

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.977.8

О РАВНОВЕСИИ ПО ШТАКЕЛЬБЕРГУ
В ПРОГРАММНЫХ СТРАТЕГИЯХ
В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

© 2006 г. М. С. Никольский

Рассмотрим линейный конфликтно управляемый объект (см., например, [1–4])

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv, \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $u \in P \subset R^p$, $v \in Q \subset R^q$, P и Q – выпуклые компакты, A , B , C – постоянные матрицы размерности $n \times n$, $n \times p$, $n \times q$ соответственно. Символом R^k ($k \geq 1$) условимся обозначать k -мерное арифметическое евклидово пространство, элементами которого являются упорядоченные наборы из k чисел, записываемые в виде столбцов. Скалярное произведение векторов $\xi, \eta \in R^k$ введем формулой $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1}^k \xi_i \eta_i$, где ξ_i , η_i – компоненты векторов ξ , η .

Заданы начальное условие

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

константа $T > 0$ и отрезок $\Delta = [0, T]$. Управления $u = u(t) \in P$, $v = v(t) \in Q$, $t \in \Delta$, рассматриваются в классе измеримых по Лебегу функций. Игрок U выбирает в качестве своей стратегии измеримое программное управление $u(t) \in P$, $t \in \Delta$, а игрок V – измеримое программное управление $v(t) \in Q$, $t \in \Delta$.

Паре допустимых управлений $u(t)$, $v(t)$, $t \in \Delta$, и начальному условию (2) по формуле Коши поставим в соответствие решение $x(t)$, $t \in \Delta$, уравнения (1)

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} (Bu(s) + Cv(s)) ds. \quad (3)$$

Игрок U стремится к минимизации своего функционала

$$I(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^T f(x(s), u(s), v(s)) ds \quad (4)$$

с помощью выбора своего допустимого управления $u(\cdot)$, а игрок V – к минимизации своего функционала

$$J(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^T g(x(s), u(s), v(s)) ds \quad (5)$$

с помощью выбора своего допустимого управления $v(\cdot)$. Относительно функции $f(x, u, v)$ (см. (4)) предполагается, что она допускает представление вида

$$f(x, u, v) = f_1(x, u) + a(x)v, \quad (6)$$

где функция $f_1(x, u)$ и ее частные производные по компонентам вектора x непрерывны по совокупности переменных на $R^n \times P$, $a(x)$ – матрица размерности $1 \times q$, причем ее элементы непрерывно дифференцируемы по x на R^n . Относительно функции $g(x, u, v)$ будем предполагать, что она на $R^n \times P \times Q$ имеет вид

$$g(x, u, v) = g_1(x, u) + b(x)v, \quad (7)$$

где функция $g_1(x, u)$ непрерывна на $R^n \times P$, $b(x)$ – матрица размерности $1 \times q$, причем ее элементы непрерывны на R^n . Символы $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ в (4), (5) и далее обозначают измеримые функции $u(t) \in P$, $v(t) \in Q$, $t \in \Delta$, соответственно. В дальнейшем условимся отождествлять допустимые управления $u'(t)$, $u''(t)$, $t \in \Delta$, если они совпадают почти всюду на Δ . Аналогичное соглашение делается и для допустимых управлений $v(t)$, $t \in \Delta$. Множества классов эквивалентности допустимых управлений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ будем обозначать через \mathcal{U}_0 , \mathcal{V}_0 соответственно.

Возможны различные определения оптимальности пары допустимых программных управлений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$. Здесь мы будем использовать некоторую модификацию понятия равновесия по Штакельбергу (по поводу понятия равновесия по Штакельбергу и сходных понятий см., например, [3–7]).

