ФЕВРАЛЬ 1982 г., ТОМ XVIII, № 2

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

С. А. АЛДАШЕВ

О НЕКОТОРЫХ МНОГОМЕРНЫХ АНАЛОГАХ ЗАДАЧ ДАРБУ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть D — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная поверхностями $|x|=t+\varepsilon$, $|x|=1-t$ и плоскостью $t=0$, где $|x|$ — длина вектора $x=(x_1, \ldots, x_m)$, $0\leqslant t\leqslant (1-\varepsilon)/2$, а $0\leqslant\varepsilon<1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D области D, обозначим через S_ε, S_1, S соответственно.

В области D рассмотрим волновое уравнение

$$\Box u\equiv\Delta_x u-u_{tt}=0, \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$.

Задача 1. Найти регулярное в области D решение уравнения (1), непрерывное в замыкании $\bar{D}$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S=\tau(x), \quad u|_{S_\varepsilon}=\sigma(x) \tag{2}$$

или

$$u_t|_S=\nu(x), \quad u|_{S_\varepsilon}=\sigma(x). \tag{3}$$

Эта задача сопряжена с задачей 1*, которая отличается от задачи 1 лишь тем, что значение искомого решения задается не на S_ε, а на S_1.

Взаимно-сопряженные задачи 1 и 1* исследовались в работах [1, 2].

Для дальнейшего удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m$, t к сферическим $r, t, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta_1\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\theta_i\leqslant\pi$ $(i=2, 3, \ldots, m-1)$.

Пусть $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leqslant k\leqslant k_n$, $k_n=(2n+m-2)\dfrac{(n+m-3)!}{(m-2)!\,n!}$, $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$.

Лемма. *Пусть $f(x)\in W^l_2(S)$. Если $l\geqslant m+1$, то ряд*

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{f}^k_n(r)\,Y^k_{n,m}(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием до второго порядка включительно, сходятся абсолютно и равномерно.

Из теоремы вложения ([3]) следует, что $W^l_2(S)\subset C^2(\bar{S})$. Далее, применяя теорему 5.31, доказанную в [4], убеждаемся в справедливости леммы.

Через $\bar{\tau}^k_n(r)$, $\bar{\nu}^k_n(r)$, $\bar{\sigma}^k_n(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответственно функций $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)$.

Рассмотрим случай $\varepsilon>0$, при этом имеет место

Теорема 1. *Если $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\sigma(x)\in W^l_2(S)$, $l\geqslant m+1$ и при боль-*

ших n $(\exp(n^3))\bar{\tau}^k_n(r)$, $(\exp(n^3))\bar{\nu}^k_n(r)$, $(\exp(n^3))\bar{\sigma}^k_n(r)\in C^2([\varepsilon, 1])$, *то задачи 1 и 1* однозначно разрешимы.*

Доказательство. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнение (1) запишется в виде

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u-u_{tt}=0, \tag{5}$$

где

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1=1,\quad g_j=(\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{j-1})^2,\quad j>1.$$

Так как искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C(\bar{D})\cap C^2(D)$, то его можно искать в виде ряда

$$u(r, t, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{v}^k_n(r, t)Y^k_{n,m}(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{v}^k_n(r, t)$ — функция, подлежащая определению.

Подставляя (6) в (5), легко убедиться в том, что

$$\bar{v}^k_{nrr}+\frac{m-1}{r}\bar{v}^k_{nr}-\bar{v}^k_{ntt}-\frac{\lambda}{r^2}\bar{v}^k_n=0,\quad \lambda=n(n+m-2). \tag{7}$$

Произведя замену переменной по формуле $\bar{v}^k_n(r, t)=r^{(1-m)/2}v^k_n(r, t)$ и положив затем $\xi=(r+t)/2$, $\eta=(r-t)/2$, из (7) будем иметь

$$v^k_{n\xi\eta}+\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda]}{4(\xi+\eta)^2}v^k_n=0. \tag{8}$$

Тогда условие (2) для функций $v^k_n(\xi, \eta)$ с учетом вышеуказанной леммы перепишется в виде

$$v^k_n(\xi, \xi)=f^k_n(\xi),\quad v^k_n(\xi, \varepsilon/2)=\varphi^k_n(\xi),\quad \varepsilon/2\leqslant\xi\leqslant 1/2, \tag{9}$$

где $f^k_n(\xi)=(2\xi)^{(m-1)/2}\bar{\tau}^k_n(2\xi)$, $\varphi^k_n(\xi)=(\xi+\varepsilon/2)^{(m-1)/2}\bar{\sigma}^k_n(\xi+\varepsilon/2)$.

