I. L. Gurevich, Flow of a heavy fluid around an infinite system of symmetric profiles, *Trudy Sem. Kraev. Zadacham*, 1983, Issue 19, 45–58

При $U = V_\infty$ и достаточно большом удалении клина от канала рассматриваемая схема течения переходит в схему Жуковского—Рошко обтекания клина безграничным потоком жидкости. Данные расчетов, проведенные для этого случая, совпадают с результатами, приведенными в работе Рошко [3].

На рис. 3—5 приведены зависимости C_X от d/H для различных значений относительной длины щеки клина l/H и угла его полураствора $\pi\varkappa$, из которых следует, что при достаточно больших d/H существует угол полураствора клина, соответствующий наибольшему сопротивлению системы канал—клин.

На рис. 6 приведены зависимости изменения d_C/H от d/H для различных значений l/H и $\pi\varkappa$ (при $U/V_0 = 0.2$; $V_\infty/V_0 = 0.7$).

Следует отметить, что предлагаемый метод решения без труда распространяется на случай, когда полные давления во взаимодействующих потоках одинаковы, а плотности разные. Для решения этой задачи, как следует из [1, с. 312], достаточно положить $U = U_\infty/\lambda$, где U_∞ — значение скорости внешнего потока плотности ρ_1, $\lambda = \sqrt{\rho_1/\rho}$ (ρ — плотность внутреннего потока).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости.— М.: Наука, 1979. 536 с.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.— М.: Наука, 1966. 448 с.
3. Рошко А. О вихревом следе и сопротивлении плохообтекаемых тел.— Механика, период. сборник переводов, 1956, № 1, с. 42—56.

Доложено на семинаре 3 февраля 1981 года.

УДК 532.5

И. Л. Гуревич

ОБТЕКАНИЕ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТЬЮ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОФИЛЕЙ

Впервые задача обтекания профиля вблизи свободной поверхности была рассмотрена в [1] в полуобратной постановке (задавался образ профиля в плоскости параметрического переменного). В [2] задача исследовалась в прямой постановке. В настоящей работе получены новые варианты условий разрешимости; в частности, рассматриваются профили знакопеременной кривизны. Кроме того, исследуются малые решения задачи обтекания системы вертикальных пластин в регулярном случае и в случае ветвления.

§ 1. Система уравнений. Основные оценки

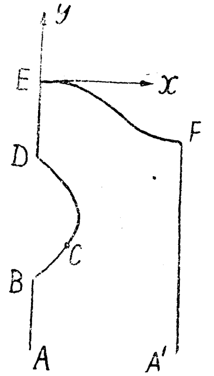

Рис. 1.

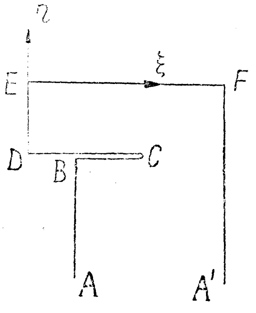

Рис. 2.

Пусть бесконечная система конгруэнтных профилей, расположенных на одной глубине на одинаковых расстояниях друг от друга, обтекается тяжелой жидкостью при наличии свободной поверхности. Профили симметричны относительно вертикальных осей, поэтому течение предполагается периодическим и симметричным относительно этих осей. Область D_z, занятая одним полупериодом течения, изображена на рис. 1. Здесь EF — свободная поверхность, $DCB = \Gamma_z$ — правая половина профиля, C — точка схода потока. Форма профиля задается с точностью до подобия, зато считается полностью известной область D_ζ в плоскости переменного $\zeta = \pi w/\varphi_0$, где w — комплексный потенциал, $\varphi_0 = \operatorname{Re}[w(A') - w(A)]$ (рис. 2.). На рис. 2 $|EF| = \pi m$, $|ED| = \pi h$, $|DC| = \pi m_1$, $|BC| = \pi m_2$ (m_1, m_2, $h > 0$, $m = 1 + m_1 - m_2 \geqslant 1$). Последнее неравенство означает, что циркуляция предполагается неположительной.