Роль ведущего у нас будет играть игрок V : он сообщает о выборе своего допустимого управления (стратегии) $v(\cdot)$ игроку U . Зная $v(\cdot)$, игрок U минимизирует свой функционал $I(u(\cdot), v(\cdot))$ по допустимым управлениям (стратегиям) $u(\cdot) \in \mathcal{U}_0$. Множество соответствующих минимизаторов обозначим через $\Pi(v(\cdot))$. Предположим, что $\Pi(v(\cdot)) \neq \emptyset$ и состоит из одного элемента (с точностью до эквивалентности) для любой допустимой стратегии $v(\cdot)$. Рассмотрим далее задачу на минимум функционала (см. (5)) $J(\Pi(v(\cdot)), v(\cdot))$ на множестве допустимых стратегий $v(\cdot) \in \mathcal{V}_0$. Допустим, что множество минимизаторов в этой экстремальной задаче непусто. Пусть $\hat{v}(\cdot)$ – один из таких минимизаторов. Тогда пару $(\hat{v}(\cdot), \Pi(\hat{v}(\cdot)))$ будем называть равновесием по Штакельбергу.

Наша цель – получить достаточные условия, гарантирующие существование хотя бы одного равновесия по Штакельбергу. В наших рассуждениях будут использоваться некоторые факты из работ [8, 9] и аппарат обобщенных управлений (управлений-мер) (см. [2, 10, 11]).

Вначале займемся получением достаточных условий, обеспечивающих одноточечность множества $\Pi(v(\cdot))$ для каждого допустимого управления (стратегии) $v(t) \in Q$, $t \in \Delta$.

В дальнейшем считается выполненным следующее

Условие А. Функция $f(x, u, v)$ (см. (4), (6)) при каждом фиксированном $v \in Q$ выпукла по переменной $w = (x, u)$ на множестве $G = R^n \times P$, причем в неравенстве

$$f(\alpha x' + (1 - \alpha)x'', \alpha u' + (1 - \alpha)u'', v) \leq \alpha f(x', u', v) + (1 - \alpha)f(x'', u'', v), \quad (8)$$

где $\alpha \in [0, 1]$, $(x', u') \in G$, $(x'', u'') \in G$, для любого $v \in Q$ при $u' \neq u''$ равенство возможно только при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

Теорема 1. Множество $\Pi(v(\cdot))$ непусто для каждого измеримого управления (стратегии) $v(t) \in Q$, $t \in \Delta$, и является одноточечным.

Доказательство. Зафиксируем произвольное измеримое управление $\hat{v}(t) \in Q$, $t \in \Delta$, и рассмотрим задачу минимизации функционала $I(u(\cdot), \hat{v}(\cdot))$ (см. (4)) на множестве измеримых управлений $u(\cdot)$ (при этом в выражение для $x(t)$ (см. (3)) надо подставить $v(s) = \hat{v}(s)$). Используя теорему 11.4.i [12, с. 386], получаем, что множество $\Pi(\hat{v}(\cdot))$ непусто. Перейдем к вопросу об одноточечности множества $\Pi(\hat{v}(\cdot))$. Допустим, что существуют два управления $u'(\cdot)$, $u''(\cdot)$, принадлежащие множеству $\Pi(\hat{v}(\cdot))$, не эквивалентные друг другу, т.е. множество E точек $t \in \Delta$, для которых $u'(t) \neq u''(t)$, имеет положительную меру.

Обозначим через $x'(t)$, $x''(t)$ функции $x(t)$ (см. (3)), соответствующие парам $(u'(\cdot), \hat{v}(\cdot))$ и $(u''(\cdot), \hat{v}(\cdot))$. Рассмотрим при $t \in \Delta$ допустимое управление

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{2}(u'(t) + u''(t)) \quad (9)$$

и обозначим через $\tilde{x}(t)$, $t \in \Delta$, соответствующую паре $(\tilde{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot))$ функцию $x(t)$, $t \in \Delta$ (см. (3)). Используя условие А и формулы (3), (8), (9), нетрудно получить, что при $t \in \Delta$

$$f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \hat{v}(t)) \leq \frac{1}{2}(f(x'(t), u'(t), \hat{v}(t)) + f(x''(t), u''(t), \hat{v}(t))), \quad (10)$$

