A. G. Kachurovskii, Fluctuation of means in the Birkhoff-Khinchin ergodic theorem, *Trudy Inst. Mat. SO RAN*, 1992, Volume 21, 52–86

А. Г. КАЧУРОВСКИЙ

ФЛУКТУАЦИИ СРЕДНИХ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ БИРКГОФА — ХИНЧИНА

Александру Даниловичу к 80-летию

В работе исследуются некоторые качественные характеристики сходимости в эргодической теореме Биркгофа — Хинчина.

В первой главе для этого используются возможности, предоставляемые нестандартным анализом в интерпретации Э. Нельсона [1, 2]. Основная теорема второй главы — флуктуационная эргодическая теорема — является уточнением теоремы Биркгофа — Хинчина и формально уже не имеет отношения к нестандартному анализу. Из флуктуационной эргодической теоремы следуют как обе теоремы первой главы, так и теорема Биркгофа — Хинчина (здесь следует отметить, что при ее доказательстве существенно используется максимальная эргодическая теорема).

Мне приятно выразить благодарность С. С. Кутателадзе за консультации по нестандартному анализу и В. В. Иванову за плодотворное обсуждение содержания первой главы.

ГЛАВА 1

ДВА ПРЕДЕЛА В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ БИРКГОФА — ХИНЧИНА

Результаты этой главы своим появлением обязаны монографии [1] Э. Нельсона, автора оригинального направления в нестандартном анализе [2]. Его так называемая «теория внутренних множеств» (IST) дает возможность увидеть новое в обычных математических объектах, ничего в них не изменяя и не внося никаких дополнений. Например, появляется возможность на (обычной) действительной прямой увидеть бесконечно малые и бесконечно большие действительные числа, и никаких других бесконечно малых и бесконечно больших не возникает (ср. с [3]). Ситуация напоминает использование цветного телевизора вместо черно-белого: картинка та же, но появляется возможность разглядеть различия, которых не было видно на черно-белом «экране».

В [1] Э. Нельсоном предложено элементарное изложение основ теории вероятностей, не перегруженное обычным для современных учебников по этой науке теоретико-множественным формализмом (см., например, его определение случайной величины). Введение в рассмотрение бесконечно больших и бесконечно малых (очень естественное) позволяет, например, сформулировать и строго доказать элементарные аналоги таких теорем, как усиленный закон больших чисел и центральная предельная теорема. При этом оказывается возможным вывод обычных теорем из их элементарных аналогов, т. е. с содержательной точки зрения элементарная теория оказывается эквивалентной обычной теории вероятностей.

В этой главе получен элементарный аналог эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина (теорема 1). Показано, как из нее выводится обычная теорема Биркгофа — Хинчина для автоморфизма пространства Лебега. Кроме того, удается рассмотреть сходимость средних в этой обычной теореме в «цветном телевизоре» IST (теорема 2): оказывается, кроме обычного предела, определяемого средними с номерами $n \approx \infty$, существует еще один предел, «достижимый», определяемый средними с номерами $n \ll \infty$, причем численные значения этих пределов могут не совпадать ни в одной точке фазового пространства.

§ 1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

В этом небольшом параграфе для удобства читателя приводятся необходимые определения и формулировки из нестандартного анализа в интерпретации Э. Нельсона; развернутое изложение имеется в [1, 2]. Вводится также новое понятие «цвета» сходимости числовой последовательности.

1.1. В множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел n указываются стандартные (ограниченные; обозначение $n \ll \infty$) числа и нестандартные (неограниченные; обозначение $n \approx \infty$) числа. Соответственно в множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел r выделяются инфинитезимали (бесконечно малые; обозначение $r \approx 0$) — такие действительные числа r, для которых $|r| < 1/n$ при некотором $n \approx \infty$. Действительные числа a и b называют бесконечно близкими (обозначение $a \approx b$) в случае $|a-b| \approx 0$. Используется также обозначение $x \gg y$ — в случае $x > y$ и $x \not\approx y$.

1.2. По аналогии с понятием предела (бесконечной) числовой последовательности появляется возможность ввести понятие предела (конечной) последовательности $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$ при $\nu \approx \infty$. Такая последовательность называется (около) сходящейся, если для некоторого x^* будет $x_n \approx x^*$ при всех неограниченных $n \leqslant \nu$. В этом случае говорят, что $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$ (около)сходится к x^*. Отметим, что если рассматриваемая последовательность сходится к x^*, то она сходится также и к y тогда и только тогда, когда $y \approx x^*$.

Поведение (около)сходящейся последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\nu}$ вполне соответствует интуитивным представлениям о сходимости; рассмотрев для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ число n_ε — наименьшее такое, что $|x_n - x^*| \leqslant \varepsilon$ для всех n из промежутка $n_\varepsilon \leqslant n \leqslant \nu$, убеждаемся в том, что при $\varepsilon \gg 0$ будет $n_\varepsilon \ll \infty$.

Рассмотрим теперь бесконечную сходящуюся (к x^{**}) числовую последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ в «цветном телевизоре» IST. Понятно, что $x_n \approx x^{**}$ при достаточно больших n (при $n \geqslant \nu_2 \approx \infty$). Возможны три типа сходимости:

(1) Белая сходимость: для любого $\nu \approx \infty$ последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\nu}$ (около)сходящаяся (к x^*). В этом случае можно считать $x^* = x^{**}$.

Пример: $x_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$.

(2) Цветная сходимость: существует такое $\nu_1 \approx \infty$, что $\{x_n\}_{n=0}^{\nu_1}$ (около)сходящаяся (к x^*), и найдется такое $\nu > \nu_1$, что $\{x_n\}_{n=0}^{\nu}$ не является (около)сходящейся. В этом случае, вообще говоря, $x^* \not\approx x^{**}$.

Пример: $x_n = \dfrac{1}{n+1}$, $0 \leqslant n \leqslant \nu_1 \approx \infty$;

$$x_n = 1 + \frac{1}{n+1}, \quad n > \nu_1.$$

(3) Черная сходимость: для любого $\nu \approx \infty$ последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\nu}$ не является (около)сходящейся. В этом случае x^* отсутствует.

Пример: $x_{2n} = 0$, $x_{2n+1} = 1$, $0 \leqslant n \leqslant \nu \approx \infty$;

$x_n = 1/n$, $n > 2\nu + 1$.

Естественно назвать предел x^* *достижимым*: как уже отмечалось, он «наблюдаем» при $n \ll \infty$, $n \to \infty$; предел x^{**} — *недостижимым*; он, вообще говоря, никак не связан со значениями x_n при $n \ll \infty$.

Оказывается полезным также следующее определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ (все равно — конечная или бесконечная) *допускает k ε-флуктуаций*, если для некоторых $0 \leqslant n_0 < n_1 < \ldots < n_k$ будет $|x_{n_0} - x_{n_1}| \geqslant \varepsilon, \ldots, |x_{n_{k-1}} - x_{n_k}| \geqslant \varepsilon$.

Отметим, что бесконечная последовательность сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, для которого она не допускает k ε-флуктуаций.

Последовательность (конечная или бесконечная) называется *последовательностью ограниченной флуктуации* [1], если для любых $\varepsilon \gg 0$ и $k \approx \infty$ она не допускает k ε-флуктуаций.

Понятно, что всякая (около)сходящаяся (конечная) последовательность имеет ограниченную флуктуацию; обратное, вообще говоря, неверно, но имеет место следующее важное утверждение. *Если последовательность* $\{x_n\}_{n=0}^{\nu}$, $\nu \approx \infty$, *является последовательностью ограниченной флуктуации, то найдется такое неограниченное* $\mu \leqslant \nu$, *что последовательность* $\{x_n\}_{n=0}^{\mu}$ — *(около)сходящаяся* [1, р. 22]. Ее (около)предел x^* будем по аналогии с таким же пределом для бесконечной последовательности называть *достижимым пределом*.

Таким образом, из ограниченности флуктуации конечной последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\nu}$, $\nu \approx \infty$, следует существование у нее достижимого предела. Очевидно, этим же свойством обладают и бесконечные последовательности ограниченной флуктуации. Поэтому если бесконечная последовательность ограниченной флуктуации сходится, то ее сходимость либо белая, либо цветная (т. е. не черная).

1.3. Пусть (Ω, λ) — пространство с (нормированной) мерой; $A(x)$ — (некоторое) теоретико-множественное свойство. Говорят, что $A(x)$ выполняется *примерно всюду* — пр. в.— *на* Ω (nearly everywhere — n. e.— в [2]), если для любого $\varepsilon \gg 0$ найдется такое множество $A_\varepsilon \subseteq \Omega$ меры не меньше $1-\varepsilon$, что $A(x)$ выполняется для любого $x \in A_\varepsilon$. *Элементарным* пространство с мерой называется в случае конечности множества Ω; в этом случае Ω предполагается состоящим из конечного числа атомов положительной меры; автоморфизмы такого пространства с мерой будем называть *элементарными*.

Доказательство следующего утверждения имеется в [1, р. 49—50].

Если $\{f_n\}_{n=0}^{\nu}$, $\nu \approx \infty$ — *последовательность действительных функций на элементарном пространстве с мерой* (Ω, λ), *то последовательность* $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\nu}$ *имеет ограниченную флуктуацию для пр. в.* $x \in \Omega$ *тогда и только тогда, когда для любых* $\varepsilon \gg 0$ и $k \approx \infty$ *будет* $\lambda(\{x \mid \{f_n(x)\}_{n=0}^{\nu}$ допускает k ε-флуктуаций$\}) \approx 0$.

Оказывается полезным рассмотреть внешнее множество $\widehat{L_1}(\Omega)$ функций из $L_1(\Omega)$, удовлетворяющих любому из следующих двух эквивалентных друг другу условий:

(1) $\int\limits_{\Omega} |f(x)|\, d\lambda \ll \infty$ и для любого $E \subset \Omega$, $\lambda(E) \approx 0$, будет $\int\limits_{\Omega} |f(x)| \times \chi_E(x) \approx 0$.

(2) $\int\limits_{\Omega} |f(x) - f^{(a)}(x)|\, d\lambda \approx 0$ для любого $a \approx \infty$ (здесь $f^{(a)}(x) = f(x) \times \chi_{\{|f(x)| \leqslant a\}}(x)$). Другими словами, сходимость последовательности

$$\left\{ \int\limits_{\{x \mid |f(x)| \leqslant n\}} |f(x)|\, d\lambda \right\}_{n=0}^{\infty}$$

(сходящейся к $\|f\|_1$) — белая.

Доказательство эквивалентности приведенных двух условий, данное в [1, р. 30—31] для элементарного пространства (Ω, λ), на общий случай переносится дословно. Очевидным достаточным условием принадлежности $f \in L_1(\Omega)$ к $\widehat{L_1}(\Omega)$ является условие $|f(x)| \leqslant M \ll \infty$ для любого $x \in \Omega$.

В дальнейшем нам пригодится также следующее утверждение [1, р. 31—32].

Пусть (Ω, λ) — *элементарное пространство с мерой и* $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ — *множество его атомов. Пусть множества* A_j, $j = 1, \ldots, m$, *таковы, что каждое из них является объединением некоторого (непустого, конечного) мно-*

жества атомов из $\{a_i\}_{i=1}^n$, причем $A_{j_1} \cap A_{j_2} = \varnothing$ для $j_1 \neq j_2$, и $\bigcup\limits_{j=1}^m A_j = \bigcup\limits_{i=1}^n a_i (= \Omega)$. (Каждое такое A_j можно рассматривать как элементарное пространство с мерой (A_j, λ_j), положив $\lambda_j(B) = \dfrac{\lambda(B)}{\lambda(A_j)}$ для $B \subseteq A_j$.)

Тогда из условия $f \in \widehat{L}_1(\Omega)$ следует $f \in \widehat{L}_1(A_j)$ для пр. в. (по мере λ) A_j.

§ 2. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

2.1. Пусть (Ω, λ) — пространство с (нормированной) мерой, T — его автоморфизм, $f \in L_1(\Omega)$. Через $s_n(x;\ f,\ T)$ будем обозначать $\sum\limits_{k=0}^{n} f(T^k x)$ (здесь $x \in \Omega$, $n \geqslant 0$). Если не вызывает сомнений, о каких f и T идет речь, то пишем просто $s_n(x)$.

Напомним формулировку следующей классической теоремы.

Эргодическая теорема Биркгофа — Хинчина. *Для п. в. точек $x \in \Omega$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} s_n(x) = f^{**}(x)$. При этом $f^{**} \in L_1(\Omega)$ и $\int\limits_\Omega f^{**}(x)\,d\lambda = \int\limits_\Omega f(x)\,d\lambda$. В случае эргодичности меры λ для п. в. x будет $f^{**}(x) = \int\limits_\Omega f(x)\,d\lambda$.*

2.2. Теорема 1. Пусть (Ω, λ) — *элементарное пространство с мерой, T — его (элементарный) автоморфизм, $f \in \widehat{L}_1(\Omega)$, и пусть задано $\nu \approx \infty$. Тогда*:

(А) *Последовательность $\left\{\dfrac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu}$ является последовательностью ограниченной флуктуации для пр. в. $x \in \Omega$ (и для тех же x эта последовательность имеет достижимый предел).*

(Б) *Для любого $\varepsilon \gg 0$ найдутся измеримое $A_\varepsilon \subseteq \Omega$, $\lambda(A_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$ и $f_\varepsilon^* \in \widehat{L}_1(\Omega)$, а также $\nu_\varepsilon \approx \infty$, $\nu_\varepsilon \leqslant \nu$ такие, что для любого $x \in A_\varepsilon$ последовательность $\left\{\dfrac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu_\varepsilon}$ (около) сходится к $f_\varepsilon^*(x)$. При этом $\int\limits_\Omega f_\varepsilon^*(x)\,d\lambda = \int\limits_\Omega f(x)\,d\lambda$.*

Пример 1, показывающий, что последовательность средних в теореме 1 может для пр. в. x быть не (около) сходящейся.

Пусть $N \approx \infty$ — четное натуральное число. Рассмотрим пространство с мерой, состоящее из N^2 атомов меры $1/N^2$ каждый, и автоморфизм T периода N^2, переводящий их друг в друга. Пусть f равно 1 на первых $N^2/2$ атомах и f равно 0 на последних $N^2/2$ (последний атом под действием T переходит в первый), и пусть $\nu_1 = N$, $\nu_2 = N^2$. Тогда $\dfrac{1}{\nu_1+1} s_{\nu_1}(x)$ будет пр. в. равно 0 или 1, $\dfrac{1}{\nu_2+1} s_{\nu_2}(x)$ всюду равно 1/2. Поэтому последовательность $\left\{\dfrac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu_2}$ не является (около) сходящейся для пр. в. x.

Рассмотренный пример объясняет также, почему вторая часть эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина (т. е. случай эргодичности меры λ) не имеет естественного аналога в формулировке теоремы 1 (см., однако, замечание 4 ниже).

Пример 2, показывающий, что в случае $f \in L_1(\Omega) \setminus \widehat{L}_1(\Omega)$ аналог теоремы 1, вообще говоря, не имеет места, т. е. что при $f \notin \widehat{L}_1(\Omega)$ может для пр. в. последовательностей средних не быть ни ограниченности флуктуации, ни существования достижимого предела.

Для данного четного $N \approx \infty$ рассмотрим пространство с мерой, состоящее из N атомов меры $1/N$ каждый, и автоморфизм T периода N, переводящий атом a_i в a_{i+1}, $1 \leqslant i \leqslant N-1$; a_N — в a_1; и пусть задано ограниченное $\varepsilon \gg 0$. Положим $f(a_{2n-1}) = N\varepsilon$, $f(a_{2n}) = -N\varepsilon$, $1 \leqslant n \leqslant N/2$. Как легко заметить, при $\nu = N$ любой атом делает $N(\approx \infty)$ ε-флуктуаций, а последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu}$ не имеет достижимого предела ни при каком x.

Пример 3, показывающий, что в условиях теоремы 1 мера точек $x \in \Omega$, для которых последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu}$ не является последовательностью ограниченной флуктуации и не имеет достижимого предела, может быть и положительна. Теорема 1 утверждает лишь, что для любого $\varepsilon \gg 0$ совокупность таких точек можно покрыть множеством меры меньше ε.

Для данного четного $N \approx \infty$ рассмотрим пространство с мерой, состоящее из N^3 атомов меры $1/N^3$ каждый, и автоморфизм T периода N^3, переводящий атом a_i в a_{i+1}, $1 \leqslant i \leqslant N^3-1$, a_{N^3} — в a_1; и пусть задано ограниченное $\delta \gg 0$. Положим $f(a_{2n-1}) = N\delta$, $f(a_{2n}) = -N\delta$, $1 \leqslant n \leqslant N/2$; $f(a_k) = 0$ при $N < k \leqslant N^3$. Отметим, что $f \in \widehat{L}_1(\Omega)$. Как легко заметить, атом a_1 (меры $1/N^3$, что меньше ε для любого $\varepsilon \gg 0$) делает не менее $N(\approx \infty)$ δ-флуктуаций при $\nu = N^3$, а последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu}$ не имеет достижимого предела при $x \in a_1$.

Замечание 1. В элементарном аналоге усиленного закона больших чисел, полученного Э. Нельсоном в [1], в случае распределения класса $\widehat{L}_1(\Omega)$ последовательности средних были пр. в. (около)сходящимися. Это говорит о том, что тип сходимости в различных математических теоремах трудно предсказать заранее и его приходится в каждом отдельном случае устанавливать отдельно. Причины этого прояснятся при знакомстве с результатами главы 2.

Замечание 2. Как будет показано в § 5, из теоремы 1 с помощью теории периодических аппроксимаций Рохлина — Халмоша применением нестандартного анализа удается вывести обычную эргодическую теорему Биркгофа — Хинчина для автоморфизма пространства Лебега. Обратный вывод не получается; причины этого обсуждаются в § 5.

2.3. Теорема 2. *Пусть* (Ω_0, λ_0) — *пространство Лебега,* T_0 — *его автоморфизм,* $f_0 \in \widehat{L}_1(\Omega_0)$. *Тогда:*

(А) *Последовательность* $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ *является последовательностью ограниченной флуктуации для пр. в.* $x \in \Omega_0$ *(и для тех же x эта последовательность имеет достижимый предел; сходимость рассматриваемой последовательности либо белая, либо цветная для пр. в. x).*

(Б) *Для любого* $\varepsilon \gg 0$ *найдутся измеримое* $A_\varepsilon \subseteq \Omega_0$, $\lambda(A_\varepsilon) \geqslant 1-\varepsilon$, *и* $f^*_\varepsilon \in \widehat{L}_1(\Omega_0)$, *а также* $\nu_\varepsilon \approx \infty$ *такие, что для любого* $x \in A_\varepsilon$ *последовательность* $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu_\varepsilon}$ *(около)сходится к* $f^*_\varepsilon(x)$. *При этом*

$$\int_{\Omega_0} f^*_\varepsilon(x)\, d\lambda_0 = \int_{\Omega_0} f_0(x)\, d\lambda_0.$$

Отметим, что все примеры, рассмотренные в предыдущем пункте при обсуждении формулировки теоремы 1, остаются в силе и при обсуждении теоремы 2, поскольку всякое элементарное пространство с мерой, очевидно, является пространством Лебега.

