И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2000, том 264, 66–82

https://www.mathnet.ru/znsl1159

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

И. В. Камоцкий, С. А. Назаров

РАСШИРЕННАЯ МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ЗАТУХАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

§1. Введение

Одно из примечательных явлений в дифракционных процессах – возникновение экспоненциально затухающих решений однородной задачи (собственных функций), приводящее к разнообразным физическим последствиям и, в частности, вызывающее аккумуляцию энергии в конечных объемах. В случае диффракции на периодических границах или решетках подобные решения ассоциируются с поверхностными волнами. В последнее время появилось значительное количество публикаций, посвященных доказательствам существования таких волн (см. статьи [1–4] и цитированную там литературу). Вместе с тем, эти исследования опираются на вариационные принципы, а значит, как правило, используют симметризующие конструкции в наиболее интересной ситуации "точечный спектр на непрерывном" (сравни с [1]). Сложность идентификации собственных функций кроется в крайней их неустойчивости – параметры задачи требуют "тонкой настройки". Именно поэтому затруднено применение конструктивных методов, в особенности, асимптотических (из-за неизбежного возникновения малых, но не управляемых невязок). В настоящей статье развивается иной (не вариационный) подход к поиску упомянутых собственных функций, основанный на привлечении нового алгебраического объекта – расширенной матрицы рассеяния, обладающей способностью подсчитывать число линейно независимых решений однородной задачи с предписанной скоростью затухания. Переход к изучению конечномерных характеристик задачи упрощает асимптотический анализ и, что особенно важно, позволяет обосновать асимптотические формулы. Последнее

Работа выполнена при поддержке программы ИНТАС (грант 96–0876)

иллюстрируется в § 4 на примере простейшей, но до сих пор не исследованной с обсуждаемой точки зрения задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в полубесконечной области, отсекаемой периодической кривой. В то же время необходимые построения и доказательства приводятся в § 2 и § 3 для существенно расширенной постановки задачи: многомерные области, системы уравнений, общие краевые условия (по поводу дальнейших обобщений см. п. 4 § 2).

Подготовительный материал, собранный в § 2, излагается конспективно (подробности см. в [5]). Ключевым моментом здесь является разработанная в [7, 5] постановка естественных условий излучения с помощью базовых свойств биортогональности волн [6, 7] (для дифференциальных уравнений с постоянными операторными коэффициентами на полуоси в [8, 9] предложен другой способ формирования условий излучения, приводящий к тем же конструкциям, что и в [7, 5], лишь в случае алгебраической простоты спектров возникающих пучков). Искусственные условия излучения и расширенная матрица рассеяния вводятся в § 3, а считающее свойство этой матрицы устанавливается в центральной теореме 3.3. Отметим, что для других геометрических форм (конусы, ребра) схожие алгебраические конструкции использовались в [10].

§2. Естественные условия излучения

1. Оператор краевой задачи в весовых классах. Пусть $Q = G\times\mathbb{R}$ – цилиндр, сечение G которого является областью в $\mathbb{R}^{n-1}$ с гладкой границей ∂G и компактным замыканием $\overline{G}$. Пусть еще область $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ совпадает вне шара $\mathbb{B}_R = \{x : |x| < R\}$ с полуцилиндром $Q_+ = \{x = (y, z) : y\in G, z > 0\}$ и имеет гладкую $(n-1)$-мерную границу $\partial\Omega$. Введем $T\times T$ – матрицу дифференциальных операторов $L(x,\nabla_x) = (L_{ij}(x,\nabla_x))$; здесь $\nabla_x = \mathrm{grad}$, $\mathrm{ord}\, L_{ij} = \tau_i+\tau_j$ и $\tau_1,\dots,\tau_T\in\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$ (целые неотрицательные числа). Предположим, что для любых $u, v\in C_0^\infty(\overline{\Omega})^T$ справедлива формула Грина

$$(Lu, v)_\Omega + (Bu, Tv)_{\partial\Omega} - (u, Lv)_\Omega - (Tu, Bv)_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.1}$$

в которой $(\ ,\ )_\Xi$ – скалярное произведение в (векторном) пространстве $L_2(\Xi)$, B и T – матрицы размером $m\times T, m = \tau_1 +$

$\dots + \tau_T > 0$, а дифференциальные операторы B_{qj}, составляющие B, имеют порядки $r_q + \tau_j$.

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \; Bu = g \text{ на } \partial\Omega, \qquad (2.2)$$

где $u = (u_1, \dots, u_T), f = (f_1, \dots, f_T)$ и $g = (g_1, \dots, g_m)$. Коэффициенты операторов L и B, T – гладкие в $\overline{\Omega}$ и на $\partial\Omega$ функции, стабилизирующиеся в Q_+ с экспоненциальной скоростью к гладким функциям переменных $y \in G$, т.е. для каждого такого коэффициента $a(x)$ выполнены неравенства

$$|\nabla_x^\alpha \left(a(y,z) - a^0(y)\right)| \leqslant c_\alpha \exp(-\delta_0 z), \qquad (2.3)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – произвольный мультииндекс, $\nabla_x^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $y = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $z = x_n$ и $\delta_0 > 0$. Предельные ($z = +\infty$) операторы обозначаем $L^0(y, \nabla_x)$, $B^0(y, \nabla_x)$ и считаем, что задачи $\{L, B\}$ в Ω (см. (2.2)) и $\{L^0, B^0\}$ в Q эллиптические. Они формально самосопряжены в силу (2.1).

При $l \in \mathbb{N}_0$ (показатель гладкости) и $\beta \in \mathbb{R}$ (весовой показатель) определим пространство $W_\beta^l(\Omega)$ как пополнение $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$||w; W_\beta^l(\Omega)|| = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \int_\Omega \exp(2\beta z) |\nabla_x^\alpha w(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \qquad (2.4)$$

При $l \in \mathbb{N}$ соответствующее следовое пространство обозначается $W_\beta^{l-1/2}(\partial\Omega)$.