причем при $t \in E$ неравенство (10) является строгим. Так как по предположению множество E имеет положительную меру, то из сказанного получаем неравенство

$$I(\tilde{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot)) < \frac{1}{2}(I(u'(\cdot), \hat{v}(\cdot)) + I(u''(\cdot), \hat{v}(\cdot))).$$

Отсюда вытекает противоречие, так как на $u'(\cdot)$, $u''(\cdot)$ достигается минимум функционала $I(u(\cdot), \hat{v}(\cdot))$ на множестве допустимых управлений $u(\cdot)$.

Для изучения характера зависимости функционального элемента $\Pi(v(\cdot))$ от $v(\cdot)$ мы воспользуемся аппаратом обобщенных управлений (управлений-мер) (см. [2, 10, 11]). Рассмотрим новый конфликтно управляемый объект (ср. с (1), (4), (6))

$$\dot{y} = \int_P f_1(x, u) d\mu_t(u) + \int_Q a(x)v d\nu_t(v), \quad (11)$$

$$\dot{x} = Ax + B \int_P u d\mu_t(u) + C \int_Q v d\nu_t(v) \quad (12)$$

с начальными условиями

$$y(0) = 0, \quad x(0) = x_0. \quad (13)$$

Здесь $\mu_t(u)$, $\nu_t(v)$, $t \in \Delta$, – обобщенные управления (управления-меры), они при каждом $t \in \Delta$ являются вероятностными мерами Радона (см. [13, гл. IV]) на выпуклых компактах P , Q соответственно. Рассмотрим также новый функционал (см. (11)–(13))

$$F(\mu_t, \nu_t) = y(T), \quad (14)$$

где через μ_t , ν_t обозначены функции $\mu_t(u)$, $\nu_t(v)$, $t \in \Delta$, соответственно. Условимся отождествлять обобщенные управления $\mu_t(u)$ и $\nu_t(v)$, совпадающие почти всюду на Δ . Множества соответствующих классов эквивалентности будем обозначать через M , N соответственно. Согласно результатам раздела IV.1.9 [10], множества M , N можно рассматривать как подмножества сопряженных пространств

$$L^1(\Delta, C(P))^*, \quad L^1(\Delta, C(Q))^*$$

соответственно. Фиксируем на M , N слабые метрики $d_1(\cdot, \cdot)$, $d_2(\cdot, \cdot)$, порожденные слабыми нормами, построенными в разделе IV.1.9 [10]. Согласно результатам п. IV.2 [10], множества M , N являются выпуклыми компактами и секвенциально компактными относительно метрик $d_1(\cdot, \cdot)$, $d_2(\cdot, \cdot)$ соответственно. Обозначим

$$\Omega = M \times N \quad (15)$$

и введем на множестве Ω метрику $d(\cdot, \cdot)$ по формуле $d(\zeta', \zeta'') = d_1(\xi', \eta') + d_2(\xi'', \eta'')$, где $\zeta' = (\xi', \eta')$, $\zeta'' = (\xi'', \eta'')$, $\xi', \xi'' \in M$, $\eta', \eta'' \in N$, $\zeta', \zeta'' \in \Omega$.

Теорема 2. Функционал $F(\mu_t, \nu_t)$ (см. (14)) непрерывен по совокупности переменных на метрическом компакте Ω (см. (15)).

Доказательство этой теоремы можно провести по аналогии с доказательством теоремы 1 из работы [9].