Так, пример 1 показывает, что цветная (не белая) сходимость средних в теореме 2 действительно может иметь место, причем численное значение достижимого предела (равное 0 или 1) может не совпадать с соответствующим значением обычного предела (равного 1/2) ни в одной точке фазового пространства, для которой оба эти предела существуют.

Конечно, рассмотренные выше примеры являются тривиальными, тривиален и факт существования там достижимого предела. В общем же случае (как известно, всякое полное сепарабельное метрическое пространство с нормированной мерой на борелевской σ-алгебре является пространством Лебега) возникновение второго, т. е. достижимого, предела представляется неожиданным и, как это показывают доказательства сформулированных теорем, нетривиальным.

Отметим также, что, как следует из основной теоремы главы 2, заключение теоремы 2 справедливо и для нелебеговых пространств с мерой.

Замечание 3. В оригинальной работе Биркгофа [4] рассматривались в качестве f_0 характеристические функции подмножеств фазового пространства, т. е. было выполнено условие $f_0 \in \widehat{L}_1(\Omega_0)$ и сходимость была, как минимум, цветная.

Замечание 4. Если (Ω_0, λ_0), f_0 и T_0 — стандартны, то сходимость последовательности $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ — белая для пр. в. $x \in \Omega_0$ (доказательство см. в § 5). В этом случае при эргодичности меры λ_0 относительно T_0 будет $f_\nu^*(x) \approx f^{**}(x) = \mathrm{const} \left(= \int\limits_{\Omega_0} f_0 d\lambda_0\right)$ при любом $\nu \approx \infty$ для пр. в. $x \in \Omega_0$ $\left(\text{здесь} f^{**}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} s_n(x)\right)$. В общем случае цветной сходимости это было не так (см. пример 1).

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1А

Доказательство теоремы разбито на 9 пунктов; основная его тяжесть приходится на п. 6—8. Следует отметить, что оно мало общего имеет с известными автору доказательствами обычной теоремы Биркгофа — Хинчина.

3.1. Доказательство теоремы ведется от противного: пусть последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu}$ не пр. в. является последовательностью ограниченной флуктуации. Тогда (см. п. 1.3) можно указать такое множество $F_1 \subseteq \Omega$, $\lambda(F_1) \gg 0$, и числа $\varepsilon \gg 0$, $k \approx \infty$, что для любой точки $x \in F_1$ рассматриваемая последовательность допускает k ε-флуктуаций.

Для каждого атома a пространства с мерой (Ω, λ) рассмотрим его (полную) орбиту $A(a) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} T^i(a)$, т. е. конечную совокупность атомов, которую a пробегает при итерациях (числом, возможно, больше ν) автоморфизма T. Все Ω распадается на конечное объединение таких (попарно не пересекающихся) орбит. Тогда (см. п. 1.3) для пр. в. по мере λ орбит A сужение f на A принадлежит классу $\widehat{L}_1(A)$. Поэтому найдется такая орбита A_0, что $f \in \widehat{L}_1(A_0)$ и $\lambda(F_1 \cap A_0)/\lambda(A_0) \gg 0$.

Итак, можно предполагать, что все Ω является (полной) орбитой любого своего атома, и найдутся такие $\varepsilon \gg 0$, $k \approx \infty$, что для любой точки $x \in F_1 (\subseteq \Omega)$, $\lambda(F_1) \gg 0$, $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu}$ допускает k ε-флуктуаций.

Всюду в дальнейшем через N обозначается число атомов этого пространства Ω. Можно считать, что $N \approx \infty$ — в противном случае утверждение теоремы очевидно. Предполагаем также, что все эти атомы расставлены по окружности, и автоморфизм T переводит каждый атом в соседний против часовой стрелки. Для атома $x \in \Omega$ через $[n_1, n_2](x)$ обозначим множество $\bigcup\limits_{i=n_1}^{n_2} T^i(x)$ (здесь $0 \leqslant n_1 < n_2$).

3.2. Пусть $m = 4\|f\|_1/\lambda(F_1) \ll \infty$; покажем, что множество F_1^m точек $x \in F_1$, для которых $\max\limits_{0 \leqslant n \leqslant \nu} \frac{1}{n+1} s_n(x; |f|, T) \geqslant m$ имеет меру не более $\lambda(F_1)/2$.

Пусть для данного $x \in F_1^m$ функция $\varphi(n) = \frac{1}{n+1} s_n(x; |f|, T), 0 \leqslant n \leqslant \nu$, достигает своего максимума при $n = c(x)$ (если точек максимума несколько, то зафиксируем в качестве $c(x)$ любую из них). Заметим, что для $x \in F_1^m$ всегда $c(x) < N$, поскольку при $n = kN + r$, $0 \leqslant r < N$, $k \geqslant 1$, будет $\frac{1}{n+1} s_n(x; |f|, T) \leqslant \frac{1}{kN} k\|f\|_1 N + \frac{1}{N} s_r(x; |f|, T) \leqslant 2\|f\|_1 < m$, т. е. $\varphi(n) < m$ и потому такое n не подходит в качестве $c(x)$.

Покроем множество F_1^m «интервалами» вида $[0, c(x)](x)$ следующим образом. Берем произвольную точку $x_1 \in F_1^m$ (если $F_1^m = \varnothing$, то доказывать нечего); первый интервал покрытия будет $[0, c(x_1)](x_1)$. Далее двигаемся по Ω против часовой стрелки, пока не встретим ближайшую к x_1 еще не покрытую точку из F_1^m, пусть это точка x_2; второй интервал покрытия будет $[0, c(x_2)](x_2)$. Далее выбираем $x_3 \in F_1^m$ и т. д., пока не покроем все множество F_1^m. Заметим, что для любого $x \in F_1^m$ будет $\lambda([0, c(x)](x)) \leqslant \|f\|_1/m = \lambda(F_1)/4$, так что последний построенный интервал может пересечься с первым, $[0, c(x_1)](x_1)$, по мере не более $\lambda(F_1)/4$. Откинув этот последний интервал, получаем объединение U непересекающихся интервалов I указанного вида, суммарной меры не менее $\lambda(F_1^m) - \lambda(F_1)/4$ (если $\lambda(F_1^m) \leqslant \lambda(F_1)/4$, то доказывать было нечего), и на каждом из них $\int\limits_I |f|\, d\lambda/\lambda(I) > m$, т. е.

$$\|f\|_1 \geqslant \int\limits_u |f|\, d\lambda > m\lambda(u) = \frac{4\|f\|_1}{\lambda(F_1)} \lambda(u) \geqslant \frac{4\|f\|_1}{\lambda(F_1)} \left(\lambda(F_1^m) - \frac{1}{4}\lambda(F_1)\right)$$

и

$$\lambda(F_1) \geqslant 4\lambda(F_1^m) - \lambda(F_1),$$

что и требовалось.

Итак, показано существование множества $F_2 \subseteq F_1$, $\lambda(F_2) \gg 0$, такого, что для некоторого $m \ll \infty$ для любой точки $x \in F_2$ будет $\max\limits_{0 \leqslant n \leqslant \nu} \frac{1}{n+1} s_n(x; |f|, T) \leqslant m$.

3.3. Пусть $\varepsilon \gg 0$ и $k \approx \infty$ — те же, что в определении множества F_1; $m \ll \infty$ — из определения F_2. Выберем $\gamma_0 \gg 0$ так, что $\gamma_0 < \varepsilon/2$ и $r = m/\gamma_0$ — целое; понятно, что $r \ll \infty$. Разобьем отрезок $[-m, m]$ на $2r$ равных отрезков (длины γ_0) и выберем целое $l_0 \approx \infty$ так, чтобы $4rl_0 < k$.

Введем определение скачка последовательности на интервале. Будем говорить, что последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu}$ делает *l скачков на интервале* $[\alpha, \beta]$, если можно указать такие целые числа $a_i(x)$, $b_i(x)$, $i = 1, \ldots, l$, что $0 \leqslant a_1(x) < b_1(x) < a_2(x) < \ldots < a_l(x) < b_l(x) \leqslant \nu$, и выполняются следующие неравенства:

$$\frac{1}{a_1(x)+1} s_{a_1(x)} \leqslant \alpha;$$

$$\frac{1}{b_1(x)+1} s_{b_1(x)}(x) \geqslant \beta \text{ и } \frac{1}{j} s_j(x) < \beta \text{ при } a_1(x) < j < b_1(x);$$

$$\frac{1}{a_2(x)+1} s_{a_2(x)}(x) \leqslant \alpha \text{ и } \frac{1}{j} s_j(x) > \alpha \text{ при } b_1(x) < j < a_2(x);$$

и т. д.

Замечание. $\int\limits_{[0, a_i(x)](x)} f\, d\lambda \leqslant \alpha\lambda([0, a_i(x)](x))$; $\int\limits_{[0, b_i(x)](x)} f\, d\lambda \geqslant \beta\lambda([0, b_i(x)](x))$ для всех $i = 1, \ldots, l$; здесь и далее под интегралом от f по интервалу $[0, n](x)$ (при $n \geqslant N$) понимается $\sum_{i=0}^{n} f(T^i x)\lambda(T^i x)$, т. е. $\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{n} f(T^i x)$.

По построению, для каждой точки $x \in F_2$ последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu}$ принимает значения в интервале $[-m, m]$ и допускает $(4rl_0+1)$ $2\gamma_0$-флуктуаций. Пусть $E_j = \{x \in F_2 | x$ делает l_0 скачков на интервале $[-m+j\gamma_0, -m+(j+1)\gamma_0]\}$, $j=0, \ldots, 2r-1$. Ясно, что $F_2 = \bigcup_{j=0}^{2r-1} E_j$, поэтому среди множеств E_j найдется хотя бы одно неинфинитезимальной меры; обозначим его F_3. Пусть соответствующие $l_0 \approx \infty$ скачков происходят на интервале $[\alpha^*, \beta^*]$; положим $\gamma^* = \beta^* - \alpha^* (=\gamma_0 \gg 0)$.

3.4. Покажем теперь существование таких $\nu' \leqslant \nu$, $\nu'/N \approx 0$ и $l' \approx \infty$, $l' \leqslant l_0$, что для любой точки $x \in F_3$ последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu'}$ делает l' скачков на интервале $[\alpha^*, \beta^*]$.

Сначала заметим, что для любой точки $x \in F_3$ все ее скачки на $[\alpha^*, \beta^*]$ идут при $n \leqslant kN$ для некоторого $k \ll \infty$. Действительно, $\frac{s_{N-1}(x)}{N} = \int_\Omega f\,d\lambda \leqslant \|f\|_1 \ll \infty$, и при $n = kN + r$, $k \geqslant 1$, $0 \leqslant r < N$, будет

$$\left|\frac{s_n(x)}{n+1} - \int_\Omega f\,d\lambda\right| = \left|\frac{ks_{N-1}(x) + s_r(x)}{kN+r+1} - \int_\Omega f\,d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_\Omega f\,d\lambda\left(\frac{kN}{kN+r+1} - 1\right)\right| + \left|\frac{s_r(x)}{kN+r+1}\right| \leqslant \frac{r+1}{kN}\|f\|_1 + \frac{s_{N-1}(x;\,|f|,\,T)}{kN} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{k}\|f\|_1 < \frac{\gamma^*}{2} \text{ при } k > \frac{4\|f\|_1}{\gamma^*} (\ll \infty).$$

Для любого такого $k_0 \ll \infty$ для любой точки $x \in F_3$ нет ни одного скачка последовательности $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=k_0 N}^{\nu}$ на интервале $[\alpha^*, \beta^*]$.

Покажем далее, что для любой точки $x \in F_3$ последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=N}^{\nu}$ делает не более $(k_0-1)\|f-\alpha^*\|_1/\gamma^* \ll \infty$ скачков на интервале $[\alpha^*, \beta^*]$. Действительно, пусть a_j — наименьшее из тех чисел $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, l_0$, которые превосходят $N-1$. Рассмотрим интеграл от функции $f - \alpha^*$ по интервалу $(a_j(x), b_j(x)](x)$; он равен разности интегралов от этой функции по интервалам $[0, b_j(x)](x)$ и $[0, a_j(x)](x)$, что не меньше $(\beta^* - \alpha^*)\lambda([0, b_j(x)](x)) \geqslant \gamma^*\lambda([0, N-1](x)) = \gamma^* \gg 0$. Такая же оценка справедлива и для интеграла от $f - \alpha^*$ по любому из интервалов $(a_{j+r}(x), b_{j+r}(x)](x)$, $j + r \leqslant l_0$. Поэтому число таких интервалов не более $(k_0-1)\|f-\alpha^*\|_1/\gamma^*$, так как на интервале $[N, k_0 N](x)$ может разместиться интеграл от функции $|f-\alpha^*|$ не более $(k_0-1)\|f-\alpha^*\|_1$.

Итак, для любой точки $x \in F_3$ последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{N-1}$ делает $l'' = l_0 - (k_0-1)\|f-\alpha^*\|_1/\gamma^* \approx \infty$ скачков на интервале $[\alpha^*, \beta^*]$.

Пусть $\nu'' < N$. Так же показывается, что интеграл от $f - \alpha^*$ по интервалу $(a_i(x), b_i(x)](x)$, $i \leqslant l''$, при $a_i(x) \geqslant \nu''$ не меньше $\gamma^*\nu''/N$ (здесь $x \in F_3$). Поэтому при n из промежутка $\nu'' \leqslant n \leqslant N-1$ происходит не более $\|f-\alpha^*\|_1/(\gamma^*\nu''/N)$ скачков на $[\alpha^*, \beta^*]$; соответственно при $0 \leqslant n \leqslant \nu''$ их не менее $l'' - \|f-\alpha^*\|_1/(\gamma^*\nu''/N)$; и это справедливо для любой точки $x \in F_3$.

Пусть

$$\nu' = \left[\frac{\|f-\alpha^*\|_1 N}{\gamma^* l''/2}\right] + 1;$$

тогда при n из промежутка $0 \leqslant n \leqslant \nu'$ будет происходить не менее $l' = [l'' - l''/2] \geqslant l'/2 - 1 \approx \infty$ рассматриваемых скачков; при этом $\nu'/N \approx 0$, что и требовалось.

3.5. Итак, в дальнейшем предполагаем справедливость соотношения $\nu/N \approx 0$.

Покажем, что для любого (сколь угодно малого) $\delta \gg 0$ можно указать множество $F(\delta) \subseteq F_3$, $\lambda(F/\delta)) \geqslant \lambda(F_3)/4 \gg 0$, и $l(\delta) \approx \infty$, $k(\delta) \ll \infty$ такие, что для любой точки $x \in F(\delta)$ найдутся такие $\alpha(x) \leqslant \alpha^*$, $\beta(x) \geqslant \beta^*$, что $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu}$ делает $l(\delta)$ скачков на интервале $[\alpha(x), \beta(x)]$, но на интервалах $[\alpha(x), \beta(x)+\delta]$ и $[\alpha(x)-\delta, \beta(x)]$ число скачков не превосходит $k(\delta)$.

Интуитивно это утверждение почти очевидно; длина следующего ниже доказательства обусловлена запретом на «illegal set formation» [2].

Измельчим построенное в п. 3.3 разбиение интервала $[-m, m]$ на $2r$ равных подынтервалов длины γ_0 разбиением каждого такого подынтервала на равные части длины $0 \ll \gamma' \leqslant \delta$. Пусть точки $\beta_i = \beta^* + i\gamma'$, $0 \leqslant i \leqslant q (\ll \infty)$,— концы этих интервалов, лежащие не ниже β^* (т. е. $\beta_q = m$; положим еще $\beta_{q+1} = m + \gamma'$), и $\alpha_j = \alpha^* - j\gamma'$, $0 \leqslant j \leqslant s (\ll \infty)$,— концы, лежащие не выше α^* ($\alpha_s = -m$, $\alpha_{s+1} = -m - \gamma'$).

Построение множества $F(\delta)$ проведем в два этапа.

Этап 1. Построим такие множества A_i, B_i, $i = 1, \ldots, q+1$, что:

1) $F_3 = B_0 \supseteq A_1 \cup B_1$; $B_1 \supseteq A_2 \cup B_2$; $\ldots$; $B_q \supseteq A_{q+1} \cup B_{q+1}$; положим $A_{q+1} = B_q$, $B_{q+1} = \varnothing$;

2) $\lambda(B_i \setminus (A_{i+1} \cup B_{i+1})) \leqslant \frac{1}{2(q+1)} \lambda(F_3)$, $i = 0, \ldots, q$;

3) $A_i = \{x \in B_{i-1} \mid x$ делает не более k_i скачков на $[\alpha^*, \beta_i]\}$; $B_i = \{x \in B_{i-1} \mid x$ делает не менее l_i скачков на $[\alpha^*, \beta_i]\}$ для некоторых $k_i \ll \infty$, $l_i \approx \infty$, $i = 1, \ldots, q$; отметим, что любая точка $x \in F_3 (= B_0)$ делает не менее $l_0 \approx \infty$ скачков на $[\alpha^*, \beta^*] (= [\alpha^*, \beta_0])$.

Заметим, что любая точка $x \in A_i$ делает не менее $l_i \approx \infty$ скачков на $[\alpha^*, \beta_{i-1}]$ и не более $k_i \ll \infty$ скачков на $[\alpha^*, \beta_{i-1} + \delta]$. Кроме того, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, и $\sum_{i=1}^{q+1} \lambda(A_i) \geqslant \lambda(F_3)/2$. Последнее неравенство следует из того, что при переходе от B_{i-1} к B_i исключается из рассмотрения (т. е. не попадает в $\bigcup_{j=1}^{q+1} A_j$) подмножество множества B_{i-1} меры не более $\frac{1}{2(q+1)} \lambda(F_3)$, а всего таких переходов от $B_0 = F_3$ к $B_{q+1} = \varnothing$ ровно $q+1$.

Переходим к построению описанных множеств.

Шаг 1. Рассмотрим для каждого целого $h \geqslant 0$ множество $H_1^h = \{x \in B_0 \mid x$ делает ровно h скачков на $[\alpha^*, \beta_1]\}$; для каждого целого $0 \leqslant h \ll \infty$ положим $A_1^h = \{x \in B_0 \mid x$ делает не более h скачков на $[\alpha^*, \beta_1]\}$; для $h \approx \infty$ определим $B_1^h = \{x \in B_0 \mid x$ делает не менее h скачков на $[\alpha^*, \beta_1]\}$. Покажем существование таких $k_1 \ll \infty$ и $l_1 \approx \infty$, что $\lambda\left(B_0 \setminus \left(A_1^{k_1} \cup B_1^{l_1}\right)\right) \leqslant \frac{1}{2(q+1)} \lambda(F_3)$; эти $A_1^{k_1}$ и $B_1^{l_1}$ и годятся в качестве A_1 и B_1.

