Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. V. Bitsadze, On the Neumann problem for harmonic functions,
*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1990, Volume 311, Number 1, 11–13

https://www.mathnet.ru/eng/dan6715

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.91
December 12, 2025, 15:52:29

Доклады Академии наук СССР
1990. Том 311, № 1

УДК 517.95 МАТЕМАТИКА

© Член-корреспондент АН СССР А.В. БИЦАДЗЕ

# К ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Краевые задачи математической физики, в которых участвуют производные высоких порядков искомого решения рассматриваемого уравнения в частных производных эллиптического типа второго порядка, представляют не только теоретический интерес.

Пусть $D$ – ограниченная область $n$-мерного евклидова пространства $E_n$ точек $x$ с декартовыми ортогональными координатами $x_1, \ldots, x_n$, границей которой служит $(n-1)$-мерная поверхность $S$ класса $C^{m,h}$. В предлагаемой заметке рассматривается задача определения регулярной гармонической в $D$ функции $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ класса $C^{m,0}(D \cup S)$ по краевому условию

$$(1) \qquad \frac{d^m u}{d\nu^m} = f(x), \qquad x \in S,$$

где $\nu$ – внешняя к $S$ нормаль в точке $x \in S$, $f(x)$ – заданная на $S$ действительная непрерывная функция, а $m$ – натуральное число. Когда $m = 1$, эту задачу принято называть задачей Неймана, и она хорошо исследована не только для гармонических функций, но и для решений общего линейного равномерно эллиптического уравнения второго порядка. Мы будем предполагать, что $m$ – любое натуральное число.

В заметке основным является утверждение: задача (1) фредгольмова, т.е. число $N$ линейно-независимых решений соответствующей (1) однородной задачи

$$(2) \qquad \frac{d^m u_0}{d\nu^m} = 0, \quad x \in S,$$

конечно, оно зависит от порядка $m$ нормальной производной в краевом условии (1) и от размерности $n$ пространства $E_n$ и, кроме того, для разрешимости неоднородной задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла интегральным условиям ортогональности по $S$, число которых равно $N$.

Будем считать, что $D$ представляет собой $n$-мерный шар $|x| < 1$. В этом предположении задачу (1) легко можно исследовать указанным в [1] методом.

Поскольку $S$ – единичная сфера $|x| = 1$, для нормальной производной порядка $m$ функции $u(x)$ на $S$ имеем выражение

$$(3) \qquad \prod_{k=0}^{m-1} (x\nabla - k)u(x) = f(x), \quad x \in S,$$

где $\nabla$ – оператор градиента по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

Очевидно, что наряду с функцией $u(x)$ в шаре $D$ гармонической является и функция

$$(4) \qquad \prod_{k=0}^{m-1} (x\nabla - k)u(x) \equiv v(x).$$

На основании (4) с учетом (3) заключаем, что краевое условие (1) для функции $u(x)$ представляет собой краевое условие задачи Дирихле для гармонической функции $v(x)$, решение которой дается хорошо известной формулой Пуассона

$$(5) \qquad v(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} f(y)\, ds_y,$$

где $\omega_n$ – площадь единичной сферы в $E_n$.

Следовательно, искомые решения задачи (1) представляют собой гармонические в шаре $D$ решения линейного дифференциального уравнения в частных производных (4) порядка $m$, правая часть которого $v(x)$ является гармонической в шаре $D$ функцией, определенной по формуле (5).

Так как гармонические решения соответствующего (4) однородного уравнения

$$\prod_{k=0}^{m-1} (x\nabla - k) u_0(x) = 0$$

исчерпываются гармоническими полиномами переменных $x_1, \ldots, x_n$ от нулевой степени до степени $m - 1$, то линейно-независимые однородные гармонические полиномы всех этих степеней составляют множество всех линейно-независимых решений соответствующей (1) однородной задачи (2).

Известно, что все линейно-независимые однородные гармонические полиномы степени $k$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ даются формулами [2]

$$(6) \qquad P_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}} = \sum_{j=0} (-1)^j \frac{x_n^{2j}}{(2j)!} \Delta^j (x_1^{\alpha_1} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}});$$

$$(7) \qquad Q_{\beta_1 \ldots \beta_{n-1}} = \sum_{j=0} (-1)^j \frac{x_n^{2j+1}}{(2j+1)!} \Delta^j (x_1^{\beta_1} \ldots x_{n-1}^{\beta_{n-1}}),$$

где $\Delta$ – оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ – неотрицательные целые числа такие, что

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = k, \quad k = 0, \ldots, m-1, \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i = k - 1, \quad k = 1, \ldots, m-1.$$

В случае $n = 2$ число $l$ всех линейно-независимых однородных гармонических полиномов степени $k$, $k > 0$, равно двум, а при $n > 2$

$$l = \frac{n + 2k - 2}{n - 2} \binom{n + k - 3}{n - 3}.$$

Следовательно, соответствующая (1) однородная задача (2) имеет $N = 2m - 1$ линейно-независимых решений при $n = 2$ и

$$N = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n + 2k - 2}{n - 2} \binom{n + k - 3}{n - 3}$$

линейно-независимых решений при $n > 2$.

Для уравнения (4) точка $x = 0$ является особой. Поэтому оно не для любой правой части $v(x)$ имеет регулярные в шаре $D$ решения. Если учесть, что заменой независимых переменных

$$x_i = e^{y_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

это уравнение приводится к уравнению с постоянными коэффициентами, с учетом

выражения (5) для $v(x)$ легко находим, что регулярные гармонические в шаре $D$ решения уравнения (5) существуют лишь при выполнении условий

$$(9)\qquad \int_S P_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(y) f(y)\, ds_y = 0, \qquad \int_S Q_{\beta_1 \ldots \beta_{n-1}}(y) f(y)\, ds_y = 0,$$

где $P_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, $Q_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ – определенные по формулам (6) и (7) однородные гармонические полиномы.

При выполнении условий (9) частное решение задачи (1) можно брать в виде

$$(10)\qquad u^*(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)^{m-1} \frac{v(\xi x)}{\xi}\, d\xi.$$

Таким образом, приходим к заключению, что задача (1) разрешима тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (9). Когда эти условия выполнены, решения задачи (1) даются формулой

$$(11)\qquad u(x) = u^*(x) + \Sigma A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}} P_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}} + \Sigma B_{\beta_1 \ldots \beta_{n-1}} Q_{\beta_1 \ldots \beta_{n-1}},$$

где $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}}$, $B_{\beta_1 \ldots \beta_{n-1}}$ – произвольные действительные постоянные с целочисленными неотрицательными индексами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$, подчиненными требованиям (8).

При $n = 2$ формула (11) совпадает с соответствующей формулой, выведенной в работе [3].

Когда $D$ – область класса $C^{m,h}$, задача (1) может быть исследована методом интегральных уравнений, причем вид соответствующего потенциала подсказывает формула (10).

**Математический институт им. В.А. Стеклова**
**Академии наук СССР**
**Москва**

**Поступило**
**27 IX 1989**

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* – Дифференц. уравнения, 1986, т. 22, № 5, с. 823–828. 2. *Бицадзе А.В.* – Тр. Тбил. ун-та, 1961, т. 84, с. 35–37. 3. *Цой С.Б.* – Дифференц. уравнения, 1990, т. 26, № 1, с. 186–189.