Всюду далее $l \geqslant \max\{\tau_j, r_q + 1\}$. Ясно, что оператор задачи (2.2)

$$\prod_{j=1}^T W_\beta^{l+\tau_j}(\Omega) \equiv \mathcal{D}_\beta^l W(\Omega) \ni u \mapsto A_\beta u \equiv \{L, B\} u \in$$

$$\mathcal{R}_\beta^l W(\Omega) \equiv \prod_{j=1}^T W_\beta^{l-\tau_j}(\Omega) \times \prod_{q=1}^m W_\beta^{l-r_q-1/2}(\partial\Omega) \qquad (2.5)$$

непрерывен. Согласно [11] (см. теоремы 3.1.1, 5.1.4 из [5]) этот оператор фредгольмов в том и только в том случае, если на прямой $\mathbb{R} + i\beta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda = \beta\}$ нет собственных чисел пучка

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda) \equiv \{L^0(y, \nabla_y, i\lambda), B^0(y, \nabla_y, i\lambda)\} : \mathcal{D}^l H(G) \to \mathcal{R}^l H(G), \qquad (2.6)$$

получающегося преобразованием Фурье ($z \to \lambda$) из задачи $\{L^0, B^0\}$ в цилиндре Q. В (2.6) векторные пространства сооружаются из соболевских классов $H^l(G)$ и $H^{l-1/2}(\partial G)$ аналогично (2.5).

Согласно [12] (см. также [5], § 1.2) эллиптичность задачи $\{L^0, B^0\}$ гарантирует, что в каждую полосу

$$\Pi(\gamma) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\lambda| < \gamma\} \tag{2.7}$$

попадает лишь конечное число точек из спектра σ пучка $\mathfrak{A}$. Наконец, благодаря формальной самосопряженности задачи $\{L^0, B^0\}$ спектр σ обладает симметрией относительно вещественной оси.

2. Антисимметричная форма и волны. Если $\{\Phi^{j,0}, \dots \Phi^{j,\kappa_j-1} \mid j = 1, \dots, J\}$ – система жордановых цепочек пучка (2.6), отвечающая $\lambda_0 \in \sigma$, то по лемме 3.1.2 [5] функции

$$u^{j,k}(x) = e^{i\lambda_0 z} \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!}(iz)^p \Phi^{j,k-p}(y), j = 1, \dots, J, k = 0, \dots, \kappa_j - 1, \tag{2.8}$$

являются (экспоненциальными) решениями задачи $\{L^0, B^0\}u = 0$ в Q. Свойства спектра σ гарантируют существование такого $\delta_1 > 0$, что в полосе $\Pi(\delta_1)$ расположены только вещественные собственные числа $\mu_1, \dots, \mu_M \in \mathbb{R}$; их полную алгебраическую кратность обозначим κ. Отвечающие $\mu_1, \dots, \mu_M$ экспоненциальные решения (2.8) содержат осциллирующие и полиномиальные сомножители, т.е. не затухают ни на одной из бесконечностей в цилиндре Q. Умножим эти решения $u^{j,k}$ на срезку $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную 1 при $z > 2R$ и 0 при $z < R$ и образуем линейную оболочку $\mathbf{L}$ произведений $U^{j,k} = \chi u^{j,k}; \dim \mathbf{L} = \kappa$. Теперь фиксируем весовой индекс $\beta \in (0, \min\{\delta_0, \delta_1\})$, где величина δ_0 взята из (2.3), и введем пространство $\mathbf{D}_\beta = \mathbf{L} \dotplus \mathcal{D}^l_\beta W(\Omega)$. Очевидно, что $\mathbf{D}_\beta \subset \mathcal{D}^l_{-\beta} W(\Omega)$.

По непрерывности формула Грина (2.1) распространяется на произвольные пары $u \in \mathcal{D}^l_{-\beta} W(\Omega), v \in \mathcal{D}^l_\beta W(\Omega)$. Обозначим ее левую часть через $q(u, v)$. Заметим, что $\{L, B\}\mathbf{D}_\beta \subset \mathcal{R}^l_\beta W(\Omega)$ в согласии с соотношением (2.3) и конструкцией экспоненциальных решений из $\mathbf{L}$. Поэтому антисимметричная форма q непрерывна на $\mathbf{D}_\beta \times \mathbf{D}_\beta$, причем $q(u, v) = 0$, если одна из функций $u, v \in \mathbf{D}_\beta$ принадлежит $\mathcal{D}^l_\beta W(\Omega)$. Следовательно, q можно считать определенной на $\mathbf{W}\times\mathbf{W}$, где $\mathbf{W}$ – факторпространство $\mathbf{D}_\beta/\mathcal{D}^l_\beta W(\Omega)$, изоморфное $\mathbf{L}$. Элементы пространства $\mathbf{W}$ называем *волнами*.

Сообщим факты, установленные в [13, 7] (см. также [5], § 5.1–5.3). Во-первых, полная алгебраическая кратность κ собственных чисел $\mu_1,\dots,\mu_M\in\mathbb{R}$ четна, т.е. $\kappa=2N$, и, во-вторых, в $\mathbf{L}$ можно выбрать базис $U^{1+},\dots,U^{N+}$, $U^{1-},\dots,U^{N-}$ так, чтобы выполнялись условия биортогональности и нормировки

$$q(U^{j\pm},U^{k\pm})=\pm i\delta_{j,k},\ q(U^{j\pm},U^{k\mp})=0,\ j,k=1,\dots,N. \tag{2.9}$$

Всякий элемент u пространства $\mathbf{D}_\beta$ представим в виде

$$u=U^+c^++U^-c^-+\tilde u, \tag{2.10}$$

где $U^\pm$ – строки $(U^{1\pm},\dots,U^{N\pm})$, $c^\pm\in\mathbb{C}^N$ – столбцы коэффициентов разложения и $\tilde u\in\mathcal{D}^l_\beta W(\Omega)$. Считаем, что

$$||u;\mathbf{D}_\beta||=|c^+|+|c^-|+||\tilde u;\mathcal{D}^l_\beta W(\Omega)||. \tag{2.11}$$

Смена срезки χ при сохранении ее основных свойств не влияет на пространство $\mathbf{D}_\beta$ ни алгебраически, ни топологически.

Пусть $u\mapsto\pi^\pm u=c^\pm$ – проекции в $\mathbf{D}_\beta$ и $\mathbf{D}^\pm_\beta=\{u\in\mathbf{D}_\beta:\pi^\mp u=0\}$. Ясно, что $\mathbf{W}=\mathbf{W}^+\dot{+}\mathbf{W}^-$, где $\mathbf{W}^\pm=\mathbf{D}^\pm_\beta/\mathcal{D}^l_\beta W(\Omega)$. Волны из $\mathbf{W}^-$ (из $\mathbf{W}^+$) называем *уходящими (приходящими)*.

3. Свойства операторов краевой задачи и матрица рассеяния. Помимо операторов $A_{\pm\beta}$ из (2.5) сопоставим краевой задаче (2.2) непрерывное отображение

$$\mathbf{A}_\beta=\{L,B\}:\mathbf{D}^-_\beta\to\mathcal{R}^l_\beta W(\Omega). \tag{2.12}$$

Включение $u\in\mathbf{D}^-_\beta$ означает, что в представлении (2.10) фигурируют только уходящие волны, т.е. (2.12) – оператор задачи (2.2) с *естественными условиями излучения.*

Очередные два утверждения доказаны в [7] и [5], § 5.1.

Теорема 2.1. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned}&\dim\ker A_{-\beta}=\dim\ker A_{+\beta}+N,\\&\operatorname{coker}A_{\pm\beta}=\{(v,Tv|_{\partial\Omega}):v\in\ker A_{\mp\beta}\},\end{aligned} \tag{2.13}$$

т.е., в частности, условия разрешимости задачи (2.2) *в классе* $\mathcal{D}^l_{-\beta}W(\Omega)$ *имеют вид*

$$(f,v)_\Omega+(g,Tv)_{\partial\Omega}=0\quad\forall v\in\ker A_\beta\subset\mathcal{D}^l_\beta W(\Omega). \tag{2.14}$$

Теорема 2.2. *Оператор (2.12) является фредгольмовым с нулевым индексом, причем* $\ker \mathbf{A}_\beta = \ker A_\beta$ *и* $\operatorname{coker} \mathbf{A}_\beta = \{(v, Tv|_{\partial\Omega}) : v \in \ker A_\beta\}$*, т.е.* (2.14) *– условия разрешимости задачи* (2.2) *с естественными условиями излучения.*

В силу теоремы 2.2 и формулы (2.13) имеем

$$\ker A_{-\beta} = \ker A_{+\beta} \dotplus \mathcal{L}(\eta), \tag{2.15}$$

где $\mathcal{L}(\eta)$ – линейная оболочка решений $\eta^1, \ldots, \eta^N$ однородной задачи (2.2), составляющих строку $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^N)$, которая допускает асимптотическое представление

$$\eta = U^+ + U^- s + \tilde{\eta},\ \tilde{\eta} \in \mathcal{D}^l_\beta W(\Omega)^N. \tag{2.16}$$

Матрица s из (2.16) имеет размер $N \times N$ и называется *матрицей рассеяния*. Согласно [13, 7] и предложению 5.3.4 [5] соотношения (2.9) обеспечивают унитарность s.

4. Обобщения. Для упрощения изложения была сознательно упущена возможность расширить постановку исходной задачи. Так, используя результаты [14, 15] (см. также [5], § 3.4), можно рассмотреть операторы L и B, коэффициенты которых стабилизируются с экспоненциальной скоростью к функциям, периодическим по переменным z. Одновременно цилиндр Q заменяется областью с периодически изменяющимся сечением, нормальным к оси z. Вместо одного выхода Q_+ области Ω дозволяется иметь несколько цилиндрических или периодических выходов на бесконечность. При этом все приемы исследования и утверждения сохраняются в полном объеме, разве что экспоненциальные решения (2.8) преобразуются в функции Флоке.

Незначительные изменения нужны и при переходе к задаче, в которой Q – призма с условиями периодичности или квазипериодичности на противоположных гранях. Такая постановка характерна для задач дифракции на периодических структурах (см. далее § 4).

§3. Считающее свойство расширенной матрицы рассеяния

1. Асимптотика решения и специальные базисы. Пусть удалось выбрать число $\gamma \in (\beta, \delta_0/2)$ так, что, во-первых, $(\mathbb{R} + i\gamma) \cap \sigma = \varnothing$ и, во-вторых, в полосе (2.7) помимо $\mu_1, \ldots, \mu_M$ расположены собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и $\lambda_{-1} = \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_{-m} = \overline{\lambda_m}$, причем

$\operatorname{Im}\lambda_j < 0$ при $j = 1, \dots, m$. Полную алгебраическую кратность множества $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \subset \sigma$ обозначим κ_γ и положим $N_\gamma = N + \kappa_\gamma$. Под $V^{\pm 1}, \dots, V^{\pm \kappa_\gamma}$ подразумеваем умноженные на срезку χ экспоненциальные решения (2.8), отвечающие $\lambda_{\pm 1}, \dots, \lambda_{\pm m}$, а $\mathbf{L}_{+\gamma}$ и $\mathbf{L}_{-\gamma}$ – их линейные оболочки, содержащие соответственно экспоненциально растущие и экспоненциально затухающие функции. Как и ранее, введем весовое пространство с *отделенной асимптотикой*

$$\mathbf{D}_\gamma = \mathcal{D}^l_\gamma W(\Omega) \dotplus \mathbf{L}_{-\gamma} \dotplus \mathbf{L} \dotplus \mathbf{L}_{+\gamma}.$$

Предложение 3.1 (см. [11] и теорему 5.1.4 [5]). *Если $u \in \mathcal{D}^l_{-\gamma} W(\Omega)$ – решение задачи (2.2) с правой частью $(f, g) \in \mathcal{R}^l_\gamma W(\Omega)$, то $u \in \mathbf{D}_\gamma$ и выполняется неравенство*

$$||u; \mathbf{D}_\gamma|| \leqslant c \left(||(f, g); \mathcal{R}^l_\gamma W(\Omega)|| + ||u; L_2(\Omega_0)^T|| \right),$$

где Ω_0 – компакт в $\overline{\Omega}, \operatorname{mes}_n \Omega_0 > 0$, а постоянная c зависит от Ω_0, но не от u и f, g.

Это утверждение наделяет отображение $\{L, B\} : \mathbf{D}_\gamma \to \mathcal{R}^l_\gamma W(\Omega)$ свойствами оператора $A_{-\gamma}$. Включение $u \in \mathbf{D}_\gamma$ следует интерпретировать как асимптотическое представление решения задачи (2.2) с остатком из $\mathcal{D}^l_\gamma W(\Omega)$.

В [6] (см. также [5], § 3.2) проверено, что соблюдение некоторых условий биортогональности для систем жордановых цепочек, соответствующих λ_{+k} и $\lambda_{-k} = \overline{\lambda_k}$, обеспечивает равенства

$$q(V^{-j}, V^{+k}) = i\delta_{j,k},\ q(V^{\pm j}, V^{\pm k}) = 0,\ j, k = 1, \dots, \kappa_\gamma.$$

Они не согласуются с (2.9), однако после введения в $\mathbf{L}_{-\gamma} \dotplus \mathbf{L}_{+\gamma}$ нового базиса

$$U^{N+p\pm} = 2^{-1/2}(V^{-p} \pm V^{+p}),\ p = 1, \dots, \kappa_\gamma, \tag{3.1}$$

соотношения (2.9) оказываются справедливыми при всех $j, k = 1, \dots, N_\gamma$. Поэтому понятие уходящих и приходящих волн обобщается на элементы факторпространств $\mathbf{W}^\pm_\gamma = \mathbf{D}^\pm_\gamma / \mathcal{D}^l_\gamma W(\Omega)$, где

$$\mathbf{D}^\pm_\gamma = \mathcal{D}^l_\gamma W(\Omega) \dotplus \mathbf{L}^\pm_\gamma = \{u \in \mathbf{D}_\gamma : \pi^\mp_\gamma u = 0\}$$

и $\mathbf{L}^\pm_\gamma$ – линейная оболочка функций $U^{1\pm}, \dots, U^{N_\gamma \pm}$. Обозначения $\pi^\pm_\gamma, U^\pm_\gamma = (U^{1\pm}, \dots, U^{N_\gamma \pm}), \mathbf{A}_\gamma$ и т.п., учитывающие изменения весового индекса и количество волн в базисе, разночтений не вызывают. Подчеркнем, что по тем же причинам, что и ранее, форма

q непрерывна на $\mathbf{D}_\gamma \times \mathbf{D}_\gamma$. Оператор $\mathbf{A}_\gamma$ отвечает задаче (2.2) с новыми условиями излучения, которые из-за присутствия в области определения $\mathcal{D}(\mathbf{A}_\gamma)$ экспоненциально растущих функций назовем *искусственными*.

2. Оператор задачи с искусственными условиями излучения. Несмотря на экспоненциальный рост функций $U^{N+1\pm}, \dots, U^{N_\gamma \pm}$, ничто не мешает доказать для $\mathbf{A}_\gamma$ те же утверждения, что и в п.3 § 2. Поскольку их проверка по сути повторяет рассуждения из [7, 16] и [5], §5.3, в этом разделе изложение конспективное.

Теорема 3.2. *Оператор* $\mathbf{A}_\gamma : \mathbf{D}_\gamma^- \to \mathcal{R}_\gamma^l W(\Omega)$ *фредгольмовый с нулевым индексом, причем*

$$\ker \mathbf{A}_\gamma = \ker A_\gamma, \operatorname{coker} \mathbf{A}_\gamma = \{(v, Tv|_{\partial\Omega}) : v \in \ker \mathbf{A}_\gamma\},$$

т.е. равенства (2.14), *где* β *заменено на* γ, *обеспечивают разрешимость задачи* (2.2) *с искусственными условиями излучения.*

Доказательство. Сначала заметим, что в силу второй формулы (2.13), где β заменено на γ,

$$\dim \ker A_\gamma = \dim \operatorname{coker} A_{-\gamma}, \dim \ker A_{-\gamma} = \dim \operatorname{coker} A_\gamma.$$

Добавим к этим равенствам формулу, вытекающую из теоремы о приращении индекса (см. теоремы 4.3.3, 5.1.4(4) в [5])

$$\operatorname{Ind} A_{-\gamma} - 2N_\gamma = \operatorname{Ind} A_\gamma \equiv \dim \ker A_\gamma - \dim \operatorname{coker} A_\gamma$$

(вычитаемое слева – полная алгебраическая кратность собственных чисел пучка (2.6) в полосе $\Pi(\gamma)$). Теперь арифметические вычисления показывают, что

$$\dim \ker A_\gamma = \dim \ker A_\gamma + N_\gamma, \operatorname{Ind} A_{-\gamma} = -\operatorname{Ind} A_\gamma = N_\gamma. \qquad (3.2)$$

Так как оператор $\{L, B\} : \mathbf{D}_\gamma \to \mathcal{R}_\gamma^l W(\Omega)$ наследует основные свойства от $A_{-\gamma}$,

$$\operatorname{Ind} \mathbf{A}_\gamma = \operatorname{Ind} A_{-\gamma} - \dim (\mathbf{D}_\gamma / \mathbf{D}_\gamma^-) = N_\gamma - N_\gamma = 0. \qquad (3.3)$$

Ясно, что $\ker A_\gamma \subset \ker \mathbf{A}_\gamma$; проверим обратное включение. Пусть $u = u^0 + \tilde{u} \in \ker \mathbf{A}_\gamma$, $u^0 = U^- c$, $c \in \mathbb{C}^{N_\gamma}$ и $\tilde{u} \in \mathcal{D}_\gamma^l W(\Omega)$. Так как $q(\tilde{u}, u) = q(\tilde{u}, u^0) = 0$, при помощи (2.9) выводим

$$0 = q(u, u) = q(u^0, u^0) = \sum_{j=1}^{N_\gamma} c_j \tilde{c}_j q(U^{j-}, U^{j-}) = -i|c|^2. \qquad (3.4)$$

Следовательно, $c = 0$ и $u = \tilde{u} \in \mathcal{D}^l_\gamma W(\Omega)$, что и требовалось.

В силу (3.3) размерность подпространства $\operatorname{coker} \mathbf{A}_\gamma$ равна $\dim \ker \mathbf{A}_\gamma = \dim \ker A_\gamma$. Такое же количество линейно независимых условий указано формулой (2.14), где вместо β написано γ. Поскольку $\mathbf{A}_\gamma$ – сужение оператора $A_{-\gamma}$, необходимость этих условий разрешимости очевидна. Теорема доказана.

3. Расширенная матрица рассеяния и приращение размерности ядра. При учете предложения 3.1 положим

$$\ker A_{-\gamma} = \ker A_\gamma \dotplus \mathcal{L}(\zeta), \tag{3.5}$$

где $\zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^{N_\gamma})$ – строка решений однородной задачи (2.2). Линейная оболочка столбцов $\pi^+_\gamma \zeta^1, \ldots, \pi^+_\gamma \zeta^{N_\gamma}$ совпадает с $\mathbb{C}^{N_\gamma}$. В самом деле, если это не так, то найдется нетривиальное решение $u \in \mathcal{L}(\zeta)$, подчиненное соотношению $\pi^+_\gamma u = 0$, а значит, в силу (3.4) $\pi^-_\gamma u = 0$ и $u \in \ker A_\gamma$, что противоречит (3.5). Итак, функции $\zeta^1, \ldots, \zeta^{N_\gamma}$ можно подчинить условию

$$\zeta = U^+_\gamma + U^-_\gamma S + \tilde{\zeta}, \; \tilde{\zeta} \in \mathcal{D}^l_\gamma W(\Omega). \tag{3.6}$$

(ср. с (2.16)). Матрица $S = (S_{jk})$ имеет размеры $N_\gamma \times N_\gamma$, бóльшие, чем у s. Назовем S *расширенной матрицей рассеяния*. Согласно формулам (2.9), где $j, k = 1, \ldots, N_\gamma$,

$$0 = q(\zeta^j, \zeta^k) = i\delta_{j,k} - i \sum_{p=1}^{N_\gamma} S_{jp} \overline{S}_{kp},$$

и поэтому матрица S унитарная.

Очередная теорема оправдывает введение расширенной матрицы рассеяния и является центральной для всей статьи.

Теорема 3.3. *Справедливо равенство*

$$\dim(\ker A_\beta / \ker A_\gamma) = \dim \ker(S - \mathbb{I}_\gamma) - \dim \ker(s - \mathbb{I}), \tag{3.7}$$

где $\mathbb{I}$ и $\mathbb{I}_\gamma$ – единичные матрицы размерами $N \times N$ и $N_\gamma \times N_\gamma$ соответственно.

Доказательство теоремы 3.3 приводится далее в п. 5.

Расширенная матрица рассеяния $S = S_\gamma$ может быть определена при любом индексе γ, удовлетворяющим условиям $\gamma \in (0, \delta_0/2)$

и $(\mathbb{R}+i\gamma)\cap\sigma=\varnothing$. Если коэффициенты операторов L и B не зависят от переменной z вне шара B_R, то $\delta_0=+\infty$; иными словами, запретным для весового показателя является только счетное множество $\{\tau:\tau=\operatorname{Im}\lambda,\lambda\in\sigma\}$. Из теоремы 3.3 вытекает

Следствие 3.4. *Сумма* $\dim\ker A_\gamma+\dim\ker(S_\gamma-\mathbb{I}_\gamma)$ *не зависит от* γ, *т.е. является инвариантом краевой задачи* (2.2).

Пусть по каким-либо причинам оказалось, что $\ker A_\gamma=\{0\}$. Тогда в соответствии с (3.7) число (линейно независимых) экспоненциально затухающих решений однородной задачи (2.2) равно

$$\dim\ker A_\beta=\dim\ker(S_\gamma-\mathbb{I}_\gamma)-\dim\ker(s-\mathbb{I}).$$

4. Связь матриц s и S. Введем обозначения

$$U^\pm_{(1)}=(U^{1\pm},\dots,U^{N\pm}),\ U^\pm_{(2)}=(U^{N+1\pm},\dots,U^{N_\gamma\pm}).$$

Теперь формула (3.6) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\zeta_{(1)}&=U^+_{(1)}+U^-_{(1)}S_{(11)}+U^-_{(2)}S_{(21)}+\tilde\zeta_{(1)},\\ \zeta_{(2)}&=U^+_{(2)}+U^-_{(1)}S_{(12)}+U^-_{(2)}S_{(22)}+\tilde\zeta_{(2)},\end{aligned}\tag{3.8}$$

причем блоки $S_{(11)}$ и $S_{(22)}$ имеют размеры $N\times N$ и $(N_\gamma-N)\times(N_\gamma-N)$ соответственно,

$$S=\begin{pmatrix}S_{(11)}, & S_{(12)}\\ S_{(21)}, & S_{(22)}\end{pmatrix}.$$

Лемма 3.5. *Пусть h – столбец и l – строка из $\mathbb{C}^{N_\gamma-N}$. Если $S_{(22)}h=h$ и $lS_{(22)}=l$, то $S_{(12)}h=0$ и $lS_{(21)}=0$.*

Доказательство. Проверим утверждение для строки (столбец рассматривается аналогично). Дополним l нулями слева до длины N_γ. Так как S – унитарная матрица, получаем $|(0,l)S|=|l|$. С другой стороны,

$$|(0,l)S|^2=|lS_{(21)}|^2+|lS_{(22)}|^2=|lS_{(21)}|^2+|l|^2.$$

Таким образом, $|lS_{(21)}|=0$, что и требовалось.

Проверку очередного утверждения откладываем до следующего раздела.

Предложение 3.6. *Справедливо равенство*

$$s = S_{(11)} - S_{(12)}(\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)})^{-1}S_{(21)}, \tag{3.9}$$

где $\mathbb{I}_{(2)}$ – *единичная матрица размером* $(N - N_\gamma) \times (N - N_\gamma)$.

Подчеркнем, что благодаря лемме 3.5 вычитаемое в (3.9) определено однозначно даже в том случае, когда 1 – собственное число матрицы $S_{(22)}$.

5 . Доказательства. Для краткости функции из $\mathcal{D}^l_\gamma W(\Omega)$ обозначаем многоточием. В силу (3.1) равенства (3.8) преобразуются в такие:

$$\begin{aligned}
\zeta_{(1)} &= U^+_{(1)} + U^-_{(1)}S_{(11)} + 2^{-1/2}(V^- - V^+)S_{(21)} + \dots,\\
\zeta_{(2)} &= 2^{-1/2}(V^- + V^+) + U^-_{(1)}S_{(12)} + 2^{-1/2}(V^- - V^+)S_{(22)} + \dots =\\
&= 2^{-1/2}V^+(\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)}) + U^-_{(1)}S_{(12)} + 2^{-1/2}V^-(\mathbb{I}_{(2)} + S_{(22)}) + \dots
\end{aligned}$$

Здесь $V^\pm = (V^{\pm 1}, \dots, V^{\pm(N_\gamma - N)})$, причем строка V^+ (строка V^-) составлена из экспоненциально растущих (убывающих) функций. Умножим формулу для $\zeta_{(2)}$ справа на $(\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)})^{-1}S_{(21)}$ и вычтем результат из $\zeta_{(1)}$. Имеем

$$\begin{aligned}
\zeta' &\equiv \zeta_{(1)} - \zeta_{(2)}(\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)})^{-1}S_{(21)} =\\
&= U^+_{(1)} + U^-_{(1)}\{S_{(11)} - S_{(12)}(\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)})^{-1}S_{(21)}\} -\\
&- 2^{-1/2}V^-(S_{(21)} + (\mathbb{I}_{(2)} + S_{(22)})(\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)})^{-1}S_{(21)}) + \dots
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Подчеркнем, что $(\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)})^{-1}$ – обратный оператор к $\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)} : \mathcal{J}^\perp \to \mathcal{J}^\perp$, где $\mathbb{C}^{N_\gamma - N} = \mathcal{J}^\perp \oplus \mathcal{J}^0$ и $\mathcal{J}^0 = \ker(\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)})$. Так как в силу леммы 3.5 $S_{(21)}\mathbb{C}^N \subset \mathcal{J}^\perp$ и $S_{(12)}\mathcal{J}^0 = \{0\}$, все предыдущие действия допустимы. По построению $V^- \in \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)^{N_\gamma - N}$, а значит, при учете теоремы 3.2 заключаем, что строки η и ζ' из (2.18) и (3.10) совпадают с точностью до слагаемых из $\mathcal{D}^l_\beta W(\Omega)^{N_\gamma - N}$. Тем самым формула (3.9) проверена.

Перейдем к доказательству основной теоремы 3.3. Любой элемент факторпространства $\ker A_{-\gamma}/\ker A_\gamma$, содержащего $\ker A_\beta/\ker A_\gamma$, имеет своим представителем линейную комбинацию факторпространство

$$\begin{aligned}\zeta^0 &\equiv \zeta_{(1)}h_{(1)} + \zeta_{(2)}h_{(2)} = \\ &= U^+_{(1)}h_{(1)} + U^-_{(1)}(S_{(11)}h_{(1)} + S_{(12)}h_{(2)}) + \\ &+ 2^{-1/2}V^+(S_{(21)}h_{(1)} + (\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)})h_{(2)}) - \\ &- 2^{-1/2}V^-(S_{(21)}h_{(1)} - (\mathbb{I}_{(2)} + S_{(22)})h_{(2)}) + \dots\end{aligned} \qquad (3.11)$$

Включение $\zeta^0 \in \mathcal{D}^l_\beta W(\Omega)$ означает, что из разложения (3.11) исчезают волны $U^\pm_{(1)}$ и V^+. Таким образом, оно эквивалентно равенствам

$$h_{(1)} = 0,\ S_{(12)}h_{(2)} = 0,\ S_{(22)}h_{(2)} = h_{(2)}.$$

В силу леммы 3.5 последнее равенство влечет среднее. Итак,

$$\dim(\ker A_\beta / \ker A_\gamma) = \dim \ker(\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)}). \qquad (3.12)$$

Осталось убедиться в том, что у соотношений (3.7) и (3.12) одинаковые правые части. Пусть h – столбец из $\mathbb{C}^{N_\gamma}$, а $h_{(1)}$ и $h_{(2)}$ – составляющие его столбцы из $\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{C}^{N_\gamma - N}$ ($h_{(1)}$ отсекается сверху). Если $h \in \ker(\mathbb{I}_\gamma - S)$, то в случае $h_{(1)} = 0$ видим, что $h_{(2)} \in \ker(\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)})$, а в случае $h_{(1)} \neq 0$ приходим к формулам $h_{(2)} = -(\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)})^{-1} S_{(21)} h_{(1)}$ и

$$\{S_{(11)} - S_{(12)}(\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)})^{-1} S_{(21)}\} h_{(1)} = h_{(1)},$$

т.е. ввиду предложения 3.6 $h_{(2)}$ – нетривиальный элемент подпространства $\ker(\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)})$. Таким образом,

$$\dim \ker(\mathbb{I}_\gamma - S) \geqslant \dim \ker(\mathbb{I}_{(2)} - S_{(22)}) + \dim \ker(\mathbb{I} - s). \qquad (3.13)$$

Повторение рассуждений в обратном порядке приводит к замене знака " $\geqslant$ " в (3.13) на " $\leqslant$ ". Теорема 3.3 доказана.

§4. Дифракция плоской волны на периодической границе

1. Постановка задачи. Пусть H – гладкая 2π - периодическая функция и $\mathbb{R}^2_H = \{x = (x_1, x_2) : x_2 > H(x_1)\}$. Рассмотрим задачу о падении плоской акустической волны на периодическую поверхность $\partial\mathbb{R}^2_H$. Известно (см. [17, 18]), что однородная задача Дирихле для оператора Гельмгольца $\Delta + k^2$ в $\mathbb{R}^2_H$ не имеет экспоненциально затухающих при $x_2 \to +\infty$ решений (поверхностных волн). Цель этого параграфа – показать, что в случае условий Неймана такие волны возможны. Как обычно, задача упрощается путем постановки условий квазипериодичности на боковых сторонах полуполосы $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2_H : x_1 \in (0, 2\pi)\}$ с криволинейным основанием $\Gamma = \{x \in \partial\mathbb{R}^2_H : x_1 \in (0, 2\pi)\}$:

$$\begin{aligned} &\triangle u(x) + k^2 u(x) = 0, x \in \Omega;\ \partial_n u(x) = 0, x \in \Gamma; \\ &\partial_1^m u(0, x_2) = \exp(2\pi i\alpha)\partial_1^m u(2\pi, x_2), m = 0, 1, x_2 > H(0). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $\partial_j = \partial/\partial x_j$ и ∂_n – производная вдоль внешней нормали $n = (n_1, n_2)$. Параметры α и k характеризуют угол падения и длину волны. Для упрощения формул считаем, что

$$\alpha \in (-1/2, 0), k^2 \in (\alpha^2, [1 + \alpha]^2). \tag{4.2}$$

Как упоминалось в п.4 § 2, полученные в статье результаты применимы к задаче (4.1). В случае (4.2) собственные числа пучка (2.6) (обыкновенное дифференциальное уравнение на отрезке $G = (0, 2\pi)$) оказываются простыми, причем $\lambda_0^\pm = \pm\theta_0, \lambda_n^\pm = \pm i\theta_n$, где $n \in \mathbb{N}$ и $\theta_m = |k^2 - (\alpha + m)^2|^{1/2}$. Выберем весовые показатели так, чтобы $0 < \beta < \theta_1 < \gamma < \theta_2$. Тогда $\dim\mathbf{L} = 2$ и $\dim\mathbf{L}_{\pm\gamma} = 1$. Кроме того, прямые вычисления доставляют базис в линеале $\mathbf{W}_\gamma$, подчиненный условиям (2.9):

$$\begin{aligned} &U^{1\pm}(x) = (4\pi\theta_0)^{-1/2}\exp\{i\alpha x_1 \pm i\theta_0 x_2\}, \\ &U^{2\pm}(x) = (8\pi\theta_1)^{-1/2}\exp\{i(1 + \alpha)x_1\}[\exp(-\theta_1 x_2) \mp i\exp(\theta_1 x_2)]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Наконец, одно из фигурирующих в (3.5) решений однородной задачи (4.1) обладает асимптотикой

$$\zeta^2 = U^{2+} + U^{1-}S_{12} + U^{2-}S_{22} + \tilde{\zeta}^2, \tag{4.4}$$

где $|\nabla_x^\alpha \tilde{\zeta}^2(x)| = O(e^{-\theta_2 x_2})$ и $(S_{12}, S_{22})^t$ – правый столбец расширенной матрицы рассеяния (она имеет размер 2×2).

Для достижения цели воспользуемся теоремой 3.3, обеспечивающей существование поверхностной волны при условии

$$S_{22} = 1. \tag{4.5}$$

В самом деле, благодаря предложению 3.6 из (4.5) выводим, что $S_{21} = S_{12} = 0$ и $S_{11} = s$, т.е. согласно формуле (3.7)

$\dim \ker A_\beta = 1 + \dim \ker A_\gamma \geqslant 1$. В следующих разделах будут подобраны положительные числа ε, Λ и функция h, такие, что при

$$k^2 = (1+\alpha)^2 - \Lambda^2\varepsilon^4,\ H(x_1) = \varepsilon h(x_1) \tag{4.6}$$

условие (4.5) выполняется. Подчеркнем, что параметр ε мал, т.е. собственное число k^2 из (4.6) попадает на непрерывный спектр $[\alpha^2, +\infty)$ задачи (4.1). Необходимые свойства функции h формулируются в терминах коэффициентов $h_m = \overline{h_m}$ ряда Фурье

$$h(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} h_m \exp(imx_1), \tag{4.7}$$

т.е. не предъявляются требования к симметрии области. За счет сдвига начала координат добиваемся равенств $h_0 = 0$ и $h(0) = 0$.

2. Промежуточная асимптотика. Рассмотрим предельное значение $k_0^2 = (1+\alpha)^2$ параметра k^2 (в обозначения вводим значок "о"). Поскольку $\theta_0 = (1+2\alpha)^{1/2}$ и $\theta_1 = 0$, в базисе

$$\begin{aligned} U_0^{1\pm}(x) &= (4\pi\theta_0)^{-1/2}\exp\{i(\alpha x_1 \mp \theta_0 x_2)\},\\ U_0^{2\pm}(x) &= (4\pi)^{-1/2}\exp\{i(1+\alpha)x_1\}(1 \mp ix_2) \end{aligned} \tag{4.8}$$

нет экспоненциально растущих волн, т.е. при $k^2 = k_0^2$ обычная матрица рассеяния s^0 приобретает размер 2×2 (в случае (4.6) s – скаляр). Столбец (s_{21}^0, s_{22}^0) содержит коэффициенты разложения (2.16) решения задачи $(4.1)_0$ (положили $k = k_0$)

$$\eta_0^2 = U_0^{2+} + U_0^1 s_{12} + U_0^{2-} s_{22} + \tilde{\eta}_0^2. \tag{4.9}$$

Ввиду слабой искривленности границы Γ нетрудно найти начальные члены асимптотики $\eta_0^2 = \eta_{00}^2 + \varepsilon\eta_{01}^2 + \varepsilon^2\eta_{02}^2 + \dots$ В частности, $\Omega = (0, 2\pi)\times\mathbb{R}_+$ при $\varepsilon = 0$ и $\eta_{00}(x) = \pi^{-1/2}\exp\{i(1+\alpha)x_1\}$. Следующие коэффициенты строятся при помощи асимптотической процедуры, описанной, например, в [19]. Метод Фурье дает явные формулы, которые показывают, что

$$\begin{aligned} &s_{12}^0 = -2i\varepsilon X + O(\varepsilon^2),\ s_{22}^0 = 1 - 2\varepsilon^2 Z + O(\varepsilon^3),\\ &X = \theta_0^{-1/2}(1+\alpha)h_{-1},\ Z = |X|^2 - i\tau|X|^2 - iY,\\ &\tau = \theta_2^{-1}\theta_0,\ Y = (1+\alpha)^2 \sum \theta_{1-m}^{-1} m^2 |h_m|^2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

(суммирование ведется по $m \in \{\pm 2, \pm 3, \dots\}$). Полученные асимптотики обосновываются по схеме из [20; § 7.6].

3. Окончательная асимптотика. При условии (4.6) вычислим с точностью $O(\varepsilon)$ величины S_{22} и S_{12} из (4.4). Для этого воспользуемся подходом, предложенным в [21]. Поскольку коэффициенты оператора задачи $(4.1)_0$ претерпевают возмущение порядка ε^4 (см. (4.6)), решение (4.9) можно преобразовать в "хорошее" приближение к решению (4.4), причем в исправлении нуждаются разложения на бесконечности. Согласно (4.6) $\theta_0 = (1+2\alpha)^{1/2} + O(\varepsilon^4)$ и $\theta_1 = \varepsilon^2\Lambda$. Следовательно, погрешность в соотношениях, связывающих базисы (4.3) и (4.8) на множестве $\{x \in \Omega : x_2 < c\ln\varepsilon\}$,

$$\begin{aligned} &U^{1\pm}(x) \approx U_0^{1\pm}(x),\, (2\Lambda)^{1/2}(1 \mp i)U^{2\pm}(x) \approx \\ &\quad \approx U_0^{2+}(x) + U_0^{2-}(x) \pm \Lambda\varepsilon^2(U_0^{2+}(x) - U_0^{2-}(x)), \end{aligned} \tag{4.11}$$

составляет $O(\varepsilon^4(1+x_2^2))$. Заменим в правой части (4.4) волны $U^{j\pm}$ их приближениями из (4.11). Сравнивая результат с (4.9) и учитывая формулы (4.10) для s_{12}^0 и s_{22}^0, обнаруживаем искомую асимптотику

$$\begin{aligned} &S_{12} = (i-1)^{-1}(8\Lambda)^{1/2}(\Lambda + Z)^{-1}X + O(\varepsilon) \\ &S_{22} = i(\Lambda - Z)(\Lambda + Z)^{-1} + O(\varepsilon). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Обоснование асимптотических формул получается при помощи тех же рассуждений, что и в [21].