Зафиксируем допустимое обобщенное управление $\hat{\nu}_t \in N$ и рассмотрим задачу минимизации функционала $F(\mu_t, \hat{\nu}_t)$ по $\mu_t \in M$. Используя теорему 2 и то обстоятельство, что M – метрический компакт, получаем существование минимизатора $\mu_t(\hat{\nu}_t) \in M$ в этой задаче минимизации. Решение уравнения (12), соответствующее паре $\mu_t(\hat{\nu}_t), \hat{\nu}_t$ и начальному условию $x(0) = x_0$, обозначим через $\hat{x}(t)$. Попытаемся охарактеризовать с помощью принципа максимума Понтрягина минимизатор $\mu_{t*} = \mu_t(\hat{\nu}_t)$. Из этого принципа для обобщенных управлений следует (см. [2, 10, 11]), что почти всюду при $t \in \Delta$

$$\int_P h(\hat{\psi}(t), \hat{x}(t), u) d\mu_{t*}(u) = \max_{u \in P} h(\hat{\psi}(t), \hat{x}(t), u), \quad (16)$$

где (см. (1), (4), (6))

$$h(\psi, x, u) = -f_1(x, u) + \langle Bu, \psi \rangle, \quad (17)$$

$\psi \in R^n$, функция $\hat{\psi}(t)$ абсолютно непрерывна на Δ и удовлетворяет там сопряженному уравнению

$$\dot{\psi} = -A^* \psi + \int_P \text{grad}_x f_1(\hat{x}(t), u) d\mu_{t*}(u) + \int_Q \text{grad}_x (a(\hat{x}(t))v) d\hat{\nu}_t(v),$$

символ $\text{grad}_x \alpha(x, u, v)$ для гладкой по $x \in R^n$ скалярной функции $\alpha(x, u, v)$ означает вектор из частных производных $\alpha_{x_i}(x, u, v)$ по компонентам x_i , $i = 1, \dots, n$, вектора x , записываемых в виде столбца. В силу условия А функция $h(\hat{\psi}(t), \hat{x}(t), u)$ (см. (17)) строго вогнута по $u \in P \forall t \in \Delta$ и поэтому множество $\arg \max_{u \in P} h(\hat{\psi}(t), \hat{x}(t), u)$ состоит из одной точки $\hat{u}(t) \in P$.

Напомним, что $\mu_{t*}(u)$ – вероятностная мера Радона на компакте P .

Отсюда и из (16), (17) вытекает, что почти всюду на Δ обобщенное управление $\mu_{t*}(u)$ сосредоточено в точке $\hat{u}(t)$. Из слабой измеримости $\mu_{t*}(u)$ по $t \in \Delta$ (см. [2, 10, 11]) следует, что управление $\hat{u}(t)$ измеримо по Лебегу на Δ . Итак, обосновано, что с точностью до эквивалентности обобщенное управление μ_{t*} реализуется в виде обычного измеримого управления $\hat{u}(t)$, $t \in \Delta$. Отметим, что обычные допустимые управления $u(t)$, $v(t)$, $t \in \Delta$, включаются во множество обобщенных управлений с помощью δ -функций Дирака (см. [2, 10, 11]).

Обозначим через $\Pi_1(\hat{\nu}_t)$ множество минимизаторов μ_{t*} с обычным отождествлением обобщенных управлений, совпадающих почти всюду на Δ . Из сказанного выше следует, что для $v(\cdot) \in \mathcal{V}_0$ можно записать равенство

$$\Pi(v(\cdot)) = \Pi_1(\delta_{v(t)}, t \in \Delta). \quad (18)$$

Теорема 3. При $\nu_t \in N$ множество $\Pi_1(\nu_t)$ является одноэлементным.