Отобразим D_ζ на D_U — полуплоскость $\operatorname{Im} U > 0$; пусть при этом точкам A, B, C, D, E, F соответствуют $U = \infty$, b, c, d, 1 ($1 < d < c < b < \infty$). Очевидно,

$$d\zeta/dU = F(U),\ F(U) = [U(U-1)(U-d)(U-b)]^{-1/2}(U-c).$$

При $\zeta = \xi$ $U = \operatorname{Re} U = u$, причем $d\xi/du = \operatorname{sign}(u-1) f(u)$, $f(u) = |F(u)|$. Отсюда

$$\xi = p(u) = \int_u^1 f(u)\,du \quad (0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant \xi \leqslant \pi m). \tag{1}$$

Через $r(\xi)$ обозначим обратную к $p(u)$ функцию. Связь между параметрами m_1, m_2, h и b, c, d определяется равенствами

$$\int_1^d f(u)\,du = \pi h, \quad \int_d^c f(u) = \pi m_1, \quad \int_c^b f(u)\,du = \pi m_2. \tag{2}$$

Так как уравнения (2) однозначно разрешимы относительно b, c, d, то в дальнейшем считаем известными все шесть параметров (а, следовательно, и m). Аналогично [2] можно оценить b, c, d через m_1, m_2, h.

На Γ_z задан угол между касательной и осью x $\Psi=\Psi(s)$, $s=s'/a$, s' — дуговая абсцисса на Γ_z, отсчитываемая от точки D, a — длина Γ_z. Задана также скорость v_0 в точке E.

Введем обозначения: $dw/dz=v_0 e^{\omega}$, $\omega(U)=\tau+i\theta$, $\tau(u)=\tau_2(u)$, $\theta(u)=\theta_2(u)$ при $d<u<b$; $\tau[r(\xi)]=\tau_1(\xi)$, $\theta[r(\xi)]=\theta_1(\xi)$, $d\tau_1/d\xi=\mu(\xi)$ при $0\leqslant\xi\leqslant\pi m$.

Легко видеть, что

$$\theta(u)=0 \text{ при } u\in(1,\ d)\cup(b,\ \infty),\ \tau(1)=0,$$

$$\theta_2(u)=-\Psi[s(u)] \text{ при } d<u<c,$$

$$\theta_2(u)=-\Psi[s(u)]-\pi \text{ при } c<u<b, \tag{3}$$

где $s(u)$ — неизвестная функция, $s(d)=0$, $s(b)=1$.

Из предыдущих соотношений, уравнения Бернулли, тождества $|dz/dU|=|dz/dw|\,|dw/d\zeta|\,|d\zeta/dU|$ и формулы Келдыша—Седова получим:

$$\mu(\xi)=M(\xi),\ M(\xi)=\nu\sin\theta_1\left(1+3\nu\int\limits_0^{\xi}\sin\theta_1\,d\xi\right)^{-1},\quad \nu=\frac{g\varphi_0}{\pi v_0^2}, \tag{4}$$

$$s(u)=S(u),\ S(u)=l^{-1}\int\limits_d^u f(u)\,e^{-\tau_2(u)}\,du,\ l=\frac{\pi v_0 a}{\varphi_0}, \tag{5}$$

$$l=\int\limits_d^b f(u)\,e^{-\tau_2(u)}\,du,$$

$$\theta_1(\xi)=Q_1(\xi)+Q_2(\xi),\ \tau_2(u)=T_1(u)+T_2(u),\ \tau_1(\xi)=\int\limits_0^{\xi}\mu(\xi)\,d\xi, \tag{6}$$

$$Q_1(\xi)=-\int\limits_0^1\tau_1[p(t)]\,C[t,\ r(\xi)]\,dt,\quad Q_2(\xi)=\int\limits_d^b\theta_2(t)\,C[t,r(\xi)]\,dt, \tag{7}$$

$$T_1(u)=-\int\limits_0^1\tau_1[p(t)]\,C(t,\ u)\,dt,\ T_2(u)=\int\limits_d^b\theta_2(t)\,C(t,\ u)\,dt,$$

$$C(t,\ u)=\frac{1}{\pi(t-u)}\left|\frac{u(u-1)}{t(t-1)}\right|^{1/2}.$$

Равенства (3) — (7) образуют систему уравнений Σ относительно $\mu(\xi)$ $(0\leqslant\xi\leqslant\pi m)$ и $s(u)$ $(d<u<b)$.