Заметим, что $\sum_{h=0}^{\nu} \lambda\left(H_1^h\right) = \lambda(B_0)$. Пусть

$$h_1 = \max_{\nu_1 \leqslant \nu} \left\{\nu_1 \;\middle|\; \sum_{h=0}^{\nu_1} \lambda\left(H_1^h\right) \leqslant \lambda(B_0)/2\right\}.$$

Возможны два случая.

1) Если $h_1 \ll \infty$, то $\lambda\left(A_1^{h_1+1}\right) \geqslant \lambda(B_0)/2$. Далее, если $\lambda\left(B_0 \setminus A_1^{h_1+1}\right) > \frac{1}{2(q+1)} \lambda(B_0)$, то ищем

$$h_2 = \max_{\nu_2 \leqslant \nu} \left\{\nu_2 \,\middle|\, \sum_{h=h_1+2}^{\nu_2} \lambda\left(H_1^h\right) \leqslant \lambda\left(B_0 \setminus A_1^{h_1+1}\right)/2\right\};$$

если же $\lambda\left(B_0 \setminus A_1^{h_1+1}\right) \leqslant \frac{1}{2(q+1)} \lambda(B_0)$, то положим $A_1 = A_1^{h_1+1}$, $k_1 = h_1 + 1 \ll \infty$, $B_1 = \varnothing$, $l_1 \approx \infty$ — любое, и сразу переходим ко второму шагу построения.

2) Если $h_1 \approx \infty$, то $\lambda\left(B_1^{h_1+1}\right) \geqslant \lambda(B_0)/2$. Далее, если $\lambda\left(B_0 \setminus B_1^{h_1+1}\right) > \frac{1}{2(q+1)} \lambda(B_0)$, то ищем

$$h_2 = \max_{\nu_2 \leqslant h_1} \left\{\nu_2 \,\middle|\, \sum_{h=0}^{\nu_2} \lambda\left(H_1^h\right) \leqslant \lambda\left(B_0 \setminus B_1^{h_1+1}\right)/2\right\};$$

если же $\lambda\left(B_0 \setminus B_1^{h_1+1}\right) \leqslant \frac{1}{2(q+1)} \lambda(B_0)$, то положим $A_1 = \varnothing$, $k_1 \ll \infty$ — любое, $B_1 = B_1^{h_1+1}$, $l_1 = h_1 + 1 \approx \infty$, и сразу переходим ко второму шагу построения.

В зависимости от того, ограничено или нет возникшее выше число h_2, аналогично рассматриваем два случая, и в каждом из них либо находим h_3 (расширяя строящиеся множества вида A_1^h и B_1^h), либо находим A_1, k_1, B_1, l_1 и переходим ко второму шагу построения, и т. д. С рассмотрением каждого нового числа h_j мера точек из B_0, еще не лежащих в строящихся множествах вида A_1^h и B_1^h, убывает не менее чем вдвое, поэтому процесс закончится (переходом ко второму шагу построения) рассмотрением h_{j_0} с $\left(\frac{1}{2}\right)^{j_0} \leqslant \frac{1}{2(q+1)}$, т. е. при некотором $j_0 \leqslant [\log_2(q+1)] + 2$.

Шаг 2. Если оказалось так, что $B_1 = \varnothing$, то положим $A_i = B_i = \varnothing$, $k_i \ll \infty$, $l_i \approx \infty$ — любые, $i = 2, \ldots, q+1$; полученная система множеств и будет требуемой.

Если $B_1 \neq \varnothing$, то для каждого $h \geqslant 0$ рассматриваем множество $H_2 = \{x \in B_1 \mid x$ делает ровно h скачков на $[\alpha^*, \beta_2]\}$; для $0 \leqslant h \ll \infty$ положим $A_2^h = \bigcup\limits_{h'<h} H_1^{h'}$; для $h \approx \infty$ — $B_2^h = \bigcup\limits_{h' \geqslant h} H_1^{h'}$.

Далее так же, как на первом шаге, находим такие $k_2 \ll \infty$ и $l_2 \approx \infty$, что $\lambda\left(B_1 \setminus \left(A_2^{k_2} \cup B_2^{l_2}\right)\right) \leqslant \frac{1}{2(q+1)} \lambda(F_3)$, и положим $A_2 = A_2^{k_2}$, $B_2 = B_2^{l_2}$ и т. д., всего шагов не более q.

На последнем шаге получаем множества A_q и B_q, числа $k_q \ll \infty$ и $l_q \approx \infty$. Остается заметить, что на $[\alpha^*, \beta_{q+1}]$ любая точка из B_q не делает ни одного скачка, так как $\beta_{q+1} > m$; поэтому для $A_{q+1} = B_q$ можно взять любое $k_{q+1} \ll \infty$; для $B_{q+1} = \varnothing$ соответственно любое $l_{q+1} \approx \infty$.

Этап 2. Аналогично тому, как это делалось на первом этапе, по каждому построенному выше множеству A_i, $i = 1, \ldots, q+1$, находим такие его подмножества A_j^i, $j = 1, \ldots, s+1$, что любая точка $x \in A_j^i$ делает не менее $l_{j-1}^i \approx \infty$ скачков на $[\alpha_{j-1}, \beta_{i-1}]$ и не более $k_j^i \ll \infty$ скачков на $[\alpha_{j-1} - \delta, \beta_{i-1}]$; кроме того, $A_{j_1}^i \cap A_{j_2}^i = \varnothing$ при $j_1 \neq j_2$ и $\sum\limits_{j=1}^{s+1} \lambda\left(A_j^i\right) \geqslant \lambda(A_i)/2$. Положим $F(\delta) = \bigcup\limits_{i=1}^{q+1} \bigcup\limits_{j=1}^{s+1} A_j^i$. Тогда $\lambda(F(\delta)) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{q+1} \frac{1}{2} \lambda(A_i) \geqslant$

$\geqslant \frac{1}{4}\lambda(F_3)$. Определим далее,

$$l(\delta)=\min\left\{\min_{1\leqslant i\leqslant q+1} l_i;\ \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant q+1\\ 1\leqslant j\leqslant s+1}} l_j^i\right\}\approx\infty;$$

$$k(\delta)=\max\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant q+1} k_i;\ \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant q+1\\ 1\leqslant j\leqslant s+1}} k_j^i\right\}\ll\infty.$$

Тогда любая точка $x\in F(\delta)$ (лежащая, для определенности, в $A_{j_0}^{i_0}$) делает не менее $l(\delta)$ скачков на $[\alpha_{j_0-1}, \beta_{i_0-1}]$ и не более $k(\delta)$ скачков как на $[\alpha_{j_0-1}-\delta, \beta_{i_0-1}]$, так и на $[\alpha_{j_0-1}, \beta_{i_0-1}+\delta]$, остается положить $\alpha(x)=\alpha_{j_0-1}$, $\beta(x)=\beta_{i_0-1}$.

3.6. Пусть $\delta\gg 0$, $\frac{1}{3}>\theta\gg 0$ — произвольные (сколь угодно малые) действительные числа.

Для любой точки $x\in F(\delta)$ докажем существование таких чисел $l_\alpha^i(x;\delta,\theta)\approx\infty$, $l_\beta^i(x;\delta,\theta)\approx\infty$, $i=1,\ldots,p(\delta,\theta)$ (здесь $p\approx\infty$ и не зависит от выбора точки x), что $l_\alpha^p\leqslant l_\beta^p<l_\alpha^{p-1}\leqslant l_\beta^{p-1}<\ldots<l_\alpha^1\leqslant l_\beta^1\leqslant\leqslant l(\delta)$, и при всех n, удовлетворяющих неравенствам $\frac{\theta}{4}b_{l_\beta^i}(x)\leqslant n\leqslant b_{l_\beta^i}(x)$, будет $\frac{1}{n+1}s_n(x)\leqslant\beta(x)+\delta$ $(i=1,\ldots,p)$; при $\frac{1}{4}\theta a_{l_\alpha^j}(x)\leqslant n\leqslant a_{l_\alpha^j}(x)$ будет $\frac{1}{n+1}s_n(x)\geqslant\alpha(x)-\delta$ $(j=1,\ldots,p)$; здесь числа $a_{l_\alpha^j}(x)$ и $b_{l_\beta^i}(x)$ — те же, что в определении скачка последовательности $\left\{\frac{1}{n+1}s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu}$ на интервале для интервала $[\alpha(x),\beta(x)]$ (см. п. 3.3).

Как уже отмечалось (см. п. 3.4),

$$\int\limits_{[a_i(x),b_i(x)](x)}(f-\alpha(x))\,d\lambda\geqslant\gamma(x)\,\lambda([0,b_i(x)](x)),\quad j=1,\ldots,l(\delta).$$

Поэтому

$$\int\limits_{(a_{l(\delta)}(x),b_{l(\delta)}(x)](x)}|f-\alpha(x)|\,d\lambda\geqslant\gamma(x)\,\lambda([0,b_{l(\delta)}(x)](x));$$

$$\int\limits_{(a_{l(\delta)-1}(x),b_{l(\delta)}(x)](x)}|f-\alpha x|\,d\lambda\geqslant\gamma(x)\{\lambda([0,b_{l(\delta)}(x)](x)+\lambda([0,b_{l(\delta)-1}(x)](x)\}>$$

$$>2\gamma(x)\,\lambda([0,b_{l(\delta)-1}(x)](x));$$

и т. д., т. е. при $r=0,1,\ldots,l(\delta)-1$ справедливы неравенства

$$\int\limits_{(a_{l(\delta)-r}(x),b_{l(\delta)}(x)](x)}|f-\alpha(x)|\,d\lambda\geqslant(r+1)\,\gamma(x)\,\lambda([0,b_{l(\delta)-r}(x)](x)).$$

Заметим, что существует такое $M_\alpha\ll\infty$, что для любого $n\leqslant\nu$

$$\int\limits_{[0,n](x)}|f-\alpha(x)|\,d\lambda\leqslant M_\alpha\lambda([0,n](x))$$

для всех точек $x\in F(\delta)$: достаточно посмотреть на определение множества F_2 (см. п. 3.2); по построению, справедливо включение $F(\delta)\subseteq F_2$. Таким образом,

$$\int\limits_{[0,b_{l(\delta)}(x)](x)}|f-\alpha(x)|\,d\lambda\leqslant M_\alpha\lambda([0,b_{l(\delta)}(x)](x)).$$

Поэтому при всех r из промежутка $0\leqslant r\leqslant l(\delta)-1$ будет

$$\frac{\lambda([0,b_{l(\delta)-r}(x)](x))}{\lambda([0,b_{l(\delta)}(x)](x))}\leqslant\frac{M_\alpha}{(r+1)\,\gamma(x)}\leqslant\frac{M_\alpha}{(r+1)\,\gamma^*},$$

что не превосходит $\theta/4$ при $r \geqslant r_1^\alpha = \left[\frac{4M_\alpha}{\theta\gamma^*}\right]$ ($\ll \infty$); итак, $b_{l(\delta)-r_1^\alpha}(x) \leqslant \frac{\theta}{4} b_{l(\delta)}(x)$ для любой точки $x \in F(\delta)$.

Аналогично находим $r_2^\alpha = r_1^\alpha + \left[\frac{4M_\alpha}{\theta\gamma^*}\right] = 2\left[\frac{4M_\alpha}{\theta\gamma^*}\right]$ такое, что $b_{l(\delta)-r_2^\alpha}(x) \leqslant \frac{\theta}{4} b_{l(\delta)-r_1^\alpha}(x)$, и т. д. до $r_{k(\delta)+2} = (k(\delta)+2)\left[\frac{4M_\alpha}{\theta\gamma^*}\right]$ (здесь $k(\delta) \ll \infty$ взято из определения множества $F(\delta)$, п. 3.5).

Так как любая точка $x \in F(\delta)$ делает не более $k(\delta)$ скачков на интервале $[\alpha(x), \beta(x)+\delta]$, то найдется такое $q(x)$, $0 \leqslant q(x) \leqslant k(\delta)+1$, что $\frac{1}{n+1} s_n(x) \leqslant \beta(x) + \delta$ при всех n из промежутка $b_{l(\delta)-r^\alpha_{q(x)+1}}(x) \leqslant n \leqslant b_{l(\delta)-r^\alpha_{q(x)}}(x)$ (здесь $r_0^\alpha = 0$). Положим $l_\beta^1 = l(\delta) - r^\alpha_{q(x)} \approx \infty$; отметим неравенство $r^\alpha_{q(x)} \leqslant (k(\delta)+2)\left[\frac{4M_\alpha}{\theta\gamma^*}\right]$ и то, что последнее число не зависит от выбора точки $x \in F(\delta)$.

Совершенно аналогично получаем неравенство

$$\int\limits_{(b_{i-1}(x),a_i(x)](x)} |\beta(x) - f|\, d\lambda \geqslant \gamma(x)\, \lambda([0, a_i(x)](x))$$

и для $r = 1, \ldots, l_\beta^1(x) - 1$справедливость неравенств

$$\int\limits_{\left(b_{l_\beta^1(x)-r}(x),\, a_{l_\beta^1(x)}(x)\right](x)} |\beta(x) - f|\, d\lambda \geqslant r\gamma(x)\, \lambda\left(\left[0, a_{l_\beta^1(x)-r+1}(x)\right](x)\right).$$

С другой стороны, при всех $n \leqslant \nu$ будет

$$\int\limits_{[0,n](x)} |\beta(x) - f|\, d\lambda \leqslant M_\beta \lambda([0, n](x));$$

снова находим соответствующие числа $r_j^\beta = j\left[\frac{4M_\beta}{\theta\gamma^*}\right]$, $j = 1, \ldots, k(\delta)+2$, такие, что $a_{l_\beta^1(x)-r^\beta_{j+1}}(x) \leqslant \frac{\theta}{4} a_{l_\beta^1(x)-r_j^\beta}(x)$, и находим такое $q(x)$, что $\frac{1}{n+1} s_n(x) \geqslant \alpha(x) - \delta$ при $a_{l_\beta^1(x)-r^\beta_{q(x)+1}}(x) \leqslant n \leqslant a_{l_\beta^1(x)-r^\beta_{q(x)}}(x)$; положим $l_\alpha^1(x) = l_\beta^1(x) - r^\beta_{q(x)}$; опять $r_q^\beta \leqslant (k(\delta)+2)\left[\frac{4M_\beta}{\theta\gamma^*}\right]$.

Далее так же находим $l_\beta^2(x)$, $l_\alpha^2(x)$ и т. д. до $l_\beta^p(x)$ и $l_\alpha^p(x)$. В качестве p возьмем число

$$\left[\frac{l(\delta)/2}{(k(\delta)+2)\left(\left[\frac{4M_\beta}{\theta\gamma^*}\right] + \left[\frac{4M_\alpha}{\theta\gamma^*}\right]\right) + 1}\right] \approx \infty$$

(не зависящее от выбора точки $x \in F(\delta)$); тогда $l_\alpha^p(x) \geqslant l(\delta)/2 \approx \infty$, так как за каждую пару шагов построения имевшееся $l(x)$ укорачивалось не более чем на

$$(k(\delta)+2)\left(\left[\frac{4M_\beta}{\theta\gamma^*}\right] + \left[\frac{4M_\alpha}{\theta\gamma^*}\right]\right) + 1.$$

Докажем следующее важное свойство точек $x \in F(\delta)$. Если n лежит в промежутке $\frac{\theta}{2} a_{l_\alpha^i(x)}(x) \leqslant n \leqslant \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) a_{l_\alpha^i(x)}(x)$ при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant p(\delta, \theta)$, то

$$\frac{1}{a_{l_\alpha^i(x)}(x) - n + 1}\, s_{a_{l_\alpha^i(x)}(x)-n}\left(T_x^n\right) \leqslant \alpha^* + \frac{2\delta}{\theta};$$

если $\frac{\theta}{2} b_{l^j_\beta(x)}(x) \leqslant n \leqslant \left(1-\frac{\theta}{2}\right) b_{l^j_\beta(x)}(x)$ при некотором j, $1 \leqslant j \leqslant p(\delta, \theta)$, то

$$\frac{1}{b_{l^j_\beta(x)}(x)-n+1} s_{b_{l^j_\beta(x)}(x)-n}\left(T^n x\right) \geqslant \beta^* - \frac{2\delta}{\theta}.$$

Действительно, при $\frac{\theta}{2} a_{l^i_\alpha(x)}(x) \leqslant n \leqslant a_{l^i_\alpha(x)}(x)$ будет $\frac{1}{n} s_{n-1}(x) \geqslant \alpha(x) - \delta$. Из неравенства

$$\frac{1}{a_{l^i_\alpha(x)}(x)+1} s_{a_{l^i_\alpha(x)}(x)}(x) \leqslant \alpha(x)$$

с учетом этого соотношения получим

$$\frac{1}{a_{l^i_\alpha(x)}(x)+1}\left((\alpha(x)-\delta) n + s_{a_{l^i_\alpha(x)}(x)-n}\left(T^n x\right)\right) \leqslant \alpha(x),$$

и при выполнении условия $n \leqslant \left(1-\frac{\theta}{2}\right) a_{l^i_\alpha(x)}(x)$ получаем

$$\frac{1}{a_{l^i_\alpha(x)}(x)-n+1} s_{a_{l^i_\alpha(x)}(x)-n}\left(T^n x\right) \leqslant \frac{\alpha(x)\left(a_{l^i_\alpha(x)}(x)-n+1\right)+\delta n}{a_{l^i_\alpha(x)}(x)-n+1} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(x) + \frac{\delta n}{\dfrac{n}{1-\frac{\theta}{2}} - n + 1} \leqslant \alpha(x) + \frac{2\delta}{\theta} \leqslant \alpha^* + \frac{2\delta}{\theta}.$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

3.7. В обозначениях предыдущего пункта положим

$$P_{2j-1} = \bigcup_{x \in F(\delta)} \left[0, a_{l^j_\alpha(x)}(x)\right](x), \quad P_{2j} = \bigcup_{x \in F(\delta)} \left[0, b_{l^j_\beta(x)}(x)\right](x),$$
$$j = 1, \ldots, p(\delta, \theta).$$

По построению, $P_1 \supseteq P_2 \supseteq P_3 \supseteq \ldots \supseteq P_{2p-1} \supseteq P_{2p} \supseteq F(\delta)$; при этом $\lambda(P_1) \leqslant \lambda(\Omega) = 1$, $\lambda(F(\delta)) \gg 0$, т. е. найдется такой индекс t, что $\lambda(P_{2t-1} \triangle P_{2t}) < \frac{1}{p-1} (\approx 0)$.

Покажем, что из покрытия Π множества P_{2t-1} интервалами, его составляющими (т. е. $\left[0, a_{l^t_\alpha(x)}(x)\right](x)$, $x \in F(\delta)$), можно выбрать такое подпокрытие Π_α, что мера точек множества P_{2t-1}, покрываемых более чем двумя интервалами из Π_α, инфинитезимальна.