Доказательство. Допустим, что при данном $\nu_t \in N$ во множестве $\Pi_1(\nu_t)$ существуют два обобщенных управления μ_{t1} , μ_{t2} таких, что множество $E \subset \Delta$, на котором меры Радона $\mu_{t1}(u)$, $\mu_{t2}(u)$ не совпадают, имеет положительную меру. Выше показано, что обобщенные управления $\mu_{t1}(u)$, $\mu_{t2}(u)$ реализуются на Δ в виде обычных измеримых управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$, т.е. почти всюду на Δ

$$\mu_{t1}(u) = \delta_{u_1(t)}, \quad \mu_{t2}(u) = \delta_{u_2(t)}. \quad (19)$$

Рассмотрим новое допустимое управление

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{2}(u_1(t) + u_2(t)).$$

Этому управлению отвечает обобщенное управление

$$\tilde{\mu}_t(u) = \delta_{\tilde{u}(t)}, \quad t \in \Delta.$$

Обозначим через $\tilde{x}(t)$, $t \in \Delta$, соответствующее управлению $\tilde{\mu}_t$, ν_t решение задачи Коши (12), (13). Нетрудно видеть, что

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2}(\tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t)),$$

где $\tilde{x}_i(t)$, $t \in \Delta$, $i = 1, 2$, обозначает решение уравнения (12) при $\mu_t = \mu_{ti}$, $i = 1, 2$ (см. (19)), ν_t и начальном условии $x(0) = x_0$. Пары $\tilde{\mu}_t$, ν_t и начальному условию $y(0) = 0$ соответствует величина (см. (11)–(14))

$$F(\tilde{\mu}_t, \nu_t) = \int_0^T ds \int_Q (f_1(\tilde{x}(s), \tilde{u}(s)) + a(\tilde{x}(s))v) d\nu_s(v).$$

Используя формулу (6) и условие А, при $s \in \Delta$ и $v \in Q$ получаем неравенство

$$f(\tilde{x}(s), \tilde{u}(s), v) \leq \frac{1}{2} (f(\tilde{x}_1(s), u_1(s), v) + f(\tilde{x}_2(s), u_2(s), v)),$$

причем при $s \in E$ для любого $v \in Q$ оно является строгим. Используя свойства интеграла по мере Радона (см. [13, с. 523]), из сказанного получаем неравенство

$$F(\tilde{\mu}_t, \nu_t) < \frac{1}{2} (F(\mu_{t1}, \nu_t) + F(\mu_{t2}, \nu_t)) = F(\mu_{t1}, \nu_t).$$

Таким образом, из нашего предположения мы получили противоречие с определением μ_{t1} как минимизатора $F(\mu_t, \nu_t)$ по $\mu_t \in M$. Теорема доказана.

Рассмотрим функционал (см. (14))

$$\beta(\nu_t) = \min_{\mu_t \in M} F(\mu_t, \nu_t) \quad (20)$$

на метрическом компакте N . Используя непрерывность функционала $F(\mu_t, \nu_t)$ на метрическом компакте Ω (см. теорему 2), нетрудно обосновать непрерывность функционала $\beta(\nu_t)$ на N . Используя единственность минимизатора в (20) для каждого $\nu_t \in N$ (см. теорему 3) и то, что N – метрический компакт, нетрудно от противного доказать теорему.

Теорема 4. *Отображение $\Pi_1(\nu_t)$, действующее из метрического компакта N в метрический компакт M , является непрерывным.*

Рассмотрим новый функционал (ср. с (5), (7))

$$G(\mu_t, \nu_t) = \int_0^T ds \left[\int_P g_1(x(s), u) d\mu_s(u) + b(x(s)) \int_Q v d\nu_s(v) \right], \quad (21)$$

где $\mu_t \in M$, $\nu_t \in N$, $x(t)$ – решение уравнения (12) с начальным условием $x(0) = x_0$. Аналогично теореме 2 доказывается

Теорема 5. *Функционал $G(\mu_t, \nu_t)$ (см. (21)) непрерывен по совокупности переменных на метрическом компакте Ω (см. (15)).*

Обозначим (см. (21)) при $\nu_t \in N$

$$H(\nu_t) = G(\Pi_1(\nu_t), \nu_t). \quad (22)$$

Из теорем 4, 5 вытекает, что функционал $H(\nu_t)$ непрерывен на компакте N .