Отметим, что ниже наряду с выражением (7) для $T_2(u)$ используется легко проверяемое тождество

$$T_2(u) = -D(c,\ u) + \beta_1 D(d,\ u) + \beta_2 D(b,\ u) + \\ + \frac{1}{\pi}\int_d^b \frac{d\theta_2(t)}{dt} D(t,\ u)\,dt, \tag{8}$$

$$\left(D(t,\ u) = \ln\left|\frac{\rho(t,\ u) + \rho(u,\ t)}{\rho(t,\ u) - \rho(u,\ t)}\right|,\ \rho(u,\ t) = [u(1-t)]^{1/2},\right.$$

$$\left.\pi\beta_1 = -\Psi(0),\ \pi\beta_2 = \Psi(1) + \pi\right).$$

В дальнейшем полагаем, что $0 \leqslant \beta_k \leqslant 1/2$ и

$$-\pi \leqslant \Psi(s) \leqslant 0. \tag{9}$$

Из (3), (9) имеем

$$0 \leqslant \theta_2(u) \leqslant \pi \quad (d \leqslant u \leqslant c), \qquad -\pi \leqslant \theta_2(u) \leqslant 0 \quad (c \leqslant u \leqslant d). \tag{10}$$

Лемма 1.

1°. *Справедливы оценки*

$$\min \tau_1(\xi) \leqslant T_1(u) \leqslant \max \tau_1(\xi), \tag{11}$$

$$|Q_2(\xi)| \leqslant k_1 \sin(\xi/m),\ k_1 = (b-d)\, b^{1/2} (d-1)^{-2}, \tag{12}$$

$$|Q_2(\xi)| \leqslant k_2,\ k_2 = \operatorname{arctg}[2^{-1}(b-d)(d-1)^{-3/2}], \tag{13}$$

$$|Q_1(\xi)| \leqslant k_3 \max|\mu(\xi)|,\ k_3 = 4\pi^{-1} Gm,\ G \approx 0{,}916, \tag{14}$$

2°. *Если* $|\mu(\xi)| \leqslant N\sin(\xi/m)$, *то* $|Q_1(\xi)| \leqslant N \sin(\xi/m)$.

3°. *Если* Γ_z *выпуклая, то, есть* $d\Psi/ds \leqslant 0$ (*всюду предполагается гельдеровость* $d\Psi/ds$), *то*

$$T_2(u) > \ln[d(d-1)\, b^{-1}(b-d)^{\beta_1+\beta_2-1} |u-c|\ (u-d)^{-\beta_1}(b-u)^{-\beta_2}]. \tag{15}$$

Доказательство. Неравенство (11) доказывается прямым вычислением или с помощью принципа максимума. С учетом (10) получим оценку

$$|Q_2(\xi)| \leqslant 2r^{1/2} \operatorname{arctg}[2^{-1}(b-d)(d-1)^{-3/2}(1-r)^{1/2}] \quad (r = r(\xi)),$$

из которой вытекает (13) и $|Q_2(\xi)| \leqslant (b-d)(d-1)^{-3/2}[r(1-r)]^{1/2}$. Исследование $r(\xi)$ с помощью (1) позволяет из последнего неравенства получить (12).

