С. Н. Бернштейн, А. Н. Колмогоров, Присуждение премии имени П. Л. Чебышева 1948 года, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1950, том 14, выпуск 1, 101–104

ПРИСУЖДЕНИЕ ПРЕМИИ ИМЕНИ П. Л. ЧЕБЫШЕВА 1948 ГОДА

Постановлением Президиума Академии Наук СССР от 5 мая 1949 года премия имени П. Л. Чебышева 1948 года в размере 20000 рублей присуждена члену-корреспонденту Академии Наук УССР Науму Ильичу Ахиезеру за работу «Лекции по теории аппроксимации». Ниже печатаются отзывы об этой работе.

Монография Н. И. Ахиезера «Лекции по теории аппроксимации» представляет вклад первостепенного значения в современную конструктивную теорию функций, и нельзя сомневаться в том, что она окажет значительное влияние на дальнейшее развитие этой теории, основоположником и главным вдохновителем которой является П. Л. Чебышев.

Как известно, на основе экстремальных алгебраических проблем, решенных Чебышевым и его ближайшими преемниками, в начале нынешнего столетия удалось установить глубокую связь между дифференциальными свойствами непрерывной функции и ее наилучшими приближениями $E_n(f(x); (a, b))$ при помощи многочленов степени n (в смысле Чебышева) в заданном промежутке (a,b).

В частности, аналитические функции были методологически включены в общую теорию функций вещественной переменной, благодаря характеризующему их свойству наибольшей близости к алгебраическим многочленам, выражающейся тем, что

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{E_n f(x)} = \rho < 1. \tag{1}$$

Тогда же были получены одинаковые, по существу, результаты для приближения $E_n^* f(x)$ периодических функций посредством тригонометрических полиномов порядка n. Конструктивным элементом, посредством которого в то время приближали (аппроксимировали) все функции, были преимущественно алгебраический или тригонометрический полиномы; при этом в качестве меры приближения, кроме максимума модуля погрешности, рассматривали также интегральные приближения и, в особенности, среднюю квадратическую погрешность, связанную с классическим аппаратом рядов Фурье, широко используемых при исследовании наилучшего приближения в смысле Чебышева. Значительная часть достижений этого начального периода теории аппроксимаций блестяще была изложена в 1918 году в сыгравшей крупную историческую роль, широко известной монографии Валле-Пуссена «Leçons sur l'approximation des fonctions continues». В книге Н. И. Ахиезера, которая является как бы продолжением упомянутой монографии, мы находим яркую творческую картину современного состояния этой теории, быстро развивающейся в наши дни. Автор книги, начавший свою научную деятельность во второй четверти нынешнего столетия, хорошо известен своими исследованиями по теории аппроксимации, в которых гармоничный синтез идей Чебышева и тонких методов современного анализа часто приводил его к важным и замечательным по своей законченности результатам.

Если в своих первоначальных работах (как и в своих самых последних исследованиях, связанных с целыми функциями конечной степени, которые появлялись после напечатания его книги) автор для решения важных экспериментальных проблем, непосредственно входящих в классическую тематику Чебышева, применяет глубже, чем кто бы то ни был из его предшественников, теорию функций комплексной переменной, то в рассматриваемой монографии Н. И. Ахиезер пользуется, по преимуществу методами, основанными на интегральном преобразовании Фурье, и грамматикой современного функционального анализа, которая дает ему возможность единообразной компактной формулировки и вывода важных обобщений основных теорем о приближенях в различных метриках (например, теоремы 2 и 3 § 87). При этом нужно подчеркнуть, что язык функционального анализа играет для автора лишь служебную роль и, руководимый конструктивным направлением Чебышева, он нигде не поддается искушению бесцельных обобщений, лишенных ясного конкретного смысла. Не подвергая подробному анализу содержание всей книги Н. И. Ахиезера, о богатстве которого можно составить себе некоторое представление по оглавлению и по примечаниям в конце ее, где первоисточники и важнейшие этапы развития теории указаны с величайшей тщательностью, замечу, что даже при изложении ранее известных фактов, автор сопоставляет и освещает их со своей новой точки зрения, и нет возможности перечислить все творческие детали оригинально нарисованной им грандиозной картины.

В первой главе (вопросы аппроксимации в линейном нормированном пространстве) автор, введя понятия и терминологию функционального анализа, формулирует в самом общем виде проблему наилучшей аппроксимации и устанавливает принципиально важные общие теоремы существования, единственности и полноты, иллюстрируя их на конкретных примерах.