4. Существование поверхностных волн. Фиксируем величину $Y > 0$ из (4.10). Нетрудно убедиться в том, что $\mathrm{Re}S_{22} > 0$ при малом ε. Следовательно, благодаря унитарности матрицы S равенство (4.5) выводится из соотношений

$$S_{12} = 0,\ \mathrm{Im}S_{22} = 0,$$

которые можно записать в виде уравнений

$$X = F_1(X,\Lambda),\ \Lambda = F_2(X,\Lambda) \tag{4.13}$$

для неизвестных X и Λ из (4.10) и (4.6). В (4.13)

$$\begin{aligned} &F_1(X,\Lambda) = X - (8\Lambda)^{1/2}(i-1)(\Lambda+Z)S_{12}, \\ &F_2(X,\Lambda) = \Lambda - (2Y)^{-1}\mathrm{Im}S_{22}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

При малом $\varepsilon > 0$ существование решения системы (4.13) на множестве

$$K_\rho = \{(X, \Lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |X| \leqslant \rho, |\Lambda - Y| \leqslant \rho\}$$

вытекает из теоремы Брауэра о неподвижной точке. Здесь следует упомянуть два факта. Во-первых, очевидная непрерывная зависимость элементов матрицы S от параметров h_1 и Λ не нарушается дополнительными множителями в (4.14) и (4.10). Во-вторых, согласно [20, 21] равенства из (4.10) и (4.12), содержащие бесконечно малые $O(\varepsilon^p)$, можно заменить оценками с мажорантами $c\varepsilon^p$, в которых постоянные c не зависят от $(X, \Lambda) \in K_{\rho^*}$ (число $\rho^* > 0$ определяется величиной $Y > 0$). Таким образом, нужные неравенства $|F_j(X, \Lambda)| \leqslant \rho$ при $(X, \Lambda) \in K_\rho$ достигаются за счет уменьшения положительных ε и ρ.

Итак, установлено, что “настройка” параметров Λ, ε и h, указанных в (4.6), формирует поверхностную волну в задаче (4.1). При этом у функции h оставлены свободными все коэффициенты ряда Фурье (4.7), за исключением $h_{-1} = \overline{h_1}$.

Литература

1. D. V. Evans, M. Levitin, D. Vassiliev, *Existance theorems for trapped modes.* J. Fluid. Mech. **261** (1994), 21–31.
2. А. Н. Попов, *О существовании собственных колебаний резонатора, открытого в волновод.* Ж.Т.Ф. **56**, No. 10 (1986), 1916–1922.
3. D. V. Evans, *Trapped acoustic modes.* IMA J. Appl. Math. **49** (1992), 45–60.
4. В. Ю. Готлиб, *О решениях уравнения Гельмгольца, сосредоточенных вблизи плоской периодической границы.* Зап. научн. семин. ПОМИ РАН, **250** (1998), 83–96.
5. S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries.* Berlin : Walter de Gruyter, 1994.
6. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками.* Math. Nachr. **76** (1977), 39–60.
7. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Принципы излучения для самосопряженных эллиптических задач.* Проблемы матем. физики. Вып.12 (1991), 88–124.
8. А. Г. Костюченко, А. А. Шкаликов, *Самосопряженные квадратичные пучки операторов и эллиптические задачи.* ФАиП **17**, вып.2 (1983), 38–61.
9. А. А. Шкаликов, *Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи связанные с ними.* Труды семинара им. И. Г. Петровского Вып. 14 (1989), 140–224.
10. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Самосопряженные задачи с условиями излучения на ребрах границы.* Алгебра и анализ **4**, No. 3 (1992), 196–225.

11. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.* Тр. Моск. мат. о-ва **16** (1967) 209–292.
12. М. С. Агронович, М. С. Вишик, *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида.* Успехи матем. наук **19**, No. 3 (1964), 53–160.
13. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Об условиях излучения для самосопряженных эллиптических задач.* Доклады АН СССР **311**, No. 3 (1990), 532–536.
14. С. А. Назаров, *Эллиптические краевые задачи с периодическими коэффициентами в цилиндре.* Известия АН СССР, Серия матем. **45**, No. 1 (1981), 101–112.
15. С. А. Назаров, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач с периодическими коэффициентами.* Вестник ЛГУ. Серия 1, вып. 3, No. 15 (1985), 16–22.
16. С.А. Назаров, *Несамосопряженные эллиптические задачи с полиномиальным свойством в областях, имеющих цилиндрические выходы на бесконечность.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **249** (1997), 212–231.
17. F. Rellich, *Uber das asymptotishe Verhalten der Losungen von in unendlichen Gebieten.* Jber. Deutschen Math. Verein, **53** (1943), 57–64.
18. R. Petit Ed., *Topics in current Physics.* Vol. 22. Springer-Verlag, 1980.
19. С. А. Назаров, М. В. Олюшин, *О возмущениях собственных значений задачи Неймана вследствие вариации границы области.* Алгебра и анализ. **5**, No. 2 (1993), 169–188.
20. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир, 1972. 740 с.
21. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *Аномалии Вуда и поверхностные волны в задаче рассеяния на периодической границе. 1.* Матем. сборник **190**, No. 1 (1999), 109–138; 2.ibid **190**, No. 2 (1990) 43–70.

Kamotskii I. V., Nazarov S. A. An augmented scattering matrix and an exponentially decreasing solution of elliptic boundary-value problem in the domain with cylindrical outlets.

Self-adjoint elliptic boundary-value problem in domain with cylindrical outlets to infinity is considered. The notion of augmented scattering matrix is introduced due to artificial radiation conditions. The properties of augmented scattering matrix are studied and the connection with classical scattering matrix is demonstrated. The central point is possibility to calculate the number of leaner independent solutions of homogeneous problem with fixed rate of decreasing at infinity by analyzing the spectrum of augmented scattering matrix. This property is applied to problem of diffraction on periodical boundary as example.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 23 декабря 1999 г.