Из формул (18), (22) вытекает, что для $v(\cdot) \in \mathcal{V}_0$ выполняется равенство

$$J(\Pi(v(\cdot)), v(\cdot)) = H(\tilde{\nu}_t),$$

где

$$\tilde{\nu}_t(v) = \delta_{v(t)}, \quad t \in \Delta, \quad (23)$$

а функционал $J(u(\cdot), v(\cdot))$ определяется формулами (5), (7). Мы хотим показать, что функционал $J(\Pi(v(\cdot)), v(\cdot))$ достигает минимума на множестве \mathcal{V}_0 . При наших предположениях этот функционал ограничен по модулю на \mathcal{V}_0 .

Пусть последовательность $v_i(\cdot) \in \mathcal{V}$, $i = 1, 2, \dots$, является минимизирующей для функционала $J(\Pi(v(\cdot)), v(\cdot))$, а $\tilde{\nu}_{ti}$, $i = 1, 2, \dots$, – соответствующая последовательность (см. (23)) обобщенных управлений на Δ . Так как N – метрический компакт, то, переходя, если надо, к подпоследовательности и проводя соответствующую перенумерацию, можно считать, что последовательность $\tilde{\nu}_{ti}$, $i = 1, 2, \dots$, при $i \rightarrow \infty$ сходится в смысле метрики N к некоторому элементу $\nu_{t*} \in N$. Используя непрерывность функционала $H(\nu_t)$ на N , получаем, что

$$H(\tilde{\nu}_{ti}) \rightarrow H(\nu_{t*}) \quad \text{при } i \rightarrow \infty,$$

причем величина $H(\nu_{t*})$ совпадает с инфимумом $J(\Pi(v(\cdot)), v(\cdot))$ на \mathcal{V}_0 и (см. (22))

$$H(\nu_{t*}) = G(\Pi_1(\nu_{t*}), \nu_{t*}).$$

Выше показано, что элемент $\mu_{t*} = \Pi_1(\nu_{t*})$ реализуется на Δ в виде обычного измеримого управления $u_*(\cdot)$. Обозначим при $t \in \Delta$

$$v_*(t) = \int_Q v d\nu_{t*}(v). \quad (24)$$

Согласно свойствам обобщенных управлений, функция $v_*(t) \in Q$, $t \in \Delta$, и является измеримой на Δ . Из сказанного и из соотношений (4)–(7), (11)–(14) вытекает, что

$$F(\mu_{t*}, \nu_{t*}) = I(u_*(\cdot), v_*(\cdot)), \quad u_*(\cdot) = \Pi(v_*(\cdot)),$$

причем $v_*(\cdot)$ минимизирует функционал $J(\Pi(v(\cdot)), v(\cdot))$ на \mathcal{V}_0 . Таким образом, пара обычных измеримых управлений $(v_*(\cdot), u_*(\cdot))$ образует равновесие по Штакельбергу в рассматриваемой дифференциальной игре (1), (2), (4), (5). Отметим, что возможность перехода от обобщенного управления ν_{t*} к обычному управлению (24) основывается на линейном вхождении управления v в (1), (6), (7).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05-01-00193, 05-01-08034-офи-п).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1971. Т. 112. С. 30–63.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
3. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М., 1982.
4. Клейменов А.Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург, 1993.
5. Мулен Э. Теория игр. С примерами из математической экономики. М., 1985.
6. Угольницкий Г.А. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 4. С. 72–78.
7. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М., 2005.
8. Никольский М.С. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 11. С. 1526–1532.
9. Никольский М.С. О существовании точек равновесия по Нэшу для линейных дифференциальных игр в программных стратегиях: Сб. науч. тр. "Проблемы динамического управления". Вып. 1. М., 2005. С. 222–229.
10. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.
11. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси, 1977.
12. Cesari L. Optimization Theory and Applications. Problems with Ordinary Differential Equations. New York, 1983.
13. Шварц Л. Анализ. Т. 1. М., 1972.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию
11.05.2006 г.