С помощью принципа максимума легко показать, что $|Q_1(\xi)| \leqslant \varkappa_k(\xi)$, где $\varkappa_k(\xi)$ — граничное значение функции, гармонической в области ($0 < \xi < \pi m$, $\eta < 0$), равной нулю на прямых $\xi = 0$, $\xi = \pi m$ и имеющей при $\eta = 0$ производную по нормали, равную $g_1 = \max|\mu(\xi)|$ в общем случае ($k = 1$) и равную $g_2 = N\sin(\xi/m)$ в случае, когда $|\mu(\xi)| \leqslant N \sin(\xi/m)$ ($k = 2$). Используя формулу

$$\varkappa_k(\xi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi m} g_k(t) \ln \left| \frac{\sin[(t+\xi)/(2m)]}{\sin[(t-\xi)/(2m)]} \right| dt \equiv B[g_k(\xi)]$$

и учитывая, что $B[\sin(\xi/m)] = m\sin(\xi/m)$, получим (14) и 2°.

Утверждение 3° доказывается с помощью (8), равенства

$$\int\limits_d^b \frac{d\theta_2(\xi)}{d\xi} d\xi = \pi(1-\beta_1-\beta_2)$$

и справедливых при $u,\ t \in (d,\ b)$ оценок

$$D(c,\ u) < \ln[4b(b-1)|u-c|^{-1}],$$
$$D(b,\ u) > \ln[4d(d-1)(b-u)^{-1}],$$
$$D(d,\ u) > \ln[4d(d-1)(u-d)^{-1}],$$
$$D(t,\ u) > \ln[4d(d-1)(b-d)^{-1}].$$

Лемма 2.

1°. *Имеет место оценка*

$$l^{-1} < 4b(b-d)^{-1}\exp[\max\tau_1 + b^2(d-1)^{-4}]. \tag{16}$$

2°. *Если* Γ_z *выпуклая, то*

$$l^{-1} > (d-1)^3 b^{-2}(b-d)^{-1} e^{\min\tau_1}, \tag{17}$$

$$|S(u'') - S(u')| \leqslant k_4 e^H |u''-u'|^{1/2}, \tag{18}$$

$$(k_4 = 16(b-d)^{-1/2} b^3 (d-1)^{-3}, \quad H = \max\tau_1 - \min\tau_1).$$

Доказательство. Обозначим $f_1(u) = |u-c|\,[(u-d)(b-u)]^{-1/2}$. С помощью (11) и неравенства Иенсена имеем

$$l^{-1} < bI_1 \exp(\max\tau_1 + I_1 I_2),$$

$$I_1 = \left[\int\limits_d^b f_1(u)\,du\right]^{-1} < b-d, \quad I_2 = \left|\int\limits_d^b T_2(u)\,du\right|.$$

Используя выражение (7) для $T_2(u)$ и (10), оценим I_2, после чего получим (16).

С учетом (11) будем иметь

$$l^{-1} > (d-1)e^{\min\tau_1}\left[\int\limits_d^b f_1(u)e^{-T_2(u)}\,du\right]^{-1}.$$

Принимая во внимание (15), получим

$$f_1(u)e^{-T_2(u)} < b^2(b-d)^{1-\beta_1-\beta_2}(d-1)^{-2}(u-d)^{\beta_1-1/2}(b-u)^{\beta_2-1/2}.$$

Из этих оценок вытекает (17) и неравенство

$$\frac{dS}{du} < k_5 e^H [(u-d)(b-u)]^{-1/2} (k_5 = 4b^3 (d-1)^{-3}), \tag{19}$$

следствием которого является (18).

Лемма 3. *Пусть $\{s(u), \mu(\xi)\}$ — решение системы Σ. Пусть выполняется неравенство*

$$-\int_0^1 s(1-s)\Psi(s)\,ds > k_6 e^{3H}\left(k_6 = 64\pi^3 b^{11} (d-1)^{-3/2} \frac{b-c}{b-d}\right). \tag{20}$$

Тогда $Q_2(\xi) \geqslant 0$.

Доказательство. В силу (7), (3), (9)

$$Q_2(\xi) > \frac{[r(1-r)]^{1/2}}{\pi}\left[-b^{-2}\int_0^1 \Psi(s)\frac{du}{ds}ds - \pi(b-c)(d-1)^{-3/2}\right].$$

Используя (19), получим оценку

$$du/ds \geqslant k_7 s(1-s),\; k_7 = (b-d)k_5^{-1} e^{-H} \sin^2[1/(2k_5 e^H)];$$

из этих двух неравенств вытекает справедливость утверждения леммы.

