Доклады Академии наук СССР
1963. Том 149, № 2

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В. В. ЛОХИН

СИСТЕМА ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 18 XII 1962)

В зависимости от природы рассматриваемой сплошной среды и характера учитываемых физических явлений состояние каждой частицы сплошной среды может быть охарактеризовано определенными физическими величинами, такими как плотность, температура, концентрации химических компонент вещества, тензор деформации и др. Важны также геометрические характеристики внутренней структуры частицы, такие как кристаллографическая симметрия и др.

Под системой определяющих параметров мы понимаем совокупность функционально независимых (размерных или безразмерных) величин, однозначно определяющих состояние и движение среды, ее физические и геометрические свойства ([1]). Локальное состояние среды считается известным, если в данной точке среды указаны значения определяющих параметров.

Свойства анизотропии сплошной среды в ряде случаев связаны с наличием в рассматриваемой точке среды пучка эквивалентных направлений *. Симметрия эквивалентных направлений в каждой точке среды характеризуется некоторой точечной группой (подгруппой полной ортогональной группы). Анизотропные среды удобно классифицировать по их точечным группам симметрии.

Среда называется и з о т р о п н о й, если ее точечная группа симметрии есть либо полная ортогональная группа, либо собственно ортогональная группа, и а н и з о т р о п н о й в остальных случаях. Среда называется к р и с т а л л и ч е с к о й, если ее точечная группа симметрии есть одна из 32 конечных кристаллографических групп. Т е к с т у р о й назовем среду, точечная группа симметрии которой есть одна из 7 непрерывных (компактных) подгрупп полной ортогональной группы. Другими словами, среда называется текстурой, если эквивалентные направления в каждой частице среды самосовмещаются при повороте частицы на любой угол вокруг некоторой фиксированной оси в частице.

Можно рассматривать среды или тела и с другими точечными группами симметрии, эти среды или тела отличаются от кристаллов и от текстур ([2]).

Пусть мы имеем представление $T^{i\cdot}_{\cdot j}$ точечной группы симметрии $\mathfrak{T}$ **. Мы скажем, что контравариантные компоненты тензора A и н в а р и а н т-

---

* Два направления в частице сплошной среды являются эквивалентными, если все физические свойства частицы одинаковы вдоль этих направлений.

** В криволинейной системе координат x^i с метрическим тензором g^{ij} каждый элемент T точечной группы $\mathfrak{T}$ имеет некоторое матричное представление $T^{i\cdot}_{\cdot j}$, которое удовлетворяет уравнению

$$g_{ij}\, T^{i\cdot}_{\cdot k}\, T^{j\cdot}_{\cdot l} - g_{kl} = 0\,. \tag{1a}$$

ны относительно группы $\mathfrak{T}$, если

$$T^{i_1}_{\cdot j_1} T^{i_2}_{\cdot j_2} \dots T^{i_n}_{\cdot j_n} A^{j_1 j_2 \dots j_n} = A^{i_1 i_2 \dots i_n} \qquad (1)$$

для каждого элемента T группы $\mathfrak{T}$. В силу ортогональности группы $\mathfrak{T}$ свойство инвариантности компонент тензора A распространяется на его компоненты с любым строением индексов, когда жонглирование индексами осуществляется с помощью тензоров g_{ij} и g^{ij}, где $g^{i\alpha} g_{\alpha j} = \delta^i_j$, и в этом случае можно говорить об инвариантности тензора A относительно группы $\mathfrak{T}$. Если тензор A с компонентами $A^{i_1 i_2 \dots i_n}$ инвариантен относительно группы $\mathfrak{T}$, то легко видеть, что тензор B с компонентами $A^{\alpha \cdot i_3 \dots i_n}_{\cdot \alpha}$ тоже инвариантен относительно группы $\mathfrak{T}$.

В предлагаемой заметке мы отмечаем следующее основное предложение.

Любой тензор произвольного ранга, инвариантный относительно данной точечной группы $\mathfrak{T}$, можно представить в виде линейной комбинации тензоров, составленных с помощью инвариантных тензорных операций (умножения, свертывания и перестановок индексов) из некоторого конечного набора тензоров $\{A_{(r)}\}$ ($r = 1, 2, \dots, l$) такого, что никакая его часть не обладает тем же свойством, причем тензоры $\{A_{(r)}\}$ и их число l зависят только от вида группы $\mathfrak{T}$.