Действительно, пусть $x_0 \in P_{2t-1}$. Рассмотрим множество всех интервалов из Π, покрывающих x_0, и выберем из него интервал I_1 с самым правым (т. е. самым дальним против часовой стрелки) концом; если таких интервалов несколько, то берем любой из них. Рассмотрим первую, против часовой стрелки, точку из P_{2t-1}, лежащую вне I_1, и из множества всех интервалов из Π, покрывающих ее, выберем интервал с самым правым концом (или любой из таких, если их несколько); обозначим его I_2. Так же выбираем интервал I_3 и т. д., пока не покроем исходную точку x_0; пусть I_q — последний интервал построенного покрытия. По построению, $I_i \cap I_{i+2} = \varnothing$ при всех $i \leqslant q-1$, так что любая точка множества P_{2t-1}, не лежащая в I_q, покрыта не более чем двумя интервалами построенного подпокрытия; все точки множества P_{2t-1} покрыты, и мера I_q инфинитезимальна, поскольку $\nu/N \approx 0$. Поэтому данное подпокрытие и является требуемым.

Аналогично из покрытия множества P_{2t} интервалами $\left[0, b_{l^t_\beta(x)}(x)\right](x)$, $x \in F(\delta)$, выбираем такое подпокрытие Π_β, что мера точек множества

P_{2t}, покрываемых более чем двумя интервалами из Π_β, инфинитезимальна.

3.8. Для интервала I вида $[0, n](x)$, $x \in \Omega$, $n \approx \infty$, введем следующие обозначения: $\mathscr{L}_\theta(I) = [0, [n\theta]](x)$ — левая θ-зона I; $C_\theta(I) = [[n\theta]+1, [n-n\theta]-1](x)$ — θ-центр I и $R_\theta(I) = [[n-n\theta], n](x)$ — правая θ-зона I.

Пусть I_i, $i = 1, \ldots, q$, — интервалы покрытия Π_α (см. п. 3.7). Построим множество π_α интервалов J_j, $j = 1, \ldots, q'$ $(q' \leqslant q)$, таких, что:

(1) $\lambda\left(P_{2t-1} \triangle \bigcup\limits_{j=1}^{q'} J_j\right) \lambda(P_{2t-1}) < 3\theta$;

(2) $\int\limits_{J_j} f\, d\lambda/\lambda(J_j) \leqslant \alpha^* + \frac{2\delta}{\theta}$, $j = 1, \ldots, q'$;

(3) каждая точка из $\bigcup\limits_{j=1}^{q'} J_j$ покрывается не более чем двумя интервалами из π_α, причем мера точек, покрываемых двумя такими интервалами, не превосходит $\theta\lambda\left(\bigcup\limits_{j=1}^{q'} J_j\right)$.

Положим $J_1 = I_1$. Неравенство $\int\limits_{I_i} f\, d\lambda/\lambda(I_i) \leqslant \alpha^*$, $i = 1, \ldots, q$, следует из того, что по построению все интервалы I_i имеют вид $\left[0, at_{l_\alpha(x)}(x)\right](x)$ для некоторого $x \in F(\delta)$ (см. п. 3.7), а для интервалов такого вида требуемая оценка очевидна и отмечалась еще в п. 3.3.

Далее, если $I_1 \cap I_2 = \varnothing$, то положим $J_2 = I_2$. Если $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$, то возможны три случая.

1) Правый конец интервала I_1 лежит в $\mathscr{L}_\theta(I_2)$. В этом случае положим $J_2 = I_2$; отметим, что $\lambda(J_1 \cap J_2) \leqslant \theta\lambda(J_2)$.

2) Правый конец I_1 лежит в $C_\theta(I_2)$ (самый трудный случай). Положим $J_2 = I_2 \backslash I_1$. Неравенство $\int\limits_{J_2} f\, d\lambda/\lambda(J_2) \leqslant \alpha^* + \frac{2\delta}{\theta}$ для этого случая доказано в конце п. 3.7.

3) Правый конец I_1 лежит в $R_\theta(I_2)$. В этом случае интервал I_2 выкинем и положим $J_2 = I_3$. Исключенное из рассмотрения множество $I_2 \backslash I_1 \subseteq P_{2t-1}$ имеет меру не более $\theta\lambda(I_2)$; при этом $\lambda(I_1) \geqslant (1-\theta)\lambda(I_2)$, т. е. $\lambda(I_2 \diagdown I_1) \leqslant \frac{\theta}{1-\theta}\lambda(I_1) < 2\theta\lambda(J_1)$.

Аналогично находим интервал J_3 и т. д. Продолжаем процесс до тех пор, пока не дойдем до интервала I_{q-1}. Интервал I_q выкинем: как уже отмечалось, его мера инфинитезимальна, поэтому это можно сделать.

По построению, полученное множество интервалов π_α и будет требуемым.

Точно так же по множеству P_{2t} строим множество интервалов J таких, что $\int\limits_J f\, d\lambda/\lambda(J) \geqslant \beta^* - \frac{2\delta}{\theta}$ и выполнены условия, аналогичные свойствам (1) и (3) множества π_α.

3.9. Пусть $g \in \widehat{L}_1(\Omega)$. По свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Delta > 0$, что для любого множества $C \subseteq \Omega$, $\lambda(C) \leqslant \Delta$, будет $\left|\int\limits_C g\, d\lambda\right| \leqslant \varepsilon$.

Пусть $\Delta_g(\varepsilon)$ — максимальное Δ $(\leqslant 1)$, удовлетворяющее этому условию для данных g и ε. Заметим, что для $\varepsilon \gg 0$ будет $\Delta_g(\varepsilon) \gg 0$: если было бы $\Delta_g(\varepsilon) \approx 0$, то для любого $C \subseteq \Omega$ такого, что $\lambda(C) \leqslant 2\Delta_g(\varepsilon) \approx 0$, в силу условия $g \in \widehat{L}_1(\Omega)$ было бы $\left|\int\limits_C g\, d\lambda\right| \approx 0$ $(< \varepsilon)$ — противоречие.

Пусть $A = \bigcup_{J_j \in \pi_\alpha} J_j$; B — такое же объединение интервалов из π_β. Тогда $\lambda(A \triangle P_{2t-1}) < 3\theta\lambda(P_{2t-1})$, $\lambda(B \triangle P_{2t}) < 3\theta\lambda(P_{2t})$ (см. п. 3.8); $\lambda(P_{2t-1} \triangle P_{2t}) \approx 0$, $\lambda(P_{2t-1}) \approx \lambda(P_{2t}) \geqslant \lambda(F(\delta)) \geqslant \lambda(F_3)/4 \gg 0$ (см. п. 3.7); $\lambda(A) \leqslant \lambda(P_{2t-1})$, $\lambda(B) \leqslant \lambda(P_{2t})$.

Отметим также, что множества P_{2t-1}, P_{2t}, A, B зависят от выбора как δ, так и θ; множество $F(\delta)$ зависит только от выбора δ; множество F_3 не зависит ни от δ, ни от θ. Имеем

$$\int_A (f-\alpha^*)\,d\lambda = \sum_{J_j \in \pi_\alpha} \int_{J_j} (f-\alpha^*)\,d\lambda - \int_{G_\alpha} (f-\alpha^*)\,d\lambda,$$

где G_α — множество точек из A, покрываемых ровно двумя интервалами из π_α. По построению,

$$\int_{J_j} (f-\alpha^*)\,d\lambda = \int_{J_j} f\,d\lambda - \alpha^*\lambda(J_j) \leqslant \left(\alpha^* + \frac{2\delta}{\theta}\right)\lambda(J_j) - \alpha^*\lambda(J_j) = \frac{2\delta}{\theta}\lambda(J_j)$$

для всех $J_j \in \pi_\alpha$, и $\lambda(G_\alpha) \leqslant \theta\lambda(A)$. Поэтому

$$\int_A (f-\alpha^*)\,d\lambda \leqslant \frac{2\delta}{\theta} \sum_{J_j \in \pi_\alpha} \lambda(J_j) - \int_{G_\alpha} (f-\alpha^*)\,d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\delta}{\theta}(1+\theta)\lambda(A) - \int_{G_\alpha} (f-\alpha^*)\,d\lambda.$$

Аналогично

$$\int_B (f-\beta^*)\,d\lambda \geqslant -\frac{2\delta}{\theta}(1+\theta)\lambda(B) - \int_{G_\beta} (f-\beta^*)\,d\lambda$$

при $\lambda(G_\beta) \leqslant \theta\lambda(B)$.

Итак,

$$\int_{P_{2t-1}} (f-\alpha^*)\,d\lambda = \int_A (f-\alpha^*)\,d\lambda + \int_{P_{2t-1}\setminus A} (f-\alpha^*)\,d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\delta}{\theta}(1+\theta)\lambda(A) - \int_{G_\alpha} (f-\alpha^*)\,d\lambda + \int_{P_{2t-1}\setminus A} (f-\alpha^*)\,d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\delta}{\theta}(1+\theta)\lambda(P_{2t-1}) + \int_{G_\alpha \cup (P_{2t-1}\setminus A)} |f-\alpha^*|\,d\lambda;$$

здесь учтено, что $G_\alpha \subseteq A$; отметим неравенство

$$\lambda(G_\alpha \cup (P_{2t-1}\setminus A)) \leqslant \theta\lambda(A) + 3\theta\lambda(P_{2t-1}) \leqslant 4\theta\lambda(P_{2t-1}) \leqslant 4\theta.$$

Выберем $\theta \gg 0$ не большим

$$\theta_0 = \max\left\{\Delta_{|f-\alpha^*|}\left(\frac{\gamma^*}{6}\frac{\lambda(F_3)}{4}\right),\ \Delta_{|f-\beta^*|}\left(\frac{\gamma^*}{6}\frac{\lambda(F_3)}{4}\right)\right\}.$$

Тогда

$$\int_{G_\alpha \cup (P_{2t-1}\setminus A)} |f-\alpha^*|\,d\lambda \leqslant \frac{\gamma^*}{6}\frac{\lambda(F_3)}{4} \leqslant \frac{\gamma^*}{6}\lambda(F(\delta)) \leqslant \frac{\gamma^*}{6}\lambda(P_{2t-1});$$

аналогично при $\theta \leqslant \theta_0$ будет

$$\int_{G_\beta \cup (P_{2t}\setminus B)} |f-\beta^*|\,d\lambda \leqslant \frac{\gamma^*}{6}\lambda(P_{2t}).$$

При $\frac{2\delta}{\theta}(1+\theta) \leqslant \frac{\gamma^*}{6}$ $\left(\text{т. е. при } 0 \ll \theta \leqslant \theta_0,\ 0 \ll \delta \leqslant \frac{\gamma^*\theta}{12(1+\theta)}\right)$ получаем неравенство $\int\limits_{P_{2t-1}} (f-\alpha^*)\,d\lambda \leqslant \frac{\gamma^*}{3}\lambda(P_{2t-1})$; аналогично $\int\limits_{P_{2t}} (f-\beta^*)\,d\lambda \geqslant -\frac{\gamma^*}{3}\lambda(P_{2t})$. С одной стороны, $\int\limits_{P_{2t-1}} f d\lambda \leqslant \left(\alpha^* + \frac{\gamma^*}{3}\right)\lambda(P_{2t-1})$; с другой стороны, $\int\limits_{P_{2t}} f d\lambda \geqslant \left(\beta^* - \frac{\gamma^*}{3}\right)\lambda(P_{2t})$; при этом $\int\limits_{P_{2t-1}} f d\lambda \approx \int\limits_{P_{2t}} f d\lambda$, так как $f \in \widehat{L}_1(\Omega)$ и $\lambda(P_{2t-1} \triangle P_{2t}) \approx 0$; кроме того, $\lambda(P_{2t-1}) \approx \lambda(P_{2t}) \gg 0$. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы.

§ 4. ВЫВОД ТЕОРЕМЫ 1Б И ТЕОРЕМЫ 2

В этом параграфе приводится (несложный) вывод оставшихся недоказанными результатов основных теорем из теоремы 1А.

4.1. Докажем сначала теорему 1Б.

Для любого $\varepsilon \gg 0$ теорема 1А гарантирует существование измеримого множества $A'_\varepsilon \subseteq \Omega$ меры не менее $1-\varepsilon/2$ такого, что для любой точки $x \in A'_\varepsilon$ последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu}$ имеет ограниченную флуктуацию. Поэтому (см. п. 1.2) для каждой такой точки x можно указать неограниченное число $\mu(x) \leqslant \nu$ такое, что последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\mu(x)}$ (около) сходящаяся. Найдем такое $\nu_\varepsilon \approx \infty$, что для всех точек множества $A_\varepsilon \subseteq A'_\varepsilon$, $\lambda(A_\varepsilon) \geqslant 1-\varepsilon$, будет $\mu(x) \geqslant \nu_\varepsilon$. Тогда последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu_\varepsilon}$ (около) сходящаяся для любого $x \in A_\varepsilon$; для любого $x \in \Omega$ положим $f^*_\varepsilon(x) = \frac{1}{\nu_\varepsilon+1} s_{\nu_\varepsilon}(x)$; можно считать, что рассматриваемая последовательность для любого $x \in A_\varepsilon$ (около) сходится именно к $f^*_\varepsilon(x)$. Так как

$$\int\limits_\Omega |f^*_\varepsilon(x)|\,d\lambda = \int\limits_\Omega \left|\frac{1}{\nu_\varepsilon+1} s_{\nu_\varepsilon}(x)\right| d\lambda \leqslant \frac{1}{\nu_\varepsilon+1}\sum_{k=0}^{\nu_\varepsilon}\int\limits_\Omega |f(T^k x)|\,d\lambda = \int\limits_\Omega |f(x)|\,d\lambda,$$

то $\|f^*_\varepsilon\|_1 \leqslant \|f\|_1 \ll \infty$. Кроме того, для любого измеримого $E \subseteq \Omega$ будет

$$\int\limits_E f^*_\varepsilon(x)\,d\lambda = \frac{1}{\nu_\varepsilon+1}\sum_{k=0}^{\nu_\varepsilon}\int\limits_E f(T^k x)\,d\lambda.$$

Для любого E инфинитезимальной меры отсюда получаем равенство $\int\limits_E f^*_\varepsilon(x)\,d\lambda \approx 0$, что доказывает принадлежность f^*_ε к $\widehat{L}_1(\Omega)$ (поскольку $\|f^*_\varepsilon\|_1 \ll \infty$); при $E=\Omega$ получаем равенство $\int\limits_\Omega f^*_\varepsilon(x)\,d\lambda = \int\limits_\Omega f(x)\,d\lambda$, что и завершает доказательство теоремы 1Б.

4.2. Докажем теперь теорему 2.

Пусть T_0 — автоморфизм пространства Лебега (Ω_0, λ_0), $f_0 \in L_1(\Omega_0)$. Назовем *динамическим процессом* (по аналогии со «стохастическим процессом» в [1]), *порожденным тройкой* (Ω_0, T_0, f_0), последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f_0, T_0)\right\}_{n=0}^{\infty}$ (функций класса $L_1(\Omega_0)$).

Пусть (Ω, λ) — элементарное пространство с мерой, получающееся разбиением на атомы пространства (Ω_0, λ_0); T — элементарный автоморфизм пространства (Ω, λ); $f \in \widehat{L_1}(\Omega)$. Процесс $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T)\right\}_{n=0}^{\nu}$, $\nu \approx \infty$, назовем *близким* (ср. [1, р. 81]) *элементарным процессом* (*порождаемым тройкой* (Ω, T, f)), если:

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\nu}\left|\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T) - \frac{1}{n+1} s_n(x; f_0, T_0)\right| \approx 0$$

для всех $x \in \Omega_0$, исключая множество инфинитезимальной меры;

$$(2)\ \sum_{n=0}^{\nu}\left\|\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T) - \frac{1}{n+1} s_n(x; f_0, T_0)\right\|_1 \approx 0.$$

Как нетрудно заметить, первое условие вытекает из второго.

Покажем, что в случае $f_0 \in \widehat{L_1}(\Omega_0)$ близкий элементарный процесс всегда существует. Как показывает пример 2 (см. § 2), при невыполнении этого ограничения такого процесса может и не быть: там даже f_0 $(\in L_1(\Omega_0))$ не удается приблизить с инфинитезимальной точностью функцией из $\widehat{L_1}(\Omega)$.

Построение требуемого процесса начнем с построения для любых $\nu \approx \infty$, $\delta \approx 0$ аппроксимирующего T_0 элементарного автоморфизма $\widetilde{T}$, такого, что

$$\lambda_0(\{x \in \Omega_0 \mid \widetilde{T}_x^k = T_0^k x \text{ для всех } k,\ 0 \leqslant k \leqslant \nu\}) \geqslant 1 - \delta.$$

Обозначим через M_p, $p > 0$, множество точек, в которых автоморфизм T_0 имеет период p, и через M_0 множество точек, в которых он апериодичен; $\Omega_0 = \bigcup_{p=0}^{\infty} M_p$. Тогда по каждому непустому M_p, $p > 0$, можно указать такое так называемое фундаментальное множество A_p, что

$$M_p = \bigcup_{k=0}^{p-1} T_0^k A_p, \quad \lambda_0(A_p) = \frac{1}{p}\lambda(M_p),$$

и $\lambda_0(T^i A_n \cap T^j A_p) = 0$ при $0 \leqslant i, j \leqslant p-1$, $i \neq j$; для (непустого) M_0 можно указать такой действующий на нем периодический автоморфизм $\widetilde{T}_{p_0}$, что (см. [6, 7])

$$\lambda_0(\{x \in M_0 \mid \widetilde{T}_{p_0}^k x \neq T_0^k x \text{ для всех } k,\ 0 \leqslant k \leqslant \nu\}) \geqslant (1 - \delta/2)\lambda(M_0).$$

Пусть A_0 — фундаментальное множество для $\widetilde{T}_{p_0}$.

Пусть число P таково, что $\lambda_0\left(\bigcup_{p=P}^{\infty} M_p\right) \leqslant \delta/2$. Положим $\widetilde{T}x = x$ для $x \in \bigcup_{p=P}^{\infty} M_p$; для $x \in \bigcup_{p=1}^{P-1} M_p$ положим $\widetilde{T}x = T_0 x$; для $x \in M_0$ определим $\widetilde{T}x = T_{p_0}x$. При этом можно считать, что $\widetilde{T}$ действует на атомах $\bigcup_{p=P}^{\infty} M_p$; A_1; A_2, T_0A_2; A_3, T_0A_3, $T_0^2A_3$; ...; A_{P-1}, T_0A_{P-1}, ..., $T_0^{P-2}A_{P-1}$; A_0, T_0A_0, ..., $T_0^{p_0-1}A_0$, т. е. что автоморфизм $\widetilde{T}$ — элементарный. Соответствующее элементарное пространство с мерой обозначим через $\widetilde{\Omega}$.

Далее, берем любую элементарную (т. е. ступенчатую с конечным числом ступенек) функцию $\widetilde{f}$ на Ω_0 такую, что $\|\widetilde{f} - f_0\|_1 \approx 0$. Соотношения $\|\widetilde{f}\|_1 \ll \infty$ и $\int_E \widetilde{f}(x)d\lambda \approx 0$ для любого $E \subset \Omega_0$, $\lambda(E) \approx 0$ (т. е. принадлежность $\widetilde{f}$ классу $\widehat{L_1}(\Omega_0)$) сразу следуют из аналогичных условий, выполняющихся для функции $f_0 \in L_1(\Omega_0)$. Пусть $\{F_j\}_{j=1}^m$ — атомы разбиения Ω_0 ступеньками функции $\widetilde{f}$.

Измельчим разбиение на атомы пространства $\widetilde{\Omega}$ с учетом разбиения Ω_0 ступеньками функции $\widetilde{f}$ так, чтобы это новое разбиение было инвариантным относительно $\widetilde{T}$ и чтобы функция $\widetilde{f}$ была константой на каждом таком новом атоме. Для этого разбиваем атом $\bigcup\limits_{p=P}^{\infty} M_p$ на атомы $\left\{\bigcup\limits_{p=P}^{\infty} M_p \cap F_j\right\}_{j=1}^{m}$; атом A_1 — на $\{A_1 \cap F_j\}_{j=1}^{m}$; для каждого p из промежутка $0 \leqslant p \leqslant P-1$ разбиваем $\tilde{T}^k A_p$ для любого k, $0 \leqslant k \leqslant p-1$, на атомы $\{\tilde{T}^k(A_p \cap F_{j_1} \cap \tilde{T}^{-1}F_{j_2} \cap \ldots \cap \tilde{T}^{-p-1}F_{j_p})\}_{j_1,\ldots,j_p=1}^{m}$; аналогично разбиваем и оставшиеся атомы A_0, $\tilde{T}A_0, \ldots, T^{p_0-1}A_0$.

Как нетрудно видеть, элементарный автоморфизм T, совпадающий с $\tilde{T}$ поточечно на Ω_0 и рассматриваемый как действующий на построенном элементарном пространстве Ω (полученном описанным выше разбиением атомов пространства $\tilde{\Omega}$), само это пространство Ω и элементарная функция f на Ω, поточечно совпадающая с $\tilde{f}$ на Ω_0, и образуют тройку (Ω, T, f), порождающую требуемый близкий элементарный процесс.

Действительно, для каждого n, $0 \leqslant n \leqslant \nu$, будет

$$\left\|\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T) - \frac{1}{n+1} s_n(x; f_0, T_0)\right\|_1 = \frac{1}{n+1} \int\limits_{\Omega_0} \left|\sum_{k=0}^{n} \{f(T^k x) - f_0(T_0^k x)\}\right| d\lambda_0 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\Omega_0} |f(T^k x) - f_0(T_0^k x)|\, d\lambda_0.$$

Остается заметить справедливость оценки

$$\int\limits_{\Omega_0} |f(T^k x) - f_0(T_0^k x)|\, d\lambda_0 = \int\limits_{\{x \in \Omega_0 \mid T^k x = T_0^k x\}} |f(T^k x) - f_0(T_0^k x)|\, d\lambda_0 +$$

$$+ \int\limits_{\{x \in \Omega_0 \mid T^k x \neq T_0^k x\}} |f(T^k x) - f_0(T_0^k x)|\, d\lambda_0 \leqslant \|\tilde{f} - f_0\|_1 +$$

$$+ \int\limits_{\Omega' \mid \lambda(\Omega') \leqslant \delta \approx 0} (|\tilde{f}| + |f_0|)\, d\lambda_0 \approx 0$$

для любого k из промежутка $0 \leqslant k \leqslant n$. Доказательство существования близкого элементарного процесса закончено.

Теорема 2А теперь немедленно вытекает из теоремы 1А; теорема 2Б выводится из теоремы 2А аналогично тому, как теорема 1Б выводилась из теоремы 1А.

§ 5. ДВА ЗАМЕЧАНИЯ

В этом разделе работы приводятся доказательства двух замечаний из § 2, требующие более глубокого знакомства с нестандартным анализом, в объеме [2].

5.1. Доказательство замечания 2. Покажем, как из теоремы 1А выводится эргодическая теорема Биркгофа — Хинчина для автоморфизма T_0 пространства Лебега (Ω_0, λ_0).

Первый шаг доказательства — построение для стандартных Ω_0, T_0 и f_0 $(\in L_1(\Omega_0))$ элементарного процесса, близкого к динамическому процессу, порожденному тройкой (Ω_0, T_0, f_0). Делается это дословно так же, как в § 4 при выводе теоремы 2; нужно только проверить, что если f_0 стандартна, то $f_0 \in \widehat{L}_1(\Omega_0)$. Действительно, в этом случае

$$\left\{\int\limits_{\{x \in \Omega_0 \mid |f_0(x)| \leqslant n\}} |f_0(x)|\, d\lambda_0\right\}_{n=0}^{\infty}$$

— стандартная сходящаяся (к $\|f_0\|_1$) последовательность. Поэтому по критерию сходимости стандартной последовательности ее сходимость — белая, а это и означает, что $f_0 \in \widehat{L}_1(\Omega_0)$.

Таким образом, у каждого стандартного процесса, порожденного (Ω_0, T_0, f_0), есть близкий элементарный, порожденный тройкой (Ω, T, f); обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, даже не для всякой элементарной (т. е. ступенчатой с конечным числом ступенек) функции $f \in L_1(\Omega)$ удается найти инфинитезимально близкую (по норме) функцию $f_0 \in \widehat{L_1}(\Omega_0)$ (например, для $f \equiv \mathrm{const} \approx \infty$). Причина здесь в том, что (метрическое) пространство $L_1(\Omega_0)$ не компактно, и по нестандартному критерию компактности в нем имеются неоколостандартные точки; в качестве требуемой элементарной f годится любая инфинитезимально близкая (по норме) к такой неоколостандартной точке. По этой же причине (некомпактности группы автоморфизмов в требуемой метрике) не всегда удается инфинитезимально аппроксимировать элементарный автоморфизм стандартными. Это приводит к тому, что излагаемыми ниже (принадлежащими Э. Нельсону) методами не удается вывести из обычной теоремы Биркгофа — Хинчина теорему 1.

В дальнейшем используются в полном объеме результаты разделов «Regular probability measures» и «Equivalence of probabilistic properties» Аппендикса в [1], поэтому ссылки будут даваться непосредственно на соответствующие места этой монографии.

Вернемся к стандартному процессу (Ω_0, T_0, f_0) и близкому к нему элементарному $(\Omega, T, f; \nu)$. Рассмотрим их как два стохастических процесса, причем можно считать, что первый из них задан в канонической версии [1, p. 86].

Предложение. *Последовательность* $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f_0, T_0)\right\}_{n=0}^{\infty}$ *сходится п. в. тогда и только тогда, когда последовательность* $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T)\right\}_{n=0}^{\nu}$ *имеет пр. в. ограниченную флуктуацию.*

Доказательство сформулированного предложения проводим по следующей схеме: сначала из отрицания первого утверждения выводим отрицание второго, затем из справедливости первого выведем справедливость второго.

(1) Пусть неверно, что последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T_0)\right\}_{n=0}^{\nu}$ сходится почти всюду. Тогда указанная последовательность не сходится на множестве положительной меры; следовательно, найдутся такие множество E положительной меры и число $\gamma > 0$, что для любой точки $x \in E$ рассматриваемая последовательность допускает бесконечное число γ-флуктуаций. По принципу переноса можно считать $\lambda(E) \gg 0$ и $\gamma \gg 0$.

Положим

$$\Phi^1_{jk} = \left\{x \in \Omega_0 \,\middle|\, \left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{k} \text{ допускает не менее } j \ \gamma\text{-флуктуаций}\right\}$$

для $j, k \in \mathbf{N}$; пусть $\Phi^1 = \bigcap_j \bigcup_k \Phi_{jk}$.

Так как $\Phi^1 \supseteq E$, то $\lambda(\Phi_1) = \varepsilon \gg 0$. Отметим, что Φ^1_{jk} замкнуто в Ω_0 при любых j, k (напомним, что рассматриваемый стохастический процесс берется в канонической версии).

По теореме А6 [1, p. 87—88] и принципу переноса существует такая стандартная функция $\tilde{k}$: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, что $\lambda\left(\Phi^1_{\tilde{k}}\right) > \varepsilon$, где $\Phi^1_{\tilde{k}} = \bigcap_j \Phi^1_{j\tilde{k}(j)}$.

Для стандартных j стандартным будет и $\tilde{k}(j)$, т. е. $\tilde{k}(j) < \nu$ для (любого) $\nu \approx \infty$ при $j \ll \infty$. Поэтому для любого $x \in \Phi^1_{\tilde{k}}$ последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\nu}$ допускает неограниченное число γ-флуктуаций (так как их число больше любого $j \ll \infty$).

Так как (Ω_0, T_0, f_0) и $(\Omega, T, f; \nu)$ — близкие процессы, то можно указать множество $A_{\varepsilon/2}$, $\lambda(A_{\varepsilon/2}) \geqslant 1 - \varepsilon/2$, такое, что для любого $x \in A_{\varepsilon/2}$ справедливо соотношение

$$\sum_{n=0}^{\nu} \left| \frac{1}{n+1} s_n(x; f, T) - \frac{1}{n+1} s_n(x; f_0, T_0) \right| \approx 0.$$

Тогда для любого $x \in A_{\varepsilon/2} \cap \Phi^1_{\tilde{k}}$ последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T)\right\}_{n=0}^{\nu}$ допускает неограниченное число $(\gamma/2)$-флуктуаций; при этом $\gamma/2 \gg 0$ и $\lambda\left(A_{\varepsilon/2} \cap \Phi^1_{\tilde{k}}\right) \geqslant \varepsilon/2 \gg 0$, т. е. указанная последовательность не пр. в. является последовательностью ограниченной флуктуации, что и требовалось доказать.

(2) Пусть последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f_0, T_0)\right\}_{n=0}^{\infty}$ сходится п. в., т. е. для п. в. $x \in \Omega_0$ указанная последовательность допускает лишь конечное число γ-флуктуаций для любого $\gamma > 0$.

Положим $\Phi^2_{kj} = \{x \in \Omega_0 |$, при $n \geqslant k$ происходит не более $1/j$ части всех γ-флуктуаций последовательности $\left.\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f_0, T_0)\right\}_{n=0}^{\infty}\right\}$, $j, k \in \mathbf{N}$.

Пусть $\Phi^2 = \bigcap_j \bigcup_k \Phi^2_{jk}$, тогда $\lambda(\Phi^2) = 1$.

Пусть $\varepsilon \gg 0$ и $\gamma \gg 0$ стандартны; по теореме А6 [1] и принципу переноса существует стандартная функция $\tilde{k}$: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такая, что $\lambda\left(\Phi^2_{\tilde{k}}\right) \geqslant$ $\geqslant 1 - \varepsilon$, где $\Phi^2_{\tilde{k}} = \bigcap_j \Phi^2_{j\tilde{k}(j)}$.

Для $x \in \Phi^2_{\tilde{k}}$ при любом $j \ll \infty$ последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f_0, T_0)\right\}_{n=0}^{\infty}$ делает не более $1/j$ всех своих γ-флуктуаций при $n \geqslant \tilde{k}(j)$. Положим $j = 2$ $(\ll \infty)$; тогда для любого $x \in A_{\varepsilon/2} \cap \Phi^2_{\tilde{k}}$ указанная последовательность не менее половины своих γ-флуктуаций делает при $n \leqslant \tilde{k}(2)$ $(\ll \infty)$. Следовательно, общее их число для любого такого x не превосходит $2\tilde{k}(2) \ll \infty$. Отсюда сразу следует, что последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T\right\}_{n=0}^{\nu}$ делает не более $2\tilde{k}(2)$ 2γ-флуктуаций для любого $x \in A_{\varepsilon/2} \cap \Phi^2_{\tilde{k}}$. Так как $\lambda\left(A_{\varepsilon/2} \cap \Phi^2_{\tilde{k}}\right) \geqslant \varepsilon/2$ и (стандартные) значения $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$ выбирались произвольно, доказательство предложения закончено.

Доказательство замечания завершается применением теоремы 1А к процессу $(\Omega, T, f; \nu)$: только что доказанное предложение дает справедливость обычной теоремы Биркгофа — Хинчина для стандартного процесса (Ω_0, T_0, f_0); общий случай отсюда следует по принципу переноса.

5.2. Доказательство замечания 4. Пусть тройка $((\Omega, \lambda), f, T)$ — стандартна. Тогда сходимость последовательности $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T)\right\}_{n=0}^{\infty}$ — белая для пр. в. $x \in \Omega$.

Действительно, из обычной эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина сразу следует, что для любой пары (ε, δ) положительных действительных чисел существует (и единственно) число $N_{\varepsilon,\delta} = \min_{p \in N} \{p |$ существует $A(\varepsilon, \delta, p) \subseteq \Omega$, $\lambda(A(\varepsilon, \delta, p)) \geqslant 1 - \varepsilon$, такое, что $(n \geqslant p \,\&\, x \in$ $\in A(\varepsilon, \delta, p)) \Rightarrow$ (существует $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} s_k(x; f, T) = f^{**}(x) \,\&\, \left| \frac{1}{n+1} s_n(x; f, T) - \right.$ $\left.\left. - f^{**}(x) \right| < \delta \right) \Big\}$.

По принципу переноса (как нетрудно видеть, все параметры в возникающей внутренней формуле IST принимают стандартные значения) при стандартных значениях ε и δ стандартным будет и $N_{\varepsilon,\delta}$, т. е. $N_{\varepsilon,\delta} \ll \infty$.

Пусть $M(\delta, k) = \{x \in \Omega |$ существует $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} s_m(x; f, T) = f^{**}(x)$ и для некоторого $n \geqslant k$ будет $\left|\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T) - f^{**}(x)\right| > \delta\}$, и пусть (стандартное) $\varepsilon \gg 0$. Для каждого натурального m обозначим через k_m минимальное натуральное число со свойством $\lambda(M(1/m, k_m)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^m}$, и пусть $S = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} M(1/m, k/m)$. Тогда $\lambda(S) \leqslant \varepsilon$. По доказанному $k_m \ll \infty$ при $m \ll \infty$, так как $k_m \leqslant N_{\frac{\varepsilon}{2^m}, \frac{1}{m}}$. Поэтому для любого $x \in \Omega' \setminus S$ (здесь $\Omega' = \{x \in \Omega |$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} s_n(x; f, T) = f^{**}(x)\}$) при любом $n \approx \infty$ будет $\left|\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T) - f^{**}(x)\right| < \delta$ для любого $\delta \gg 0$, т. е. $\left|\frac{1}{n+1} \times \right.$ $\left.\times s_n(x; f, T) - f^{**}(x)\right| \approx 0$, что и означает белую сходимость последовательности $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T)\right\}_{n=0}^{\infty}$ (к $f^{**}(x)$).

В силу произвольности выбора (стандартного) $\varepsilon \gg 0$ замечание 4 доказано.

Отметим, что в случае эргодичности меры λ будет $f^*(x) \approx$ $\approx f^{**}(x) = \mathrm{const} = \int\limits_{\Omega} f\, d\lambda$. При цветной сходимости средних это было не так даже для периодического автоморфизма (см. пример 1 в § 2).

5.3. Из доказательства замечания 4 видно, что если математическая теорема утверждает сходимость некоторой последовательности п. в., то в случае стандартности значений всех входящих в ее формулировку параметров сходимость будет пр. в. белая.

ГЛАВА 2

ФЛУКТУАЦИОННАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

Вопрос, рассматриваемый в этой главе, возник у В. В. Иванова при обсуждении результатов предыдущей главы, опубликованных в препринте [8]. Как оказалось, обе теоремы первой главы являются интерпретацией на языке нестандартного анализа некоторой более сильной теоремы — флуктуационной эргодической теоремы (ФЭТ), являющейся уточнением обычной эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина. ФЭТ в условиях теоремы Биркгофа — Хинчина, кроме утверждения об обычной сходимости средних, несет дополнительную информацию о некоторых качественных характеристиках этой сходимости, т. е. формально ФЭТ является усилением этой теоремы (уже не имеющим отношения к нестандартному анализу). Стало понятно также, от каких внутренних свойств предельных теорем зависит рассматриваемый в первой главе цвет сходимости в этих теоремах.

Для удобства читателя, не знакомого с нестандартным анализом, эта глава написана так, что ее можно читать независимо от предыдущей.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ

1.1. Пусть (Ω, λ) — пространство с конечной (нормированной) мерой, T — его автоморфизм, $f \in L_1(\Omega)$. Через $s_n(x; f, T)$ будем обозначать $\sum\limits_{m=0}^{n} f(T^m x)$ $(x \in \Omega,\ n \geqslant 0)$. Если не вызывает сомнений, о каких f и T идет речь, то пишем просто $s_n(x)$.

Будем говорить, что числовая последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *допускает* k *ε-флуктуаций*, если для некоторых неотрицательных $n_1 < n_2 \leqslant n_3 < < n_4 \leqslant \ldots \leqslant n_{2k-1} < n_{2k}$ будет $|x_{n_1} - x_{n_2}| \geqslant \varepsilon, \ldots, |x_{n_{2k-1}} - x_{n_{2k}}| \geqslant \varepsilon$. Отметим, что это определение несколько отличается от аналогичного в первой главе (идущего от [1]). Заметим, что $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $k \in \mathbf{N}$, для которого она не допускает k ε-флуктуаций. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *последовательность измеримых функций на* (Ω, λ). *Определим (измеримое) множество* $F_{k,\varepsilon} = \{x \in \Omega|$ последовательность $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ допускает k ε-флуктуаций$\}$. *Тогда последовательность* $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *сходится для п. в.* $x \in \Omega$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda(F_{k,\varepsilon}) = 0$ *для любого* $\varepsilon > 0$.

Поэтому эргодическую теорему можно сформулировать следующим образом.

Эргодическая теорема Биркгофа — Хинчина. *Пусть* $F_{k,\varepsilon}(f, T) = \{x \in \Omega|$ последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T)\right\}_{n=0}^{\infty}$ допускает k ε-флуктуаций$\}$. *Тогда* $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda(F_{k,\varepsilon}(f, T)) = 0$ *для любого* $\varepsilon > 0$.

При такой формулировке возникает естественный вопрос: какова скорость сходимости к нулю рассматриваемой последовательности?

И еще два вопроса: можно ли дать оценку этой скорости, зависящую только от f (т. е. равномерную по T), только от T (т. е. равномерную по f)? Оказывается, ответ на первый вопрос положителен, на второй — отрицателен (последнее очевидно: уже для автоморфизма периода 2 нет равномерной по f оценки).

В настоящий момент (1990) в распоряжении автора имеется только грубая оценка рассматриваемой скорости сходимости. По-видимому, для характеристической функции χ_A измеримого подмножества Ω такая оценка (равномерная по группе автоморфизмов) должна иметь вид $\lambda(F_{k,\varepsilon}(\chi_A)) \leqslant \frac{\lambda(A)}{\varepsilon \ln k}$.

Для функции $g \in L_1(\Omega)$ через Δ_g обозначим ее интегральный модуль непрерывности, т. е.

$$\Delta_g(\theta) = \max_{A \subset \Omega | \lambda(A) \leqslant \theta} \left\{\left|\int_A g\, d\lambda\right|\right\}$$

(здесь $0 \leqslant \theta \leqslant 1$). Отметим очевидное соотношение $\lim\limits_{\theta\to 0} \Delta_g(\theta) = 0$. Для $k \geqslant 3$ положим $\tilde{k} = \frac{\ln k}{\ln \ln k}$.

Флуктуационная эргодическая теорема. *В условиях эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина:*

А) *в случае ограниченности* $f \in L_1(\Omega)$, *т. е.* $|f(x)| \leqslant M$ *для п. в.* $x \in \Omega$, *для любого* $k \geqslant 3$ *справедлива оценка*

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}(f)) \leqslant \frac{c_1}{\tilde{k}} \left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^3$$

при $c_1 \geqslant 20308$;

Б) *для любой функции* $f \in L_1(\Omega)$ *при* $k \geqslant 16$ *будет*

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}(f)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\|f\|_1}{\tilde{k}} + c_2 \frac{m}{\varepsilon} \Delta_{|f|}\left(c_2 \frac{m}{\varepsilon \tilde{k}}\right)\right) + \frac{\|f\|_1}{m}$$

для любого m *из промежутка* $0 < m \leqslant \varepsilon \sqrt{\frac{\tilde{k}}{9c_2}}$ *при* $c_2 \geqslant 188$.

В частности, справедлива оценка

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}(f)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\|f\|_1}{\tilde{k}} + c_2\sqrt{\Delta_{|f|}\left(\frac{21}{\tilde{k}}\right)}\right) + $$
$$+\frac{\|f\|_1}{\varepsilon}\max\left\{\sqrt{\frac{9c_2}{\tilde{k}}};\ \sqrt{\Delta_{|f|}\left(\frac{21}{\tilde{k}}\right)}\right\}.$$

Таким образом, скорость сходимости к нулю рассматриваемой последовательности определяется величиной интеграла функции $|f|$, т. е. величиной $\|f\|_1$, и тем, насколько равномерно этот интеграл распределен по мере, т. е. поведением функции $\Delta_{|f|}$ (чего и следовало ожидать).

Из сформулированной теоремы немедленно следуют и теорема Биркгофа — Хинчина, и обе теоремы первой главы. Действительно, если $\|f\|_1 \ll \infty$ и $\Delta_{|f|}(\theta) \approx 0$ для любого $\theta \approx 0$, то $\lambda(F_{k,\varepsilon}(f)) \approx 0$ для любых $k \approx \infty$ и $\varepsilon \gg 0$.

1.2. Как уже отмечалось, имеющаяся оценка является грубой. В связи с этим отметим два естественных вопроса:

1) какова точная оценка скорости сходимости последовательности $\{\lambda(F_{k,\varepsilon}(f, T))\}_{k=1}^{\infty}$ для данных f и T (т. е. какие свойства автоморфизма T и функции f и насколько сильно влияют на эту скорость)?

2) какова точная оценка скорости сходимости последовательности $\{\lambda(F_{k,\varepsilon}(f))\}_{k=1}^{\infty}$ для данной f (равномерная по T)?

1.3. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < \beta$; $l \in \mathbf{N}$; $x \in \Omega$. Будем говорить, что числовая последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T)\right\}_{n=0}^{\infty}$ делает l *скачков на интервале* $[\alpha, \beta]$, если можно указать такие целые числа $a_i(x)$, $b_i(x)$, $i = 1, \ldots, l$, что $0 \leqslant a_1(x) < b_1(x) < a_2(x) < \ldots < a_l(x) < b_l(x)$, и выполняются следующие неравенства:

$$\frac{1}{a_1(x)+1} s_{a_1(x)}(x) \leqslant \alpha \text{ и } \frac{1}{n+1} s_n(x) > \alpha \text{ для любого } n < a_1(x);$$

$$\frac{1}{b_1(x)+1} s_{b_1(x)}(x) \geqslant \beta \text{ и } \frac{1}{n+1} s_n(x) < \beta \text{ для любого } n \text{ из промежутка}$$
$$a_1(x) \leqslant n < b_1(x);$$

$$\frac{1}{a_2(x)+1} s_{a_2(x)}(x) \leqslant \alpha \text{ и } \frac{1}{n+1} s_n(x) > \alpha \text{ для любого } n \text{ из промежутка}$$
$$b_1(x) \leqslant n < a_2(x);$$

и т. д.

Далее используется также обозначение $F(x;\ [\alpha, \beta])$ для числа скачков последовательности $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; f, T)\right\}_{n=0}^{\infty}$ на интервале $[\alpha, \beta]$. Через $[a, b](x)$ обозначается множество $\bigcup_{a \leqslant n \leqslant b} T^n x$ $(a, b \in \mathbf{R}, a < b;\ x \in \Omega;\ n \in \mathbf{N})$.

§ 2. ОСНОВНАЯ ЛЕММА

Пусть $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ — действительные числа, связанные соотношениями $\beta^* > \alpha^*$, $\gamma^* = \beta^* - \alpha^*$. Для произвольного $l \in \mathbf{N}$ и $m \in \mathbf{R}$, $m \geqslant \max\{|\alpha^*|, |\beta^*|\}$, определим (измеримые) множества

$$F_l = \{x \in \Omega \mid F(x;\ [\alpha^*, \beta^*]) \geqslant l\}$$

и

$$F_l^m = \left\{x \in F_l \mid \sup_{0 \leqslant n < \infty}\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x; |f|, T)\right\} \leqslant m\right\}.$$

Для $\delta > 0, 0 < \theta < 1$ положим $\widehat{\gamma} = \gamma^* - \frac{4\delta}{\theta} \cdot \frac{1}{1-\theta}$;

$$r^* = \left[\frac{2m}{\theta\gamma^*}\right] + 1;\ p = \left[l\,\frac{2r^*+1}{(2r^*+2)^{\frac{2m-\gamma^*}{\delta}+3}} - r^*\right].$$

Основная лемма. *При выполнении условий*

$$\begin{cases} m \geqslant \widehat{\gamma} > \theta m \\ p \geqslant 2 \end{cases} \qquad (*)$$

справедлива оценка

$$\lambda(F_l^m) \leqslant \frac{1}{\widehat{\gamma} - \theta m}\left(\frac{\|f\|_1}{p-1} + 2\Delta_{|f|}(\theta)\right).$$

Доказательство леммы разбито на 5 пунктов.

2.1. *Пусть заданы действительные числа* $\delta > 0$ *и* $A > 2$. *Докажем для любой точки* $x \in F_l^m$ *существование таких чисел* $\alpha(x) \leqslant \alpha^*$, $\beta(x) \geqslant \beta^*$ *(зависящих от* A *и* δ*), что*

$$F(x;\ [\alpha(x),\ \beta(x)]) - A \max\{F(x;\ [\alpha(x) - \delta,\ \beta(x)]);$$

$$F(x; |\alpha(x), \beta(x) + \delta]\} \geqslant l \frac{A-1}{A^{s+1}-1} = B;$$

$\left(\text{здесь } s = \dfrac{2m - \gamma^*}{\delta} + 2\right)$.

Доказательство. Пусть $\beta^* \neq m$, $\alpha^* \neq -m$ (эти вырожденные случаи рассматриваются аналогично общему случаю). Разобьем интервал $[\beta^*, m]$ на $\left[\dfrac{m-\beta^*}{\delta}\right] + 1$ равных интервала длины $\dfrac{m-\beta^*}{\left[\frac{m-\beta^*}{\delta}\right]+1} < \delta$; интервал $[-m, \alpha^*]$ — на $\left[\dfrac{\alpha^*+m}{\delta}\right] + 1$ равных интервала (длины также меньше δ). Всего интервалов разбиения будет не более $\dfrac{m-\beta^*}{\delta} + \dfrac{\alpha^*+m}{\delta} + 2 = \dfrac{2m-\gamma^*}{\delta} + 2$.

Рассмотрим семейство подынтервалов интервала $[-m, m]$, получаемых присоединением к интервалу $[\alpha^*, \beta^*]$ нескольких идущих подряд (сверху и снизу) построенных выше интервалов разбиения. Присоединять можно от 0 до $\left[\dfrac{m-\beta^*}{\delta}\right] + \left[\dfrac{m+\alpha^*}{\delta}\right] + 2 = s_0$ таких интервалов. Разобьем рассматриваемое семейство на ранги по числу присоединяемых интервалов. Наименьший ранг — 0 — имеет только интервал $[\alpha^*, \beta^*]$, наибольший ранг — s_0 — только интервал $[-m, m]$.

Для $x \in F_l^m$ через $F_i(x)$ обозначим число $\max\{F(x;\ I) \mid \operatorname{rang} I = i\}$, $i = 0, \ldots, s_0$. Например, $F_0(x) = F(x;\ [\alpha^*, \beta^*]) \geqslant l$.

Далее доказательство ведем от противного. Предположим, что не существует чисел $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ с требуемыми свойствами. Тогда

$$F_{s_0}(x) < B;$$

$$F_{s_0-1}(x) < B + AF_{s_0}(x), \text{ т. е. } F_{s_0-1}(x) < B(1 + A);$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

$$F_0(x) < B + AF_1(x), \text{ т. е. } F_0(x) < B\left(1 + A + \ldots + A^{s_0}\right).$$

Так как $F_0(x) \geqslant l$, то получаем оценку $l < B\left(1 + A + \ldots + A^{s_0}\right) = B\dfrac{A^{s_0+1} - 1}{A-1}$, т. е. $B > l\dfrac{A-1}{A^{s_0+1}-1}$ — противоречие с выбором B.

Следовательно, требуемые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ существуют.

2.2. Пусть $\delta > 0$, $0 < \theta < 1$ — произвольные (сколь угодно малые) действительные числа; для $r^* = \left[\dfrac{2m}{\theta\gamma^*}\right] + 1$ положим $A = 2(r^* + 1)$. Рассмотрим числа $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, существование которых для данных δ и A было доказано для любой точки $x \in F_l^m$ в. п. 2.1.

Для любой точки $x \in F_l^m$ докажем существование таких чисел $l^i(x;\ \delta,\ \theta)$, $i=1,\ \ldots,\ p(\delta,\ \theta)$ число p не зависит от выбора точки $x \in F_l^m$), что:

1) $1 \leqslant l^p < l^{p-1} < \ldots < l^1 \leqslant F(x;\ [\alpha(x),\ \beta(x)]) = l_0(x)$;

2) $\frac{\theta}{2} b_{li}(x) \geqslant 2$, и при всех n из промежутка $\frac{\theta}{2} b_{li}(x) - 2 \leqslant n \leqslant b_{li}(x)$ будет $\frac{1}{n+1} s_n(x) \leqslant \beta(x) + \delta$, $i=1, \ldots, p$;

3) $\frac{\theta}{2} a_{li}(x) \geqslant 2$, и при всех n из промежутка $\frac{\theta}{2} a_{li}(x) - 2 \leqslant n \leqslant a_{li}(x)$ будет $\frac{1}{n+1} s_n(x) \geqslant \alpha(x) - \delta$, $i=1, \ldots, p$.

Здесь числа $a_{li}(x)$ и $b_{li}(x)$ — те же, что в определении скачка последовательности $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ на интервале для интервала $[\alpha(x),\ \beta(x)]$ (см. п. 1.3).

Пусть $1 < j < l_0(x)$. Заметим, что для любого i из промежутка $1 \leqslant i \leqslant j-1$ справедливо неравенство

$$\sum_{n=b_i(x)+1}^{b_{i+1}(x)} \left| f(T^n x) - \alpha(x) \right| \geqslant \gamma(x)(b_i(x) + b_{i+1}(x) + 2) \geqslant$$
$$\geqslant 2\gamma(x)((b_i(x)+1)+1)$$

(здесь $\gamma(x) = \beta(x) - \alpha(x)$). Действительно,

$$\sum_{n=a_{i+1}(x)+1}^{b_{i+1}(x)} \left(f(T^n x) - \alpha(x)\right) = \sum_{n=0}^{b_{i+1}(x)} \left(f(T^n x) - \alpha(x)\right) -$$
$$- \sum_{n=0}^{a_{i+1}(x)} \left(f(T^n x) - \alpha(x)\right) = (b_{i+1}(x)+1)\left(\frac{1}{b_{i+1}(x)+1} \sum_{n=0}^{b_{i+1}} f(T_x^n) - \alpha(x)\right) -$$
$$- (a_{i+1}(x)+1)\left(\frac{1}{a_{i+1}(x)+1} \sum_{n=0}^{a_{i+1}(x)} f(T^n x) - \alpha(x)\right) \geqslant$$
$$\geqslant (\beta(x) - \alpha(x))(b_{i+1}(x)+1) = \gamma(x)(b_{i+1}(x)+1).$$

Аналогично

$$\sum_{n=b_i(x)+1}^{a_{i+1}(x)} \left(f(T^n x) - \alpha(x)\right) \leqslant -\gamma(x)(b_i(x)+1),$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Из доказанного получаем для любого r из промежутка $1 \leqslant r \leqslant j-1$ справедливость неравенства

$$\sum_{n=b_{j-r}(x)+1}^{b_j(x)} \left| f(T^n x) - \alpha(x) \right| \geqslant 2r\gamma(x)((b_{j-r}(x)+1)+1).$$

Заметим далее, что существует такое число $M_\alpha > 0$, что для любого $n \in \mathbf{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \left| f(T^k x) - \alpha(x) \right| \leqslant M_\alpha(n+1)$$

для любой точки $x \in F_l^m$: достаточно положить $M_\alpha = 2m$. Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{b_j(x)} \left| f(T^n x) - \alpha(x) \right| \leqslant M_\alpha(b_j(x)+1).$$

По доказанному выше, отсюда для любого r из промежутка $1 \leqslant r \leqslant j-1$ вытекает

$$\frac{b_{j-r}(x)+1}{b_j(x)} < \frac{(b_{j-r}(x)+1)+1}{b_j(x)+1} \leqslant \frac{M_\alpha}{2r\gamma(x)} \leqslant \frac{m}{r\gamma^*}.$$

Поэтому $b_{j-r}(x)+1 < \frac{\theta}{2} b_j(x)$ при $r \geqslant \frac{2m}{\theta\gamma^*}$.

Положим $r^* = \left[\frac{2m}{\theta\gamma^*}\right] + 1$. Аналогично получаем оценку $a_{j-r}(x) + 1 < \frac{\theta}{2} a_j(x)$ для любых r и j, удовлетворяющих соотношениям $r^* \leqslant r < j \leqslant l_0(x)$ $(=F(x;\ [\alpha(x),\ \beta(x)]))$.

Приступаем к непосредственному доказательству существования требуемых чисел $l^i(x)$ и p.

Первый шаг построения. Рассмотрим отрезок

$$J = [a_{l_0-r^*}(x),\ b_{l_0}(x)];$$

отметим неравенства

$$a_{l_0-r^*}(x) + 1 < \frac{\theta}{2} a_{l_0}(x) < a_{l_0}(x) < b_{l_0}(x);$$

$$b_{l_0-r^*}(x) + 1 < \frac{\theta}{2} b_{l_0}(x) < b_{l_0}(x).$$

Если при всех $n \in J$ будет $\alpha(x) - \delta \leqslant \frac{1}{n+1} s_n(x) \leqslant \beta(x) + \delta$, то положим $l^1(x) = l_0(x)$, и переходим ко второму шагу, положив $J = [a_{l^1-r^*-1}(x),\ b_{l^1-1}(x)]$ (т. е. сдвинувшись на единицу влево по l). Если же при некотором $n \in J$ указанное двойное неравенство нарушается, то последовательность $\left\{\frac{1}{n+1} s_n(x)\right\}_{n \in J}$ делает не менее одного скачка на одном из интервалов $[\alpha(x) - \delta,\ \beta(x)]$, $[\alpha(x),\ \beta(x)+\delta]$. Отмечаем этот факт, называем отрезок J бракованным и переходим ко второму шагу построения, сдвигаясь по l на r^*+1 единицу влево, т. е. положив $J = [a_{l_0-2r^*-1}(x),\ b_{l_0-r^*-1}(x)]$.

Второй и последующий шаги построения ведутся аналогично: если соответствующее двойное неравенство справедливо, то определяем очередное значение l^i и, сдвигаясь на единицу влево по l, переходим к следующему шагу; если же это неравенство нарушено, то отмечаем соответствующий скачок, бракуем рассматриваемый интервал J и переходим к следующему шагу, сдвигаясь по l на r^*+1 единицу влево. Процесс продолжаем до тех пор, пока очередной сдвиг не приведет к $l < r^*+1$.

Заметим, что забракованные на разных шагах построения интервалы попарно дизъюнктны, так что их не более $F(x;\ [\alpha(x)-\delta,\ \beta(x)]) + F(x;\ [\alpha(x),\ \beta(x)+\delta])$ штук. При выбраковке каждого из них мы сдвигались влево по l на r^*+1 единицу. Поэтому число p найденных в процессе построения чисел $l^i(x)$ будет не менее

$$l_0(x) - r^* - 2(r^*+1)\max\{F(x;\ [\alpha(x)-\delta,\ \beta(x)]);\ F(x;\ [\alpha(x),\ \beta(x)+\delta])\}.$$

Последнее выражение, по доказанному в п. 2.1, не менее

$$l\,\frac{2r^*+1}{(2r^*+2)^{s_0+1}} - r^* \quad \text{для} \quad s_0 = \frac{2m-\gamma^*}{\delta} + 2,$$

так что в качестве p годится число $\left[l\,\dfrac{2r^*+1}{(2r^*+2)^{\frac{2m-\gamma^*}{\delta}+3}} - r^*\right]$ (не зависящее от выбора точки $x \in F_l^m$).

2.3. Докажем следующее важное свойство точек $x \in F_l^m$:

1) для всех i, $1 \leqslant i \leqslant p$, справедливо включение

$$\left[\frac{\theta}{2} a_{li}(x) - 2, \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) a_{li}(x) + 2\right](x) \subseteq [0, a_{li}(x)](x),$$

и для любого n из промежутка $\frac{\theta}{2} a_{li}(x) - 1 \leqslant n \leqslant \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) a_{li}(x) + 1$

$$\frac{1}{a_{li}(x) - n + 1} s_{a_{li}(x)-n}(T^n x) \leqslant \alpha^* + \frac{2\delta}{\theta} \frac{1}{1-\theta};$$

2) для всех j, $1 \leqslant j \leqslant p$, справедливо включение

$$\left[\frac{\theta}{2} b_{lj}(x) - 2, \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) b_{lj}(x) + 2\right](x) \subseteq [0, b_{lj}(x)](x),$$

и для любого n из промежутка $\frac{\theta}{2} b_{lj}(x) - 1 \leqslant n \leqslant \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) b_{lj}(x) + 1$

$$\frac{1}{b_{lj}(x) - n + 1} s_{b_{lj}(x)-n}(T^n x) \geqslant \beta^* - \frac{2\delta}{\theta} \frac{1}{1-\theta}.$$

Действительно, по доказанному в п. 2.2, для любого n из промежутка $\frac{\theta}{2} a_{li}(x) - 1 \leqslant n \leqslant a_{li}(x)$ будет $\frac{1}{n} s_{n-1}(x) \geqslant \alpha(x) - \delta$, т. е. $s_{n-1}(x) \geqslant (\alpha(x) - \delta) n$.

Из неравенства $\frac{1}{a_{li}(x) + 1} s_{a_{li}(x)}(x) \leqslant \alpha(x)$ с учетом этого соотношения получим

$$\frac{1}{a_{li}(x) + 1} \left\{(\alpha(x) - \delta) n + s_{a_{li}(x)-n}(T^n x)\right\} \leqslant \alpha(x).$$

Далее рассмотрим два случая: $n \leqslant \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) a_{li}(x) \left(\text{т. е. } a_{li}(x) \geqslant \frac{n}{1 - \theta/2}\right)$ и $\left(1 - \frac{\theta}{2}\right) a_{li}(x) < n \leqslant \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) a_{li}(x) + 1 \left(\text{т. е. } a_{li}(x) \geqslant \frac{n-1}{1-\theta/2} \text{ и } n > \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) a_{li}(x) = \frac{\theta}{2} a_{li}(x) \frac{1 - \frac{\theta}{2}}{\theta/2} > \frac{1 - \frac{\theta}{2}}{\theta/2}\right)$.

В первом случае имеем

$$\frac{1}{a_{li}(x) - n + 1} s_{a_{li}(x)-n}(T^n x) \leqslant \frac{\alpha(x)\left(a_{li}(x) - n + 1\right) + \delta n}{a_{li}(x) - n + 1} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(x) + \frac{\delta n}{\frac{n}{1 - \theta/2} - n + 1} \leqslant \alpha(x) + \frac{\delta(1 - \theta/2)}{\theta/2} < \alpha^* + \frac{2\delta}{\theta}.$$

Во втором случае аналогичная выкладка дает оценку

$$\alpha(x) + \frac{\delta n}{\frac{n-1}{1-\theta/2} - n + 1} \leqslant \alpha(x) + \frac{\delta(1 - \theta/2)}{\theta/2} \frac{n}{n-1} < \alpha^* + \frac{2\delta}{\theta} \frac{1}{1-\theta}.$$

Второе неравенство (для β^*) доказывается аналогично.

В дальнейшем понадобится такое следствие доказанных свойств. Пусть $\widehat{\alpha} = \alpha^* + \frac{2\delta}{\theta} \frac{1}{1-\theta}$, $\widehat{\beta} = \beta^* - \frac{2\delta}{\theta} \frac{1}{1-\theta}$, $x \in F_l^m$. Тогда:

1) для любого $y \in \left[\frac{\theta}{2} a_{li}(x) - 1, \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) a_{li}(x) + 1\right](x)$

$$\sup_{n \geqslant 0} \left\{s_n\left(y; (\widehat{\alpha} - f)\chi_{[0, a_{li}(x)](x)}, T\right)\right\} \geqslant 0;$$

2) для любого $y \in \left[\frac{\theta}{2} b_{lj}(x) - 1, \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) b_{lj}(x) + 1\right](x)$

$$\sup_{n \geqslant 0} \left\{ s_n\left(y; \left(f - \widehat{\beta}\right) \chi_{[0, b_{lj}(x)](x)}, T\right)\right\} \geqslant 0$$

(здесь $1 \leqslant i,\ j \leqslant p$).

Отметим также, что в числовом интервале $\left[\frac{\theta}{2} a_{li}(x) - 1,\right.$ $\left.\left(1 - \frac{\theta}{2}\right) a_{li}(x) + 1\right]$ содержится не менее чем $(1 - \theta)\, a_{li}(x) + 1$ целая точка; во всем интервале $[0, a_{li}(x)]$ их ровно $a_{li}(x) + 1$ штука. Оценку на отношение этих чисел (и аналогичных им для $b_{lj}(x)$) $\frac{(1 - \theta)\, a_{li}(x) + 1}{a_{li}(x) + 1} > 1 - \theta$ полезно иметь в виду при разборе п. 2.5 доказательства.

2.4. Положим $P_{2j-1} = \bigcup_{x \in F_l^m} [0, b_{lj}(x)](x)$, $P_{2j} = \bigcup_{x \in F_l^m} [0, a_{lj}(x)](x)$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Эти множества измеримы, и справедливы включения $\Omega \supseteq P_1 \supseteq P_2 \supseteq \ldots \supseteq P_{2p} \supseteq F_l^m$. Поэтому найдутся такие индексы t и τ, что

$$\int\limits_{P_{2t-1} \setminus P_{2t}} |f|\, d\lambda \leqslant \frac{\|f\|_1}{p - 1}, \quad \int\limits_{P_{2\tau} \setminus P_{2\tau+1}} |f|\, d\lambda \leqslant \frac{\|f\|_1}{p - 1}.$$

Положим $\widehat{\gamma} = \gamma^* - \frac{4\delta}{\theta} \frac{1}{1 - \theta} \left(= \widehat{\beta} - \widehat{\alpha}\right)$. Пусть

$$M_{2j-1} = \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, \sup_{n \geqslant 0} s_n\left(x; \left(f - \widehat{\beta}\right) \chi_{P_{2j-1}}, T\right) \geqslant 0 \right\},$$

$$M_{2j} = \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, \sup_{n \geqslant 0} s_n\left(x; \left(\widehat{\alpha} - f\right) \chi_{P_{2j}}, T\right) \geqslant 0 \right\},$$

$1 \leqslant j \leqslant p$; все эти множества измеримы.

По максимальной эргодической теореме (см., например, [5]) имеем

$$\int\limits_{M_{2j-1}} \left(f - \widehat{\beta}\right) \chi_{P_{2j-1}} d\lambda \geqslant 0, \quad \int\limits_{M_{2j}} \left(\widehat{\alpha} - f\right) \chi_{P_{2j}} d\lambda \geqslant 0,$$

поэтому

$$\int\limits_{M_{2j-1} \cap P_{2j-1}} \left(f - \widehat{\beta}\right) d\lambda \geqslant 0, \quad \int\limits_{M_{2j} \cap P_{2j}} \left(\widehat{\alpha} - f\right) d\lambda \geqslant 0.$$

Отсюда следуют оценки

$$\int\limits_{P_{2j-1}} \left(f - \widehat{\beta}\right) d\lambda = \int\limits_{P_{2j-1} \cap M_{2j-1}} \left(f - \widehat{\beta}\right) d\lambda + \int\limits_{P_{2j-1} \setminus M_{2j-1}} \left(f - \widehat{\beta}\right) d\lambda \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{P_{2j-1} \setminus M_{2j-1}} \left(f - \widehat{\beta}\right) d\lambda,$$

т. е.

$$\int\limits_{P_{2j-1}} f d\lambda \geqslant \widehat{\beta} \lambda\left(P_{2j-1}\right) + \int\limits_{P_{2j-1} \setminus M_{2j-1}} \left(f - \widehat{\beta}\right) d\lambda =$$

$$= \widehat{\beta}\left(\lambda\left(P_{2j-1}\right) - \lambda\left(P_{2j-1} \setminus M_{2j-1}\right)\right) + \int\limits_{P_{2j-1} \setminus M_{2j-1}} d\lambda.$$

Аналогично

$$\int\limits_{P_{2j}} f\, d\lambda \leqslant \widehat{\alpha}\left(\lambda\left(P_{2j}\right) - \lambda\left(P_{2j} \setminus M_{2j}\right)\right) + \int\limits_{P_{2j} \setminus M_{2j}} f d\lambda.$$

Докажем неравенство

$$\lambda\left(F_l^m\right) \leqslant \frac{1}{\widehat{\gamma} - \theta m}\left(\frac{\|f\|_1}{p - 1} + 2\Delta_{|f|}(\theta)\right).$$

Как будет показано в п. 2.5, для любого $j=1, \ldots, p$ справедливы неравенства $\lambda(P_{2j-1}\setminus M_{2j-1}) \leqslant \theta\lambda(P_{2j-1})$ $(\leqslant\theta)$; $\lambda(P_{2j}\setminus M_{2j}) \leqslant \theta\lambda(P_{2j})$ $(\leqslant\theta)$. Воспользуемся этими неравенствами для доказательства сформулированного утверждения.

Рассмотрим три случая.

Случай 1: $\widehat{\alpha} \geqslant 0$, $\widehat{\beta} > 0$. Из неравенства

$$\int_{P_{2t-1}\setminus P_{2t}} |f|\,d\lambda \leqslant \frac{\|f\|_1}{p-1}$$

получим

$$\frac{\|f\|_1}{p-1} \geqslant \int_{P_{2t-1}} f d\lambda - \int_{P_{2t}} f d\lambda \geqslant \widehat{\beta}(\lambda(P_{2t-1}) - \lambda(P_{2t-1}\setminus M_{2t-1})) -$$

$$- \widehat{\alpha}(\lambda(P_{2t}) - \lambda(P_{2t}\setminus M_{2t})) + \int_{P_{2t-1}\setminus M_{2t-1}} f d\lambda - \int_{P_{2t}\setminus M_{2t}} f d\lambda = S.$$

Как нетрудно видеть,

$$\widehat{\beta}(\lambda(P_{2t-1}) - \lambda(P_{2t-1}\setminus M_{2t-1})) - \widehat{\alpha}(\lambda(P_{2t}) - \lambda(P_{2t}\setminus M_{2t})) \geqslant$$

$$\geqslant \widehat{\beta}(1-\theta)\lambda(P_{2t-1}) - \widehat{\alpha}\lambda(P_{2t}) = \widehat{\beta}(1-\theta)\lambda(P_{2t-1}) -$$

$$- \widehat{\alpha}(1-\theta)\lambda(P_{2t}) - \widehat{\alpha}\theta\lambda(P_{2t}) \geqslant \widehat{\gamma}(1-\theta)\lambda(P_{2t}) - \widehat{\alpha}\theta\lambda(P_{2t}) =$$

$$= (\widehat{\gamma} - \theta\widehat{\beta})\lambda(P_{2t}) \geqslant (\widehat{\gamma} - \theta m)\lambda(F_l^m),$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Случай 2: $\widehat{\alpha} < 0$, $\widehat{\beta} > 0$. Есть две возможности:

(а) Если $\lambda(P_{2t-1}) - \lambda(P_{2t-1}\setminus M_{2t-1}) \geqslant \lambda(P_{2t}) - \lambda(P_{2t}\setminus M_{2t})$, то $S \geqslant$ $\geqslant (\widehat{\beta} - \widehat{\alpha})(\lambda(P_{2t}) - \lambda(P_{2t}\setminus M_{2t})) - 2\Delta_{|f|}(\theta) \geqslant \widehat{\gamma}(1-\theta)\lambda(P_{2t}) - 2\Delta_{|f|}(\theta)$, что и требуется, поскольку $m \geqslant \widehat{\gamma}$ (см. условия (*) в формулировке леммы).

(б) Если $\lambda(P_{2t-1}) - \lambda(P_{2t-1}\setminus M_{2t-1}) < \lambda(P_{2t}) - \lambda(P_{2t}\setminus M_{2t})$, то $\widehat{\alpha}\{(\lambda(P_{2t-1}) - \lambda(P_{2t-1}\setminus M_{2t-1})) - (\lambda(P_{2t}) - \lambda(P_{2t}\setminus M_{2t}))\} \geqslant 0$ и $S \geqslant (\widehat{\beta} - \widehat{\alpha}) \times$ $\times (\lambda(P_{2t-1}) - \lambda(P_{2t-1}\setminus M_{2t-1})) - 2\Delta_{|f|}(\theta) \geqslant \widehat{\gamma}(1-\theta)\lambda(P_{2t-1}) - 2\Delta_{|f|}(\theta)$.

Случай 3: $\widehat{\alpha} < 0$, $\widehat{\beta} \leqslant 0$. Рассматривается аналогично случаю 1, исходя из неравенства

$$-\frac{\|f\|_1}{p-1} \leqslant \int_{P_{2\tau}} f d\lambda - \int_{P_{2\tau+1}} f d\lambda.$$

Действительно, в этом случае

$$\widehat{\alpha}(\lambda(P_{2\tau}) - \lambda(P_{2\tau}\setminus M_{2\tau})) - \widehat{\beta}(\lambda(P_{2\tau+1}) - \lambda(P_{2\tau+1}\setminus M_{2\tau+1})) \leqslant$$

$$\leqslant \widehat{\alpha}(1-\theta)\lambda(P_{2\tau}) - \widehat{\beta}\lambda(P_{2\tau+1}) \leqslant$$

$$\leqslant -\widehat{\gamma}(1-\theta)\lambda(P_{2\tau}) - \widehat{\beta}\theta\lambda(P_{2\tau}) = (-\widehat{\gamma} - \theta\widehat{\alpha})\lambda(P_{2\tau}),$$

откуда и следует доказываемое неравенство.

2.5. Докажем для любого j, $1 \leqslant j \leqslant p$, оценку $\lambda(P_{2j-1}/M_{2j-1}) \leqslant$ $\leqslant \theta\lambda(P_{2j-1})$; такая же оценка для $\lambda(P_{2j}\setminus M_{2j})$ получается аналогично. Положим

$$P_{2j-1}^{\theta} = \bigcup_{x \in F_l^m} \left[\frac{\theta}{2} b_{lj}(x) - 1, \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) b_{lj}(x) + 1\right](x)$$

$\left(\subseteq \bigcup\limits_{x \in F_l^m} [0, b_{lj}(x)](x) = P_{2j-1}\right)$, отметим измеримость построенного множества. По доказанному в п. 2.3,

$$P_{2j-1}^{\theta} \subseteq M_{2j-1}, \text{ т. е. } P_{2j-1}\setminus M_{2j-1} \subseteq P_{2j-1}\setminus P_{2j-1}^{\theta}, \text{ и } \lambda(P_{2j-1}\setminus M_{2j-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda(P_{2j-1}\setminus P_{2j-1}^{\theta}). \qquad (5.1)$$

Положим

$$B_j^k = \bigcup_{\{x\in F_l^m \mid b_{lj}(x)<k\}} [0, b_{lj}(x)](x), \ 0 \leqslant k < \infty.$$

Тогда $P_{2j-1} = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_j^k$, т. е. $P_{2j-1} = \lim_{k\to\infty} B_j^k$.

Далее определим измеримое

$$(B_j^k)_\theta = \bigcup_{\{x\in F_l^m \mid b_{lj}(x)<k\}} \left[\frac{\theta}{2} b_{lj}(x) - 1, \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) b_{lj}(x) + 1\right](x);$$

будет $P^\theta_{2j-1} = \bigcup_{k=0}^{\infty} (B_j^k)_\theta$, т. е. $P^\theta_{2j-1} = \lim_{k\to\infty} (B_j^k)_\theta$.

Докажем, что для любого k

$$\lambda((B_j^k)_\theta) \geqslant (1-\theta)\lambda(B_j^k), \tag{5.2}$$

отсюда (переходом к пределу при $k\to\infty$) получим $\lambda(P^\theta_{2j-1}) \geqslant (1-\theta)\times$ $\times\lambda(P_{2j-1})$, т. е. $\lambda(P_{2j-1}\setminus P^\theta_{2j-1}) = \lambda(P_{2j-1}) - \lambda(P^\theta_{2j-1}) \leqslant \theta\lambda(P_{2j-1})$, что (см. (5.1)) и требуется.

Определим для $x \in (B_j^k)_\theta$ функции

$$s^+(x) = \sup_{n\geqslant 0} \{n \mid T^m x \in (B_j^k)_\theta \text{ при всех } m \in [0, n]\};$$

$$s^-(x) = \inf_{n\leqslant 0} \{n \mid T^m x \in (B_j^k)_\theta \text{ при всех } m \in [n, 0]\}.$$

Таким образом, функция $s^+(x)$ $(s^-(x))$ может принимать неотрицательные (неположительные) целые значения либо равняться $+\infty$ $(-\infty)$.

Положим для $x \in (B_j^k)_\theta$

$$s(x) = \left|\begin{array}{ll} s^+(x) - s^-(x) + 1, & \text{если } s^+(x) < +\infty,\ s^-(x) > -\infty; \\ +\infty, & \text{если } s^+(x) = +\infty,\ s^-(x) > -\infty; \\ -\infty, & \text{если } s^+(x) < +\infty,\ s^-(x) = -\infty; \\ i, & \text{если } s^+(x) = +\infty,\ s^-(x) = -\infty. \end{array}\right.$$

Определим, далее, измеримые $(B_j^k)^s_\theta = \{x \in (B_j^k)_\theta \mid s(x) = s\}$ для всех возможных значений s (т. е. $s \in \mathbf{N}$ и $s = \pm\infty, i$). Отметим, что $(B_j^k)^{s_1}_\theta \cap (B_j^k)^{s_2}_\theta = \varnothing$ при $s_1 \neq s_2$, и $(B_j^k)_\theta = \bigcup_s (B_j^k)^s_\theta$, так что

$$\lambda((B_j^k)_\theta) = \sum_s \lambda((B_j^k)^s_\theta). \tag{5.3}$$

Положим для $s \in \mathbf{N}$

$$(B_j^k)^s = \bigcup_{q\in\left[-\frac{s\theta/2}{1-\theta}, \frac{s\theta/2}{1-\theta}\right]} T^q (B_j^k)^s_\theta;$$

$$(B_j^k)^{-\infty} = \bigcup_{q\in[0, k\theta/2]} T^q (B_j^k)^{-\infty}_\theta; \quad (B_j^k)^{+\infty} = \bigcup_{q\in[-k\theta/2, 0]} T^q (B_j^k)^{+\infty}_\theta;$$

$(B_j^k)^i = (B_j^k)^i_\theta$; отметим измеримость всех этих множеств. По построению, $B_j^k \subseteq \bigcup_s (B_j^k)^s$, поэтому

$$\lambda(B_j^k) \leqslant \sum_s \lambda((B_j^k)^s). \tag{5.4}$$

Таким образом, для доказательства неравенства (5.2) остается доказать неравенство

$$\lambda((B_j^k)^s_\theta) \geqslant (1-\theta)\lambda((B_j^k)^s) \tag{5.5}$$

для любого s, поскольку в этом случае будет (см. (5.3), (5.4)) $(1-\theta)\times$ $\times\lambda(B_j^k)\leqslant(1-\theta)\sum_s\lambda((B_j^k)^s)\leqslant\sum_s\lambda((B_j^k)_\theta^s)=\lambda((B_j^k)_\theta)$, что и требуется.

Докажем неравенство (5.5) для любого $s\in\mathbf{N}$; для $s=\pm\infty$ доказательство аналогично, для $s=i$ доказывать нечего. Положим

$$(\widetilde{B}_j^k)_\theta^s=\left\{\bigcup_{q\in\left[-\frac{s\theta/2}{1-\theta},0\right]}T^q((B_j^k)_\theta^s)\right\}\Bigg\backslash\left\{\bigcup_{q\in\left[-\frac{s\theta/2}{1-\theta}+1,0\right]}T^q((B_j^k)_\theta^s)\right\};$$

тогда

$$(B_j^k)^s=\bigcup_{n\in\left[0,s+\frac{s\theta}{1-\theta}\right]}T^n((\widetilde{B}_j^k)_\theta^s)\quad\left(\text{заметим, } s+\frac{s\theta}{1-\theta}=\frac{s}{1-\theta}\right),$$

причем $T^{n_1}((\widetilde{B}_j^k)_\theta^s)\cap T^{n_2}((\widetilde{B}_j^k)_\theta^s)=\varnothing$ при $n_1\neq n_2$. Поэтому

$$\lambda((B_j^k)_\theta^s)=\lambda\left(\bigcup_{n\in\left[\frac{s\theta/2}{1-\theta},s+\frac{s\theta/2}{1-\theta}\right]}T^n((\widetilde{B}_j^k)_\theta^s)\right)=s\lambda((\widetilde{B}_j^k)_\theta^s);$$

$$\lambda((B_j^k)^s)=\lambda\left(\bigcup_{n\in\left[0,\frac{s}{1-\theta}\right]}T^n((\widetilde{B}_j^k)_\theta^s)\right)\geqslant\frac{s}{1-\theta}\lambda((\widetilde{B}_j^k)_\theta^s),$$

откуда и следует доказываемое неравенство.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

3.1. По максимальной эргодической теореме для любого $m>0$

$$\lambda\left(\left\{x\in\Omega\,\Big|\,\sup_{0\leqslant n<\infty}\frac{1}{n+1}s_n(x;\,|f|,\,T)\geqslant m\right\}\right)\leqslant\frac{\|f\|_1}{m}.$$

Поэтому для $F_{k,\varepsilon}^m(f)=\left\{x\in F_{k,\varepsilon}(f)\,\Big|\,\sup_{0\leqslant n<\infty}\frac{1}{n+1}s_n(x;\,f,\,T)\leqslant m\right\}$ справедливо неравенство

$$\lambda(F_{k,\varepsilon})\leqslant\lambda(F_{k,\varepsilon}^m)+\frac{\|f\|_1}{m}. \tag{1.1}$$

Отметим, что в случае ограниченности f (т. е. $|f(x)|\leqslant M$ для п. в. $x\in\Omega$) будет $F_{k,\varepsilon}^m=F_{k,\varepsilon}$ при любом $m\geqslant M$.

Итак, для каждой точки $x\in F_{k,\varepsilon}^m$ последовательность $\left\{\frac{1}{n+1}s_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ принимает значения в интервале $[-m,\,m]$ и допускает k ε-флуктуаций. В дальнейшем будем предполагать справедливость неравенства

$$m\geqslant\varepsilon/2. \tag{1.2}$$

Отметим, что в случае $m<\varepsilon/2$ будет $F_{k,\varepsilon}^m=\varnothing$ для любого $k\in\mathbf{N}$.

Разобьем отрезок $[-m,\,m]$ на равные интервалы длины не более $\varepsilon/2$ и не менее $\varepsilon/3$. Таких интервалов возьмем $s=\left[\frac{2m}{\varepsilon/2}\right]+1$ штук длины $d=2m\Big/\left(\left[\frac{2m}{\varepsilon/2}\right]+1\right)$ каждый $(\varepsilon/3\leqslant d\leqslant\varepsilon/2)$. Соответственно полоса $[-m,\,m]\times(\{0\}\cup\mathbf{N})$ разбивается на равные полоски ширины d. Каждая ε-флуктуация последовательности $\left\{\frac{1}{n+1}s_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ дает пересечение не менее одной из таких полосок. Всего таких пересечений для каждой точки $x\in F_{k,\varepsilon}^m$ не менее k; общее (суммарное) число скачков рассматриваемой последовательности на интервалах, порождающих полоски разбиения, не менее $(k-s)/2$ (это число может и не быть целым).

Поэтому найдется такой интервал, на котором делается не менее $(k-s)/(2s)=k/(2s)-1/2$ скачков.

Итак, для каждой точки $x\in F^m_{k,\varepsilon}$ последовательность $\left\{\frac{1}{n+1}s_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ делает не менее $k/(2s)-1/2$ скачков на одном из рассматриваемых интервалов разбиения. Поэтому для одного из этих интервалов, пусть это интервал $[\alpha^*,\ \beta^*]$, будет $\lambda\left(F^m_{l_0}\right)\geqslant\lambda\left(F^m_{k,\varepsilon}\right)/s$ для некоторого (целого) l_0, удовлетворяющего неравенству

$$l_0\geqslant\frac{k}{2s}-1/2\geqslant\frac{k}{\frac{8m}{\varepsilon}+2}-1/2, \tag{1.3}$$

т. е. для этого l_0 будет

$$\lambda\left(F^m_{k,\varepsilon}\right)\leqslant\left(\frac{4m}{\varepsilon}+1\right)\lambda\left(F^m_{l_0}\right). \tag{1.4}$$

Таким образом, мы оказываемся в ситуации применимости Основной леммы (§ 2). Для $\gamma^*=\beta^*-\alpha^*=d$ отметим неравенство

$$\varepsilon/3\leqslant\gamma^*\leqslant\varepsilon/2. \tag{1.5}$$

3.2. Заметим, что в условиях Основной леммы при

$$l\geqslant(2r^*+2)^{\frac{2m-\gamma^*}{\delta}+3} \tag{2.1}$$

будет

$$p\geqslant\frac{r^*l}{(2r^*+2)^{\frac{2m-\gamma^*}{\delta}+3}}\geqslant\frac{2l}{(2r^*+2)^{\frac{2m-\gamma^*}{\delta}+3}},$$

так как в силу (1.2) и (1.5) будет $r^*>2m/\gamma^*\geqslant 2$. Поэтому при выполнении условия (2.1) получаем неравенство $p\geqslant 2$, т. е. второе из условий (*), необходимых для применимости Основной леммы. Отметим вытекающее из (2.1) неравенство

$$p-1\geqslant\frac{l}{(2r^*+2)^{\frac{2m-\gamma^*}{\delta}+3}}. \tag{2.2}$$

Отметим далее, что в силу (1.2) и (1.5) для $r^*=\left[\frac{2m}{\theta\gamma^*}\right]+1$ справедливо неравенство

$$\frac{4m}{\varepsilon\theta}\leqslant r^*\leqslant\frac{8m}{\varepsilon\theta}. \tag{2.3}$$

Рассмотрим теперь неравенство $m\geqslant\widehat{\gamma}>\theta m$ — первое из условий (*). Заметим, что условие $m\geqslant\widehat{\gamma}$ сразу следует из (1.2) и (1.5). Условие $\gamma>\theta m$ заведомо выполняется при $\widehat{\gamma}\geqslant\theta m+\varepsilon/9$, т. е. при $\gamma^*\geqslant\theta m+{}$ $+\frac{4\delta}{\theta}\frac{1}{1-\theta}+\varepsilon/9$, для чего достаточно (в силу (1.5)) справедливости неравенств $\varepsilon/9\geqslant\theta m$ и $\varepsilon/9\geqslant\frac{4\delta}{\theta}\frac{1}{1-\theta}$. Справедливость последних неравенств следует из неравенств $\theta\leqslant\frac{\varepsilon}{9m}$ (откуда с учетом (1.2) будет $\theta\leqslant 2/9$) *и* $\varepsilon/9\geqslant\frac{4\delta}{\theta}\frac{1}{1-\theta}$, для чего достаточно выполнения соотношений

$$(0<)\,\theta\leqslant\frac{\varepsilon}{9m}, \tag{2.4}$$

$$\delta=\varepsilon\theta/47. \tag{2.5}$$

Итак, из (2.4) и (2.5) в силу (1.2) и (1.5) следует справедливость неравенства

$$m\geqslant\widehat{\gamma}\geqslant\theta m+\varepsilon/9, \tag{2.6}$$

чего заведомо достаточно для выполнения первого из неравенств $(*)$. В дальнейшем предполагаем справедливость соотношений (2.4) и (2.5).

Вернемся ко второму из условий $(*)$. Как уже отмечалось, оно в силу (1.2) и (1.5) следует из (2.1). Неравенство (2.1) в силу (1.3) следует из неравенства

$$\frac{k}{8m/\varepsilon+2}-1/2\geqslant(2r^*+2)^{\frac{2m-\gamma^*}{\delta}+3}. \tag{2.7}$$

Далее, из (1.5) и (2.5) получаем оценку $\frac{2m-\gamma^*}{\delta}+3\leqslant\frac{94m}{\varepsilon\theta}-2$, из (1.2) и (2.3) оценку $2r^*+2\leqslant\frac{17m}{\varepsilon\theta}$, откуда

$$(2r^*+2)^{\frac{2m-\gamma^*}{\delta}+3}\leqslant\left(\frac{17m}{\varepsilon\theta}\right)^{\frac{94m}{\varepsilon\theta}-2}. \tag{2.8}$$

Кроме того, из (1.2) вытекает $\frac{8m}{\varepsilon}+2\leqslant\frac{12m}{\varepsilon}$, поэтому неравенство (2.7) (а с ним и второе из условий $(*)$) следует из неравенства

$$k\geqslant\left(\frac{17m}{\varepsilon\theta}\right)^{\frac{94m}{\varepsilon\theta}}. \tag{2.9}$$

Из (2.9) вытекает также неравенство $\frac{k}{8\frac{m}{\varepsilon}+2}-1/2>\frac{k}{13\frac{m}{\varepsilon}}$, из которого (см. (1.3)) следует оценка

$$l_0>\frac{k}{13\frac{m}{\varepsilon}}. \tag{2.10}$$

Подведем итоги. При выполнении соотношений (1.2), (1.5), (2.4), (2.5), (2.9) для некоторого l_0, удовлетворяющего (2.10), выполняются условия $(*)$, и при этом $\widehat{\gamma}-\theta m\geqslant\varepsilon/9$ (из 2.6);

$$p-1\geqslant\frac{k}{13\frac{m}{\varepsilon}}\Bigg/\left(\frac{17m}{\varepsilon\theta}\right)^{\frac{94m}{\varepsilon\theta}-2}\quad\text{(из (2.2), (2.10), (2.8))}.$$

Поэтому из (1.4) по Основной лемме получаем оценку

$$\lambda\left(F^m_{k,\varepsilon}\right)\leqslant\left(\frac{4m}{\varepsilon}+1\right)\frac{9}{\varepsilon}\left(\frac{13\frac{m}{\varepsilon}\|f\|_1}{k}\left(\frac{17m}{\varepsilon\theta}\right)^{\frac{94m}{\varepsilon\theta}-2}+2\Delta_{|f|}(\theta)\right),$$

откуда

$$\lambda\left(F^m_{k,\varepsilon}\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\|f\|_1}{k}\left(\frac{17m}{\varepsilon\theta}\right)^{\frac{94m}{\varepsilon\theta}}+108\frac{m}{\varepsilon}\Delta_{|f|}(\theta)\right) \tag{2.11}$$

при выполнении соотношений (1.2), (2.4) и (2.9).

Как уже отмечалось, при нарушении неравенства (1.2) будет $F^m_{k,\varepsilon}=\varnothing$ для любого $k\in\mathbf{N}$, так что для справедливости оценки (2.11) достаточно выполнения условий (2.4) и (2.9).

3.3. Заметим, что при $\theta=\frac{2C\ln\ln k}{\ln k}$, $C\geqslant B>0$, справедливо неравенство

$$\frac{1}{k}\left(\frac{B}{\theta}\right)^{\frac{C}{\theta}}<\frac{\ln\ln k}{\ln k} \tag{3.1}$$

для любого $k \geqslant 16$. Действительно, логарифмирование неравенства

$$\frac{B \ln k}{2C \ln \ln k}^{\frac{\ln k}{2 \ln \ln k}+1} < \frac{B}{2C} k$$

и замена $x = \ln k$ дает неравенство

$$\left(\frac{x}{2 \ln x} + 1\right)\left(\ln \frac{B}{2C} + \ln x - \ln \ln x\right) < \ln \frac{B}{2C} + x,$$

заведомо справедливое при $\ln x > e$; последнее верно для любого $k \geqslant 16$.

Из (2.11), положив

$$\theta = \frac{188 \frac{m}{\varepsilon} \ln \ln k}{\ln k}, \tag{3.2}$$

получаем в силу (3.1) справедливость оценки

$$\lambda(F^m_{k,\varepsilon}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\|f\|_1 \frac{\ln \ln k}{\ln k} + 108 \frac{m}{\varepsilon} \Delta_{|f|}\left(188 \frac{m}{\varepsilon} \frac{\ln \ln k}{\ln k}\right)\right) \tag{3.3}$$

для любого $k \geqslant 16$ (при выполнении условий (2.4) и (2.9)).

Заметим, что условие (2.9) при предположении (3.2) излишне: оно выполняется автоматически. Условие (2.4) переходит в неравенство

$$\frac{\ln k}{\ln \ln k} \geqslant 188 \cdot 9 \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2. \tag{3.4}$$

Поэтому из (3.3) в силу (1.1) получаем оценку

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\|f\|_1 \frac{\ln \ln k}{\ln k} + 108 \frac{m}{\varepsilon} \Delta_{|f|}\left(188 \frac{m}{\varepsilon} \frac{\ln \ln k}{\ln k}\right)\right) + \frac{\|f\|_1}{m}$$

для любого m из промежутка $0 < m \leqslant \varepsilon \sqrt{\frac{\ln k}{1692 \ln \ln k}}$, $k \geqslant 16$. В частности, можно положить

$$m(k) = \varepsilon \min\left\{\sqrt{\frac{\ln k}{1692 \ln \ln k}};\ \left(\Delta_{|f|}\left(\sqrt{\frac{188 \ln \ln k}{9 \ln k}}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Тогда неравенство (3.4) будет выполняться автоматически, и

$$108 \frac{m(k)}{\varepsilon} \Delta_{|f|}\left(188 \frac{m(k)}{\varepsilon} \frac{\ln \ln k}{\ln k}\right) \leqslant \frac{108}{\sqrt{\Delta_{|f|}\left(\sqrt{\frac{188 \ln \ln k}{9 \ln k}}\right)}} \times$$

$$\times \Delta_{|f|}\left(188 \sqrt{\frac{\ln k}{9 \cdot 188 \ln \ln k}} \cdot \frac{\ln \ln k}{\ln k}\right) = 108 \sqrt{\Delta_{|f|}\left(\sqrt{\frac{188 \ln \ln k}{9 \ln k}}\right)}.$$

Поэтому для любого $k \geqslant 16$ справедлива оценка

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\|f\|_1 \frac{\ln \ln k}{\ln k} + 108 \sqrt{\Delta_{|f|}\left(\frac{21 \ln \ln k}{\ln k}\right)}\right) +$$

$$+ \frac{\|f\|_1}{\varepsilon} \max\left\{\sqrt{\frac{1692 \ln \ln k}{\ln k}};\ \sqrt{\Delta_{|f|}\left(\sqrt{\frac{21 \ln \ln k}{\ln k}}\right)}\right\}.$$

В случае ограниченности функции f, т. е. $|f(x)| \leqslant M$ для п. в. $x \in \Omega$, будет $\Delta_{|f|}(y) \leqslant My$. Поэтому при выполнении условия (3.4) для $m = M$ получаем из (3.3) справедливость оценки

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}) \leqslant \frac{\ln \ln k}{\ln k}\left(\frac{\|f\|_1}{\varepsilon} + 20304 \left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^3\right) \tag{3.5}$$

для любого $k \geqslant 16$.

Остается заметить, что условие (3.4) можно опустить. Действительно, в случае $M \geqslant \varepsilon/2$ при нарушении неравенства (3.4) правая часть (3.5) будет больше 1. В случае $M < \varepsilon/2$, как уже отмечалось, будет $F_{k,\varepsilon} = \varnothing$, так что в обоих случаях оценка (3.5) справедлива для любого $k \geqslant 3$, независимо от того, выполнено условие (3.4) или нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Nelson E.** Radically elementary probability theory.— Princeton University Press, 1987.— 98 p.— (Annals of Mathematics Studies, n°117).
2. **Nelson E.** Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.— 1977.— V. 83, N 6.— P. 1165—1198.
3. **Robinson A.** Non-standard analysis.— Amsterdam: North-Holland, 1966.— 293 p.— (Studies in logic and the foundations of mathematics).
4. **Birkhoff G. D.** Proof of the ergodic theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1931.— V. 17.— P. 656—660.
5. **Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.** Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.— 384 с.
6. **Рохлин В. А.** Избранные вопросы метрической теории динамических систем // Успехи мат. наук.— 1949.— Т. 4, вып. 2(30).— С. 57—128.
7. **Халмош П.** Лекции по эргодической теории: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1959.— 147 с.
8. **Качуровский А. Г.** Два предела в эргодической теореме Биркгофа — Хинчина.— Новосибирск, 1990.— 42 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 9).

А. Г. КУСРАЕВ, С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ K-ПРОСТРАНСТВ

А. Д. Александрову к его 80-летию

Общепризнанным фактом является особая роль тридцатых годов двадцатого столетия в развитии современной науки. В эти годы проявилась наметившаяся на рубеже веков тенденция к коренной перестройке математики, приведшая к созданию ряда новых математических дисциплин и, прежде всего оформлению функционального анализа. В последнее время стало осознаваться и специфическое место семидесятых годов, в которые произошли существенные перемены как в объеме, так и в существе математических теорий. В указанный период отмечается качественный скачок в уровне понимания взаимосвязей и взаимозависимостей в математических дисциплинах, происходят крупные продвижения, связанные как свыработкой новых синтетических подходов, так и с решением глубоких проблем, долго неподдававшихся решению.

Упомянутые процессы коснулись и теории упорядоченных векторных пространств — одного из актуальных и привлекательных разделов функционального анализа. Это направление, возникшее на рубеже тридцатых годов под влиянием работ Ф. Рисса, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др., переживает сейчас известный период обновления, связанный с освоением математических идей, относящихся к нестандартным моделям теории множеств. Булевозначные интерпретации, приобретшие популярность в связи с окончательным решением проблемы континуума, данным П. Дж. Коэном, открыли новые возможности в реализации эвристического принципа переноса Л. В. Канторовича в теории K-пространств.

Развитие инфинитезимальных методов, вновь легитимизированное нестандартным анализом А. Робинсона, обосновало логическую мечту Г. В. Лейбница и открыло перспективы общей монадологии векторных решеток. Новые нестандартные методы в теории K-пространств, находятся в процессе становления.

Расширяя известные строки Н. С. Гумилева [15, с. 309], можно сказать, что в настоящее время K-пространства «...сбрасывают кожи, чтоб