Используя общее решение уравнения (8) (см. [5]), нетрудно показать, что решение задачи Коши для уравнения (8) имеет вид

$$v^k_n(\xi, \eta)=\frac{1}{2}v^k_n(\eta, \eta)R(\eta, \eta; \xi, \eta)+\frac{1}{2}v^k_n(\xi, \xi)R(\xi, \xi; \xi, \eta)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\eta}^{\xi}\left[\psi^k_n(\xi_1)R(\xi_1, \xi_1; \xi, \eta)-v^k_n(\xi_1, \xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)|_{\xi_1=\eta_1}\right]d\xi_1, \tag{10}$$

где $R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)=P_\mu\left[\dfrac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ — функция Римана уравнения (8) ([6]), а $P_\mu(z)$ — функция Лежандра $\mu=n+(m-3)/2$,

$$\psi^k_n(\xi_1)=\left.\frac{\partial v^k_n}{\partial N}\right|_{\xi_1=\eta_1}=\left.\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N'}\frac{\partial v^k_n}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial N'}\frac{\partial v^k_n}{\partial\xi_1}\right)\right|_{\xi_1=\eta_1},$$

N' — внешняя нормаль к прямой $\xi=\eta$.

Из уравнения (10) при $\eta=\varepsilon/2$ получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$q_n^k(\xi)=\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}\psi_n^k(\xi_1)\,P_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\varepsilon/2}{\xi_1(\xi+\varepsilon/2)}\right)d\xi_1,$$

где

$$q_n^k(\xi)=\sqrt{2}\,\varphi_n^k(\xi)-\frac{f_n^k(\varepsilon/2)}{\sqrt{2}}-\frac{f_n^k(\xi)}{\sqrt{2}}+$$

$$+\frac{\xi-\varepsilon/2}{\sqrt{2}(\xi+\varepsilon/2)}\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}\frac{f_n^k(\xi_1)}{\xi_1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\varepsilon/2}{\xi_1(\xi+\varepsilon/2)}\right)d\xi_1, \tag{11}$$

которое дифференцированием сводится к следующему уравнению Вольтерра второго рода

$$\frac{dg_n^k}{d\xi}=\psi_n^k(\xi)+\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}\psi_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial\xi}k_\mu(\xi,\ \xi_1)\,d\xi_1,\ k_\mu(\xi,\ \xi_1)=P_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\varepsilon/2}{\xi_1(\xi+\varepsilon/2)}\right).$$

Единственное решение этого уравнения дается формулой

$$\psi_n^k(\xi)=\frac{dg_n^k}{d\xi}-\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi}R(\xi,\ \xi_1;\ -1)\frac{dg_n^k}{d\xi_1}d\xi_1,$$

где $R(\xi,\ \xi_1;\ -1)$ — резольвента ядра $\frac{\partial}{\partial\xi}k_\mu(\xi,\ \xi_1)$.

Отсюда решение задачи (8), (9) записывается в виде

$$v_n^k(\xi,\ \eta)=\frac{1}{2}f_n^k(\eta)+\frac{1}{2}f_n^k(\xi)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}\left[\frac{dg_n^k}{d\xi_1}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi_1}R(\xi_1,\ \tau;\ -1)\frac{dg_n^k}{d\tau}d\tau\right]P_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\eta}{\xi_1(\xi+\eta)}\right)d\xi_1-$$

$$-\frac{\xi-\eta}{2(\xi+\eta)}\int\limits_{\eta}^{\xi}\frac{f_n^k(\xi_1)}{\xi_1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\eta}{\xi_1(\xi+\eta)}\right)d\xi_1, \tag{12}$$

где $g_n^k(\xi)$ определяется из (11).

