(u_1) + \nu_2(n). \qquad (2'')$$

Упражнение 12. Проверьте, что утверждение LTE-леммы для $p = 2$ является частным случаем нашей теоремы.

Как и ранее, считаем, что $u_1 = 1$. Нам потребуется явная формула, которая имеет вид

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{D'}}\left(\left(c' + \sqrt{2D'}\right)^n - \left(c' - \sqrt{2D'}\right)^n\right), \qquad (3'')$$

где $c' = c/2$ и $D' = D/8$.

Доказательство теоремы. *Переход*: $n \to 2n$. Наша цель – показать, что при любом натуральном n выполнено $\nu_2(u_{2n}) = \nu_2(u_n) + 1$.

Здесь переход сделать проще, чем в случае $p > 2$: достаточно, пользуясь формулой разности квадратов, записать

$$u_{2n} = u_n \cdot \left(\left(c' + \sqrt{2D'}\right)^n + \left(c' - \sqrt{2D'}\right)^n\right) =$$
$$= 2u_n\left(c'^n + C_n^2 c'^{n-2}(2D') + \ldots\right).$$

Так как в последней скобке первое слагаемое нечетно, а остальные четны, то вся скобка нечетна, и переход доказан.

База: $n = 0$. Наша цель – показать, что при нечетном n число u_n также нечетно.

Так как c четно, а d нечетно, легко (индукцией по n) восстанавливается четность членов u_n: остатки при делении на 2 будут просто чередоваться.

Теорема доказана.

Упражнение 13. Последовательность $\{u_n\}$ задана условиями: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$ при $n \geq 2$. Докажите, что для любого натурального n выполнено

$$\nu_2(u_n) = \nu_2(n).$$

Заключение

В завершение укажем еще направления, в которых можно обобщать данный сюжет.

Во-первых, отметим, что можно распространять теорию на рекурренты, состоящие из рациональных чисел. Для этого представим рациональное число r в виде $r = p^{\alpha} \cdot \frac{m}{n}$, где α, m, n – целые числа, причем m и n не делятся на p. Показатель α можно обозначить $\nu_p(r)$, в согласии с нашим обозначением для целых r. Отметим, что эти приготовления являются введением в красивую и содержательную теорию p-адических чисел; число $\|r\|_p = p^{-\nu_p(r)}$ называют *p-адической нормой* числа r.

Нашу основную теорему для $p \geq 5$ можно обобщить так:

Пусть $p \geq 5$ – простое число. Пусть A, B, C – целые числа, не делящиеся на p, для которых $D = B^2 - 4AC$ не равно 0 и делится на p. Рассмотрим линейную рекурренту $\{u_n\}$, заданную равенством

$$Au_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = 0 \qquad (1')$$

и начальным условием $u_0 = 0$. Тогда

$$\nu_p(u_n) = \nu_p(u_1) + \nu_p(n).$$

Ее доказательство можно свести к доказательству «целочисленного» варианта теоремы, используя несложное соображение о том, что из рациональных чисел можно получить целые числа домножением на знаменатель. В формулировке можно допустить рациональность коэффициентов A, B, C, но домножение на общий знаменатель сводит этот случай к случаю целых коэффициентов.

Во-вторых, формула (1′) позволяет продолжить нашу последовательность до бесконечной в обе стороны последовательности рациональных чисел

$$\ldots, u_{-3}, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots$$

Утверждение теоремы в таком случае продолжит быть верным (на самом деле формула (1′) задает также рекурренту, выражающую член последовательности через два последующих).

(Окончание см. на с. 18)

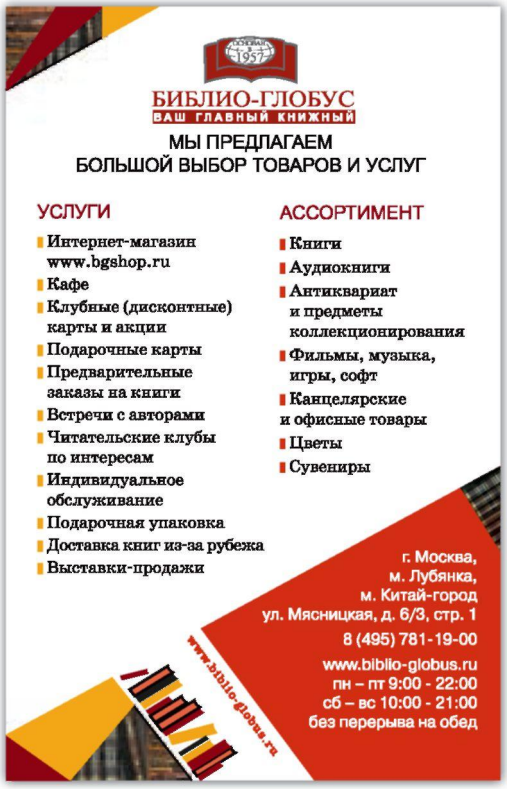
$= a(3n+2) = 2a(n)$, $a(3n+1) = 2a(n)+1$. В самом деле: числа $3n$, $3n+1$ и $3n+2$ отличаются лишь последней цифрой в троичной записи; двойка меняется на 0, а единица сохраняется и далее, будучи на последней позиции в записи числа, дает число на 1 большее, чем число с цифрой 0 на той же позиции, поэтому $a(3n+2) = a(3n)$ и $a(3n+1) = a(n)+1$; наконец, число $3n$ отличается от n лишь дописыванием нуля к троичной записи, что при переинтерпретации троичного разложения как двоичного соответствует удвоению, отсюда $a(n) = 2a(n)$. Для последовательностей $z(n)$ и $y(n)$ существуют похожие формулы – попробуйте адаптировать это рассуждение для них.

Для полноты картины добавим, что если заменять в троичном разложении числа n двойки на T (с чего мы начали), но читать результат как разложение по основанию 2 (чем мы закончили), то получится последовательность A328749, но с противоположными знаками всех элементов.

В OEIS любят и ценят последовательности с красивыми графиками.

(Начало см. на с. 8)

Наконец, еще несколько слов, за которые автор благодарит Алексея Устинова, о том, как наш сюжет естественно погружается в серьезную области науки, p-адический анализ.

Посмотрим, например, на степенную функцию $n \mapsto 7^n$ (определенную на $\mathbb{Z}$). Можно понять, что для $m, n \in \mathbb{Z}$ и заданного $\varepsilon > 0$ неравенство $\left\|7^m - 7^n\right\|_3 < \varepsilon$ выполнено при достаточно малой норме $\|m-n\|_3$. (Читатель может «дешифровать» это утверждение и вывести его в элементарных терминах из LTE-леммы.) Тем самым, получается непрерывность функции $n \mapsto 7^n$, определенной на множестве целых чисел в метрике, индуцированной 3-адической нормой, т.е. когда расстояние между числами a и b задается равенством $d(a,b) = \|a-b\|_3$.

Есть другие нетривиальные последовательности (более сложные, чем степенные функции и линейные рекурренты), для которых близость номеров в p-адической норме влечет и p-адическую близость элементов последовательности, т.е. мы имеем p-адически непрерывную функцию, заданную на целых числах. В таком случае по непрерывности эту функцию можно доопределить до функции, заданной на кольце целых p-адических чисел. Такая процедура называется p-адической интерполяцией. Читателю, желающему серьезно погрузиться в эту теорию, можно рекомендовать, например, книгу Н.Коблица «p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции».