Л. В. Канторович, Об одной проблеме Монжа,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2004, том 312, 15–16

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 312, 2004 г.

Л. В. Канторович

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОНЖА

В 1942 г. мною была рассмотрена общая задача о наивыгоднейшем перемещении масс в компактном метрическом пространстве, которая заключается в следующем[1].

Даны два распределения масс, определяемые аддитивными функциями совокупности $\Phi(e)$ и $\Phi'(e)$, причем $\Phi(R) = \Phi'(R) = 1$. Перемещением масс называется функция $\Psi(e, e')$, характеризующая массу, перемещенную из совокупности e в e' $[\Psi(e, R) = \Phi(e);$ $\Psi(R, e') = \Phi'(e')]$.

Работа, связанная с осуществлением данного перемещения, определяется интегралом

$$W(\Psi) = \int\limits_R \int\limits_R r(x, y)\Psi(de, de')$$

(где $r(x, y)$ — расстояние между точками x и y).

Установлена теорема о том, что существует наивыгоднейшее перемещение Ψ_0, для которого W минимальна. Это перемещение характеризуется тем, что для него имеется своеобразный потенциал — функция U такого рода, что

1) всегда $|U(y) - U(x)| \leq r(x, y)$,

2) если происходит перемещение из x в y, то

$$U(y) - U(x) = r(x, y).$$

Данная задача возникла, как обобщение рассматривавшейся ранее практической задачи о нахождении прикрепления пунктов производства на железнодорожной сети к пунктам потребления, обеспечивающего минимиальные суммарные затраты по перевозке данного продукта.

Л. В. Канторович, *Об одной проблеме Монжа.* Успехи мат. наук **3**, No. 2 (1948), 225–226. Статья воспроизводится без каких-либо изменений.

[1]ДАН **37** (1942), стр. 227.

Эта задача, исчерпывающие приемы решений которой были разработаны автором совместно с М. К. Гавуриным, представляет, очевидно, частный случай рассмотренной общей задачи.

Лишь недавно я заметил, что та же общая задача содержит, как частный случай, одну задачу, рассматривавшуюся еще Монжем, и упомянутая выше теорема может быть применена с успехом к ее исследованию.

Именно, в мемуаре Монжа 1781 г.[2] в связи с вопросом о наиболее рациональных путях перевозки из насыпи в выемку была поставлена следующая задача: разбить два равновеликих объема на бесконечно малые частицы и сопоставить их между собой так, чтобы сумма проиведений длин путей на объем частиц была наименьшей.

В связи с этим вопросом Монжем была создана геометрическая теория конгруэнций. Что касается самой данной задачи, то им была высказана, но не доказана строго, теорема о том, что пути перемещения масс образуют семейство нормалей к некоторому семейству поверхностей.

Тем же вопросом занимался впоследствии Дюпен, но строгое доказательство теоремы Монжа было дано лишь через 100 лет, в 1884 г., в 200-страничном мемуаре Аппеля. Доказательство последнего, хотя впоследствии и несколько упрощенное им[3], все же довольно сложно и базируется на использовании тонких теорем вариационного исчисления.

Между тем это предложение сразу следует из приведенной выше абстрактной теоремы, так как если мы возьмем поверхности уровня $U(x) = C$, то пути перемещения должны быть нормальны к ним. Действительно, если такой путь xy пересекает в точке z поверхность уровня, то последняя, в силу условия 1), должна лежать между сферами с центрами в x и y, проходящими через z, а потому должна быть нормальна к пути xy.

Из этих же соображений могут быть получены и другие результаты по тому же вопросу, например, теорема Монжа о характере очертаний насыпи, если ее форма заранее неизвестна, впервые строго доказанная Сен-Жерменом.

---

[2] Memoires de Academie des Sciences, 1781 г.

[3] P. Appel, Le probleme geometrique des déblois et remlois. Memorial de Sc. Math. Fasc. XXVII, Paris, 1928.