Следовательно, функция

$$u(r,\ t,\ \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{(1-m)/2}v_n^k(r,\ t)\,Y_{n,m}^k(\theta) \tag{13}$$

является единственным решением задачи (1), (2), где $v_n^k(r,\ t)$ находится по формуле (12).

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(x)$, $\sigma(x)$ и используя формулы ([7])

$$\frac{d^m}{dx^m}P_\mu(x)=\frac{2^{-m}\Gamma(\mu+m+1)}{\Gamma(\mu-m+1)}F\left(1+m+\mu,\ m-\mu,\ 1+m,\ \frac{1-x}{2}\right),$$

$$\frac{\Gamma(\mu+\alpha)}{\Gamma(\mu+\beta)}=\mu^{\alpha-\beta}\left[1+\frac{1}{2\mu}(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)+O(\mu^{-2})\right],$$

а также оценки ([4]) $k_n\leqslant cn^{m-2}$, $|Y_{n,m}^k(\theta)|\leqslant cn^{m/2-1}$, где $F(a,\ b,\ c,\ z)$ — гипергеометрическая функция, α, β — произвольные действительные числа, c — постоянная, не зависящая от n, можно доказать, что полученное решение $u(x, t)$ в виде (13) принадлежит классу $C(\bar{D})\cap\cap C^2(D)$.

Справедливость теоремы 1 для задачи (1), (3) и для задачи 1* показывается аналогично.

Обозначим через $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_N$ классы функций, представимых соответственно в виде ряда и полинома степени N от сферических функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Если для задачи (1), (2) $r^{(m-3)/2}\bar{\tau}^k_n(r)$, $r^{(m-3)/2}\bar{\sigma}^k_n(r)$, $\bar{\tau}^{k\prime}_n(r)$, $\bar{\sigma}^{k\prime}_n(r)\in\in C([0, 1])$, $\bar{\tau}^k_n(r)$, $\bar{\sigma}^k_n(r)\in C^2((0, 1))$ и при больших n $n^{-1}r^{(m-3)/2}\bar{\tau}^k_n(r)$, $n^{-l}r^{(m-3)/2}\bar{\sigma}^k_n(r)$, $n^{-l}\bar{\tau}^{k\prime}_n(r)$, $n^{-l}\bar{\sigma}^{k\prime}_n(r)\in C([0, 1])$, $n^{-l}\bar{\tau}^k_n(r)$, $n^{-l}\bar{\sigma}^k_n(r)\in\in C^2((0, 1))$, $l>(3m-5)/2$, а для сопряженной задачи (1), (2*) $\bar{\tau}^k_n(r)=r\hat{\tau}^k_n(r)$, $\bar{\sigma}^k_n(r)=\left(r-\frac{1}{2}\right)^{\frac{m+1}{2}}\hat{\sigma}^k_n(r)$, $\hat{\tau}^k_n$, $\hat{\sigma}^k_n\in C^1([0, 1])\cap C^2((0, 1))$ и при больших n $n^{-l}\hat{\sigma}^k_n$, $n^{-l}\hat{\tau}^k_n\in C^1([0, 1])\cap C^2((0, 1))$, $l>(3m-3)/2$, то для случая $\varepsilon=0$ справедлива

Теорема 2. *1) В классе $\mathcal{L}$ существуют бесчисленное множество решений задачи (1), (2) и единственное решение задачи (1), (2*); 2) неравенство $m<7-2N$ является необходимым и достаточным условием для единственности решения задачи (1), (2) в классе $\mathcal{L}_N$; 3) в классе функции $C^1(\bar{D})\cap C^2(D)$ задача (1), (2*) имеет не более одного решения.*

Доказательство теоремы 2. Сначала рассмотрим задачу (1), (2).

Пусть $\tau(r, \theta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\bar{\tau}^k_n(r)Y^k_{n,m}(\theta)$, $\sigma(r, \theta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\bar{\sigma}^k_n(r)Y^k_{n,m}(\theta)$.