Конструктивные корни теории появляются во второй главе (круг идей П. Л. Чебышева), где на основе вышеупомянутых собственных методов автора и общих теорем первой главы, в новой конденсированной, но доступной форме изложен ряд основных классических результатов Чебышева с дополнениями, принадлежащими главным образом Золотареву и Маркову. Но в план автора (по причинам, о которых будет сказано ниже) не входило подробное рассмотрение проблем алгебраического приближения; поэтому, хотя он и посвятил здесь впервые в монографической литературе несколько интересных параграфов экстремальным алгебраическим проблемам, решенным Чебышевым и Золотаревым при помощи эллиптических функций, однако результатам своих собственных прежних исследований он уделил меньше места, чем они того заслуживают. Правда, в конце книги имеется добавление под заглавием «Различные дополнения и задачи», где автор наметил в сжатом виде решение и исследование ряда экстремальных задач, по той или иной причине не вошедших в основной текст; сюда он и включил некоторую часть ранее решенных им алгебраических экстремальных проблем, как, например, изящное полное решение третьей проблемы Чебышева, выходящей из рамок линейных пространств функциального анализа, которая самим Чебышевым была решена лишь в частных случаях, а также исследование наилучшего приближения на двух отрезках.

Третья глава (элементы гармонического анализа), содержащая единственное в своем роде мастерское целеустремленное изложение новейших достижений теории тригонометрических рядов и интегралов Фурье, прокладывает путь, по которому в следующих двух главах автор придет к намеченной им основной цели максимального уточнения и распространения на приближения при помощи целых функций конечной степени прежних результатов теории наилучших приближений, о которых мы говорили вначале, изложенных в вышеупомянутой монографии Валле-Пуссена.

Дело в том, что к началу второй четверти нашего столетия естественно стала на очередь проблема наилучшего (в смысле Чебышева) приближения любых функций на всей действительной оси при помощи целесообразно подобранных элементарных функций, заменяющих многочлены, которые для этого, вообще, непригодны, а в случае периодических функций заменялись тригонометрическими полиномами. Так как существеннейшая часть известных результатов теории аппроксимации при помощи алгебраических и тригонометрических полиномов вытекала из экстремального свойства этих полиномов, обычно называемого теоремой о максимуме модуля производной, то от нового конструктивного элемента, приближенно представляющего произвольную функцию, необходимо было требовать, чтобы указанная теорема была применима и к нему. Но уже в 1923 году было установлено, что эта теорема справедлива для всех ограниченных целых функций экспоненциального типа конечной степени и только для них. Вследствие этого и, в особенности, после того как с другой стороны Палей и Винер в 1934 г. связали теорию целых функций конечной степени с интегральным преобразованием Фурье, проблема приближения посредством этих функций или, по терминологии автора, проблема гармонической аппроксимации должна была занять центральное место в конструктивной теории функций.

Четвертая глава (экстремальные свойства целых трансцендентных функций экспоненциального типа) содержит новое доказательство и существенные обобщения, принадлежащие автору, упомянутой теоремы о максимуме модуля производной. Важная теорема Палея — Винера, которая дает интегральное представление для всех функций конечной степени класса L_2, соответствующим образом обобщенная автором, служит здесь, как и в следующей главе, основным орудием исследования, и именно этим обстоятельством объясняется употребляемый автором термин «гармонической аппроксимации».

Кульминационным пунктом является пятая глава (вопросы наилучшей гармонической аппроксимации), в которой единым методом и в наиболее общей законченной форме выведены все известные зависимости между наилучшими приближениями и природой функции. В 1937 году почти одновременно были опубликованы у нас совместная статья Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна, а во Франции — статья Фавара, содержащие замечательное уточнение классического неравенства Джексона, дающее точную верхнюю грань наилучшего возможного приближения $E_n^* f(x)$ для всякой периодической функции (посредством тригонометрических полиномов порядка n), обладающей ограниченной производной данного порядка. Кроме этого результата, полученного сравнительно элементарным путем, применение ядра М. Г. Крейна позволяет автору распространить его на наилучшую гармоническую аппрокcмиацию любой функции на всей оси. С другой стороны, в 1938 году Н. И. Ахиезер, применяя метод и результаты своих первых работ, существенным образом уточнил теорему о наилучшем приближении аналитической функции, о которой мы напомнили вначале (формула (1)). Это важное уточнение, естественно, вошло в главу V, но впервые здесь мы находим распространение этого уточнения на наилучшее гармоническое приближение.

Все так называемые обратные неравенства, также отчасти впервые, выведены здесь для гармонической аппроксимации. Следует отметить еще принадлежащий автору вывод, данный в №№ 31—35 Добавления, некоторых формул для наилучшей гармонической аппроксимации аналитических функций с заданными особенностями, доказательство которых до того времени не было опубликовано.

В заключение необходимо обратить внимание на две последние статьи Н. И. Ахиезера, не успевшие войти в его книгу, которые содержат новые важные дополнения к ней: работа под № 62 в списке его работ (ИАН, 1946) и заметка под заглавием «К теории целых функций конечной степени» (ДАН, т. 63, 1948), которая напечатана после составления списка его научных работ. В первой из них автор разрешает экстремальную проблему, существенным образом обобщающую условия применимости теоремы о модуле производной в случае неограниченно возрастающих функций конечной степени, а вторая содержит два новых результата, из которых особенно важно найденное Н. И. Ахиезером необходимое и достаточное условие для того, чтобы неотрицательная при $-\infty < x < \infty$ функция конечной степени p $f(x)$ была представима в виде суммы квадратов двух функций степени $\frac{p}{2}$. Из этого видно, как интенсивно и плодотворно личное творчество автора в одной из наиболее жизненных областей математики, достигшей исключительного расцвета в наши дни.

На основании всего сказанного, я не только считаю книгу Н. И. Ахиезера «Лекции по теории аппроксимации» в полной мере заслуживающей премии им. П. Л. Чебышева, но с глубоким удовлетворением рекомендую присудить эту премию ее автору, являющемуся одним из самых талантливых и активных продолжателей направления Чебышева в современном анализе.

Академик *С. Н. Бернштейн*

Н. И. Ахиезер является одним из самых сильных представителей классического анализа среди советских математиков. После основополагающих работ С. Н. Бернштейна работы Н. И. Ахиезера составляют наиболее значительный вклад в направлении уточнения и углубления знаменитых исследований П. Л. Чебышева по наилучшему приближению функций многочленами. Вместе с тем в работах Н. И. Ахиезера (особенно в его работах совместно с М. Г. Крейном) традиции чебышевской школы вошли в плодотворное соприкосновение с более наглядными геометрическими методами современного функционального анализа.

Собственные результаты Н. И. Ахиезера составляют значительную часть содержания пятой главы книги и заканчивающих книгу «различных дополнений и задач», а также в изобилии разбросаны и почти по всем остальным главам.

В пятой главе в центре внимания стоят проблемы точного определения максимум — минимумов отклонений наилучших приближений заданного типа от функций заданного класса. Автору посчастливилось совместно с М. Г. Крейном и параллельно с Фаваром решить первую общую и нетривиальную задачу подобного типа: для равномерных приближений тригонометрическими многочленами периодических функций с ограниченной производной заданного порядка. В § 91 излагаются результаты автора, решающие эту же задачу для различных важных классов аналитических функций, а в § 87 решение аналогичной задачи для заданное число раз дифференцируемых функций в метрике L^p (новое, кроме тривиального случая $p=2$). Весь этот круг результатов является наиболее окончательной современной формой выражения основной идеи С. Н. Бернштейна и Джексона о связи дифференциальных свойств функций со скоростью сходимости к ним наилучших приближений.

Перечисленные выше результаты пятой главы рассматриваются автором как подчиненные более общим теоремам о приближении функций (уже не обязательно периодических) целыми функциями экспоненциального типа. В разработке этой руководящей идеи большого последнего цикла работ С. Н. Бернштейна автору рецензируемой книги принадлежат тоже большие заслуги. Экстремальным свойствам целых функций экспоненциального типа посвящена четвертая глава книги.

В «различные дополнения и задачи» Н. И. Ахиезер отнес ряд собственных результатов более специального характера, иногда выдающихся по глубине и изяществу приемов доказательства, непосредственно примыкающих к исследованиям Чебышева, Маркова и Золотарева. Здесь находится, например, замечательное решение задачи о многочленах, наименее отличающихся от нуля в двух заданных интервалах, исследование рациональной функции заданной степени, апроксимирующей наилучшим образом в двух интервалах две различные константы (§ 26), и т. п. Именно в решении такого рода специальных задач проявлялось тонкое мастерство автора в большинстве его работ более раннего периода.

Мы далеко не исчерпали собственных результатов Н. И. Ахиезера, вошедших в его книгу. Более подробно они освещены в отзыве С. Н. Бернштейна. Вполне присоединяясь к высокой оценке научных достижений Н. И. Ахиезера, данной в этом отзыве, я хочу в заключение сказать несколько слов о достоинствах его книги как образцового произведения математической литературы, соединяющего широту и ясность общего замысла с виртуозностью выполнения деталей. Первые три главы этой книги, имеющие более элементарный характер, требуют от читателя только знания элементов анализа и интеграла Лебега.

В главе первой читатель, интересующийся конкретными задачами классического анализа, лучше всего может познакомиться с элементами теории функциональных пространств. В главе второй ясно и современно изложена вся элементарная чебышевская теория наилучших приближений. Третья глава содержит прекрасное изложение основ теории рядов Фурье и интегралов Фурье. Материал этих глав выбран очень скупо. Но те проблемы, которые сюда включены, решаются исчерпывающим образом, так что читатель сразу получает правильное представление о всей силе и отточенности современных методов исследования.

Я считаю, что книга вполне заслуживает премии имени Чебышева.

Академик *А. Н. Колмогоров*