Если известен целый рациональный тензорный базис, введенный в ([7]), соответствующий данной группе $\mathfrak{T}$, то инвариантными тензорными операциями можно построить тензоры $\{A_{(r)}\}$ из элементов этого базиса. Элементы целого рационального базиса для непрерывных (компактных) точечных групп и для точечных групп кристаллов низших и некоторых средних сингоний приведены в работе ([5]). Существование конечного набора тензоров $\{A_{(r)}\}$ для каждой конечной или компактной подгруппы полной ортогональной группы следует из существования для этих подгрупп конечного множества типовых базисных полиномиальных инвариантов ([6]).

Очевидно, что в качестве системы определяющих параметров, характеризующих анизотропию среды, можно взять элементы указанного конечного набора тензоров $\{A_{(r)}\}$ соответствующего группе $\mathfrak{T}$, описывающей заданную симметрию среды.

Нелинейные соотношения для тензоров, характеризующие физические и геометрические свойства или закономерности в анизотропной среде, представляют собой инвариантные тензорные функции от физических и геометрических определяющих параметров.

Пусть дана тензорная функция F от тензорных определяющих параметров $\{A_{(r)}\}$ и $\{B_{(s)}\}$, задающая физический закон:

$$\hat{F}^{i_1 i_2 \dots i_n} = \hat{F}^{i_1 i_2 \dots i_n}(\hat{g}_{\alpha\beta}, \hat{A}^{j_1 j_2 \dots j_{\sigma_r}}, \hat{B}^{k_1 k_2 \dots k_{\tau_s}}), \qquad (2)$$

где

$$F = \hat{F}^{i_1 i_2 \dots i_n} \hat{\partial}_{i_1} \hat{\partial}_{i_2} \dots \hat{\partial}_{i_n},$$

$$A_{(r)} = \hat{A}^{j_1 j_2 \dots j_{\sigma_r}} \hat{\partial}_{j_1} \hat{\partial}_{j_2} \dots \hat{\partial}_{j_{\sigma_r}} \qquad (r = 1, 2, \dots, l)$$

геометрические определяющие параметры;

$$B_{(s)} = \hat{B}^{k_1 k_2 \dots k_{\tau_s}} \hat{\partial}_{k_1} \hat{\partial}_{k_2} \dots \hat{\partial}_{k_{\tau_s}} \qquad (s = 1, 2, \dots, m)$$

физические определяющие параметры; $\hat{g}_{\alpha\beta} = (\hat{\partial}_\alpha \hat{\partial}_\beta)$ — компоненты метрического тензора в лагранжевой системе координат (вмороженной в среду) с векторами базиса $\hat{Э}_i$.

Используя результаты работ ([8, 9]), можно найти структуру нелинейных тензорных соотношений (2) в случае, когда в состав аргументов $\{A_{(r)}\}$ $\{B_{(s)}\}$ входят только скаляры, векторы, симметричные и антисимметричные тензоры третьего ранга.

Таким образом, можно полностью решить задачу о структуре нелинейных зависимостей, характеризующих физические свойства текстур и кристаллов низших сингоний.

Следует иметь в виду, что с точки зрения общей структуры тензорных формул существенными являются только функционально независимые инварианты системы тензоров $\{A_{(r)}\}$, $\{B_{(s)}\}$ и метрического тензора. Необходимо также учесть, что любой тензор можно выразить как линейную комбинацию только p слагаемых, где p — число его линейно независимых компонентов. В ряде опубликованных работ рассматриваются аналогичные формулы в виде сумм, в которых число слагаемых существенно больше числа p ([8, 9]). Это связано с тем, что были построены формулы, содержащие только полиномиальные зависимости.

Для любого тензора ранга n в трехмерном эвклидовом пространстве, инвариантного относительно некоторой группы G, число $p \leqslant 3^n$ можно вычислить методом теории представлений групп (теории характеров) ([3, 4]).

В дальнейшем будут даны формулы, иллюстрирующие структуру нелинейных соотношений для тензоров, характеризующих физические свойства текстур и кристаллов.

Автор выражает искреннюю благодарность акад. Л. И. Седову за советы и подробное обсуждение.

Поступило
14 XII 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, Введение в механику сплошной среды, М., 1962. [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, § 112, М.—Л., 1951. [3] С. Багавантам, Т. Венкатарайуду, Теория групп и ее применение к физическим проблемам, ИЛ, 1959. [4] Ю. И. Сиротин, Кристаллография, 5, в. 2, 171 (1960). [5] Ю. И. Сиротин, ДАН, 133, № 2, 321 (1960). [6] Г. Вейль, Классические группы. ИЛ, 1947. [7] F. G. Smith, R. S. Rivlin, Quart. Appl. Math., 15, 308 (1957), [8] A. J. M. Spencer, Arch. Rat. Mech. and Anal., 7, № 1, 64 (1961). [9] A. J. M. Spencer, R. S. Rivlin, Arch. Rat. Mech. and Anal., 9, № 1, (1962).