Тогда условия (2) можно переписать в виде

$$v^k_n(\xi, \xi)=f^k_n(\xi),\quad v^k_n(\xi, 0)=\varphi^k_n(\xi),\quad 0\leqslant\xi\leqslant 1/2, \tag{14}$$

где $f^k_n(\xi)=(2\xi)^{(m-1)/2}\bar{\tau}^k_n(2\xi)$, $\varphi^k_n(\xi)=\xi^{(m-1)/2}\bar{\sigma}^k_n(\xi)$. При этом решение задачи (8), (14), как в случае $\varepsilon>0$, сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра первого рода

$$g^k_n(\xi)=\int\limits_0^{\xi}\psi^k_n(\xi_1)P_\mu(\xi_1/\xi)\,d\xi_1,$$

где

$$g^k_n(\xi)=\sqrt{2}\,\varphi^k_n(\xi)-\frac{f^k_n(\xi)}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\xi}\frac{f^k_n(\xi_1)}{\xi_1}P'_\mu(\xi_1/\xi)\,d\xi_1,$$

которое дифференцированием сводится к следующему интегральному уравнению:

$$\frac{dg^k_n}{d\xi}=\psi^k_n(\xi)-\int\limits_0^{\xi}\frac{\psi^k_n(\xi_1)}{\xi_1}\bar{k}_\mu(\xi_1/\xi)\,d\xi_1,\quad \bar{k}_\mu(\xi_1/\xi)=\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^2P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right). \tag{15}$$

Произведя замену переменных

$$\xi_1=\exp(-s),\quad \xi=\exp(-t) \tag{16}$$

и введя обозначения $q^k_n(t)=(g^k_n(\exp(-t)))'$, $\chi^k_n(s)=\psi^k_n(\exp(-s))$, приходим к уравнению Винера — Хопфа

$$q^k_n(t)=\chi^k_n(t)-\int\limits_0^{\infty}\chi^k_n(s)k_\mu(t-s)\,ds,\quad 0\leqslant t\leqslant\infty, \tag{17}$$

где

$$k_\mu(t)=\begin{cases}(\exp 2t)P'_\mu(\exp t), & t\leqslant 0,\\ 0, & t>0.\end{cases}$$

Пусть $K_\mu(\lambda)$ — преобразование Фурье от функций $k_\mu(t)$:

$$K_\mu(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}(\exp i\lambda t)k_\mu(t)\,dt,$$

$$\nu_\mu=-\operatorname{ind}(1-K_\mu(\lambda))=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d_\lambda\arg(1-K_\mu(\lambda)).$$

Для уравнения (17) $1-K_\mu(\lambda)\neq 0$ при $\mu\neq 2p+2$, p — целое неотрицательное число и его индекс $\nu_\mu=p$, причем $\nu_\mu=0$, если $-3\leqslant\mu<2$. В случае $\mu=2p+2$, $1-K_\mu(\lambda+ih)\neq 0$, где $h<2$, $h\neq-\mu+2p+2$. Далее, используя результаты работы [8], получаем справедливость пп. 1), 2) теоремы 2 для задачи (1), (2).

Теперь рассмотрим задачу (1), (2*). При этом условие (2*) для функций $v^k_n(\xi,\eta)$ запишется в виде

$$v^k_n(\xi,\xi)=f^k_n(\xi),\quad v^k_n\left(\frac{1}{2},\eta\right)=g^k_n(\eta),\tag{18}$$

где

$$f^k_n(\xi)=(2\xi)^{(m-1)/2}\bar\tau^k_n(2\xi),\quad g^k_n(\eta)=\left(\frac{1}{2}+\eta\right)^{(m-1)/2}\bar\sigma^k_n\left(\frac{1}{2}+\eta\right).$$

Далее, используя решение задачи Гурса для уравнения (8) ([5]),

$$v^k_n(\xi,\eta)=\varphi^k_n(\xi)-\int_0^\eta R\left(\frac{1}{2},\ \eta_1;\ \xi,\ \eta\right)\frac{dg^k_n(\eta_1)}{d\eta_1}d\eta_1-$$

$$-\int_{1/2}^{\xi}\varphi^k_n(\xi_1)\frac{\partial}{\partial\xi_1}R(\xi_1,\ 0;\ \xi,\ \eta)\,d\xi_1,\tag{19}$$

задачу (8), (18) сводим к следующему интегральному уравнению

$$\bar f^k_n(\xi)=\varphi^k_n(\xi)+\int_\xi^{1/2}\varphi^k_n(\xi_1)\frac{\partial}{\partial\xi_1}P_\mu(\xi_1/\xi)\,d\xi_1,\tag{20}$$

где

$$\bar f^k_n(\xi)=f^k_n(\xi)+\int_0^t\frac{dg^k_n}{d\eta_1}P_\mu\left(\frac{\frac{1}{2}\eta_1+2\xi^2}{\xi\left(\frac{1}{2}+\eta_1\right)}\right)d\eta_1.$$

Произведя замену переменных по формуле (16) в уравнении (20) и вводя обозначения $q^k_n(t)=\bar f^k_n(\exp(-t))$, $\chi^k_n(s)=\varphi^k_n(\exp(-s))$, $k_\mu(t)=(\exp(-t))P'_\mu(\exp(-t))$, получим уравнение

$$q^k_n(t)=\chi^k_n(t)-\int_0^t\chi^k_n(s)k_\mu(t-s)\,ds,$$

которое имеет единственное решение ([9])

$$\chi^k_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty}\frac{G^k_n(s)}{1-L_\mu(s)}(\exp st)\,ds\quad(l>M),\tag{21}$$

где $G^k_n(s)$, $L_\mu(s)$ — изображения соответственно функций $q^k_n(t)$, $k_\mu(t)$ по Лапласу, M — верхняя граница значений $|q^k_n(t)|$ и $|k_\mu(t)|$ при $t \geqslant 0$.

Следовательно, функция

$$u(r,\ t,\ \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} r^{(1-m)/2} v^k_n(r,\ t)\, Y^k_{n,m}(\theta) \tag{22}$$

является решением задачи (1), (2*), где $v^k_n(r,\ t)$ записывается в виде (19), в котором $\varphi^k_n(\xi)$ определяется из (21).

Заметим, что функция (22) не принадлежит классу $C^1(\bar{D})$.

Теперь докажем п. 3) теоремы 2. Пусть $\omega(x,\ t)$ — решение задачи (1), (2), которое равно нулю на S_0, а на S совпадает с функцией $\tau(r,\ \theta) = \bar{\tau}(r)\, Y^k_{n\,m}(\theta)$, $\bar{\tau}(r) \in V_0$, где V_0 — множество функций $\bar{\tau}(r)$ из класса $C^2(0<r<1) \cap C^1(0 \leqslant r \leqslant 1)$. Очевидно, множество V_0 плотно всюду в $L_2(0<r<1)$.

Из тождества Римана

$$\omega \Box u - u \Box \omega = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\omega \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial \omega}{\partial t}\right)$$

по формуле Грина имеем

$$\int_D (\omega \Box u - u \Box \omega)\, dD = \int_{\partial D} \left(\omega \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial \omega}{\partial N}\right) ds, \tag{23}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial N} = \sum\limits_{i=1}^{m} \cos(n,\ x_i) \dfrac{\partial}{\partial x_i} - \cos(n,\ t) \dfrac{\partial}{\partial t}$ — конормаль к границе ∂D.

Из (23), принимая во внимание граничные условия и тот факт, что на характеристиках S_0 и S_1 конормальные производные совпадают с производной по касательному направлению, получаем

$$\int_S \tau(x)\, u_t(x,\ 0)\, ds = 0. \tag{24}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\tau}(r)\, Y^k_{n,m}(\theta)\}$ плотна в $L_2(S)$, то из (24) заключаем, что

$$u_t(x,\ 0) = 0, \quad \forall x, \quad 0 \leqslant |x| \leqslant 1.$$

Стало быть, в силу единственности решения задачи Коши: $u(x,\ 0) = 0$, $u_t(x,\ 0) = 0$ для уравнения (1), $u(x,\ t) = 0 \quad \forall\, (x,\ t) \in D$.

На этом завершается доказательство теоремы 2.

Далее, если для задачи (1), (3) $r^{(m-1)/2+h} \bar{v}^k_n(r) \in C([0,\ 1]) \cap C^1((0,\ 1))$, $r^{(m-1)/2+h} \bar{\sigma}^k_n(r) \in C([0,\ 1/2]) \cap C^2((0,\ 1/2))$, $h < -m/2$, $h \neq \mu - 2p$ и при больших n $n^{-l} \bar{v}^k_n(r) \in C([0,\ 1]) \cap C^1((0,\ 1))$, $n^{-l} \bar{\sigma}^k_n(r) \in C([0,\ 1/2]) \cap C^2((0,\ 1/2))$, $l > (3m-3)/2$, а для сопряженной задачи (1), (3*) $\left(r - \frac{1}{2}\right)^{(m+5)/2} \bar{\sigma}^k_n(r) \in C^1([1/2,\ 1]) \cap C^2((1/2,\ 1))$, $\bar{v}^k_n(r) \in C([0,\ 1]) \cap C^1((0,\ 1))$ и при больших n $n^{-l} \bar{\sigma}^k_n(r) \in C^1([1/2,\ 1]) \cap C^2((1/2,\ 1))$, $n^{-l} \bar{v}^k_n(r) \in C([0,\ 1]) \cap C^1((0,\ 1))$, $l > \dfrac{3m}{2} - 1$, то имеет место

Теорема 3. *1) В классе $\mathscr{L}$ существуют бесчисленное множество решений задачи (1), (3) и единственное решение задачи (1), (3*), не принадлежащее $C^1(\bar{D})$;* 2) *неравенство* $(2-m)/2 \leqslant N < (3-m)/2 - h$

является необходимым и достаточным условием для единственности решения задачи (1), (3) в классе $\mathscr{L}_N$; 3) в классе функций $C^1(\bar{D})\cap C^2(D)$ задача (1), (3) имеет не более одного решения.*

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично ранее доказанной теореме 2.

Литература

1. Нахушев А. М.— Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию И. Г. Петровского.— МГУ, 1978.
2. Алдашев С. А.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 1.
3. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Изд-во ЛГУ, 1950.
4. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.— М., 1962.
5. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа.— М.: Изд-во АН СССР, 1959.
6. Copson E. T.— J. Rath. Mech. Anal., 1958, vol. 1.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1.—М.: Наука, 1973.
8. Крейн М. Г.— УМН, 1958, т. 13, № 5 (83).
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4, ч. I.— М.: Наука, 1974.

Алма-атинский институт инженеров железнодорожного транспорта

Поступила в редакцию 20 марта 1981 г.

УДК 517.95

С. К. АФЯН

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть D — односвязная ограниченная область в комплексной плоскости $z=x+iy$ с гладкой границей Γ, γ — замкнутая достаточно гладкая кривая внутри D и G — область, ограниченная кривой γ.

В области D рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}-q(z)\overline{\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}}\right]+a_1(z)\frac{\partial u}{\partial z}+a_2(z)\overline{\frac{\partial u}{\partial z}}+a_3(z)\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}+$$

$$+a_4(z)\overline{\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}}+a_5(z)u+a_6(z)\bar{u}=h(z), \tag{1.1}$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$; $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$; $a_1, \ldots, a_6$ и h — заданные функции из класса $C^1_\sigma(\bar{D})$ $(0<\sigma<1)$; $q(z)$ — заданная функция из класса $C_\alpha(\bar{D})\cap C^1_\alpha(\bar{D}\setminus\gamma)$, а $u(z)=u_1+iu_2$ — искомое решение; $\overline{u(z)}$ — комплексно-сопряженное к $u(z)$.

Предполагается, что $q(z)\neq 0$, $z\in\Gamma$ и

$$1-|q(z)|^2=\rho^\alpha(z)q_0(z), \quad z\in D, \quad 0<\alpha<1, \tag{1.2}$$

где $\rho(z)$ — расстояние точки z до кривой γ, а $q_0(z)$ — функция из класса $C_\alpha(\bar{D})$, $q_0(z)\neq 0$, $z\in\bar{D}$.

Уравнение (1.1) есть комплексная форма некоторой системы двух вещественных дифференциальных уравнений. Эта система при наличии условия (1.2) эллиптична в $D\setminus\gamma$ и вырождается внутри области D на γ.

В работах [1, 2] были изучены краевые задачи для уравнения (1.1) в случае вырождения на границе области.

Основная цель настоящей работы заключается в том, какие granич-