§ 2. Разрешимость задачи в случае выпуклых профилей

Пусть $d\Psi/ds \leqslant 0$. Запишем систему уравнений Σ относительно $x = \{s(u), \mu(\xi)\}$ в виде $x = Ax$. Обозначим через C_α пространство гельдеровых на $[d, b]$ функций с показателем α $(0 < \alpha < 1/2)$, через C — пространство непрерывных на $[0, \pi m]$ функций. Пусть $E = C_\alpha \times C$, $E_1 = E_1(R, N)$ — замкнутое выпуклое подмножество пространства E, элементы которого удовлетворяют условиям $\|s(u)\|_\alpha \leqslant R$, $s(d) = 0$, $s(b) = 1$, $0 \leqslant \mu(\xi) \leqslant N$.

Возьмем $x = \{s(u), \mu(\xi)\} \in E_1$. Используя (14) и (7) (или принцип максимума), будем иметь

$$0 \leqslant Q_1(\xi) \leqslant k_3 N. \tag{21}$$

Пусть

$$N = N_1,\; N_1 = k_3^{-1}(\pi - k_2). \tag{22}$$

Тогда в силу (6) $0 \leqslant \tau_1(\xi) \leqslant \pi m N_1 = H_1$. Поэтому $H \leqslant H_1$. Пусть выполняется (20) с $H = H_1$. Тогда по лемме 3 $Q_2(\xi) \geqslant 0$; отсюда из (13), (21), (22) и (10) вытекает $0 \leqslant \theta_1(\xi) \leqslant \pi$. Поэтому $0 \leqslant M_1(\xi) \leqslant \nu$. В силу (18) $\|S(u)\|_\alpha < R_1 = k_5 e^H (b-d)^{1/2-\alpha} + 1$. Из этих неравенств вытекает, что x не принадлежит границе $E_1(R_1, N_1)$, если $\nu < N_1$.

Легко показать, что оператор A вполне непрерывен на E_1 по норме пространства E.

Используя гомотопный переход к системе Σ_0, соответствующей задаче обтекания невесомой жидкостью системы вертикальных отрезков (пластинок), и применяя принцип Лере—Шаудера, получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Для существования хотя бы одного решения системы Σ достаточно, чтобы производная $d\Psi/ds$ была гельдеровой неположительной функцией и выполнялись условия* (9), (20) и $\nu < N_1$, *где N_1 определяется формулами* (22), (13), (14), а $H_1 = \pi m N_1$.

Очевидно, (20) выполняется при достаточно малых значениях $(b-c)/(c-d)$, то есть при малых m_2/m_1. При m_1, $m_2 \to 0$ (то есть при $b-d\to 0$) или при $\dot{h}\to\infty$ (то есть при $d\to\infty$) будет $N_1\to\pi^2/(4G)\approx 2{,}68$ (или $N_1\to\pi^2/(4mG)\approx 2{,}68/m$). В первом случае, как видно из (17) и определения l, $a\to 0$. Во втором случае стремится к бесконечности глубина погружения профиля.

Получим еще одно достаточное условие разрешимости Σ, не требующее выполнения (20), но накладывающее более жесткое, чем в теореме 1, ограничение на ν.

Пусть $d\Psi/ds \leqslant 0$, а $E_2 = E_2(R, N)$ — замкнутое выпуклое подмножество пространства E, элементы которого удовлетворяют условиям $\|s(u)\|_\alpha \leqslant R$, $s(d)=0$, $s(b)=1$, $|\mu(\xi)|\leqslant N\sin(\xi/m)$. Пусть $\{s(u), \mu(\xi)\}\in E_2$. Тогда $|\tau_1(\xi)| < 2N/m$, $H < 4N/m$. Далее, в силу (6), (12) и утверждения 2° леммы 1 $|\theta_1(\xi)|\leqslant \leqslant (Nm+k_1)\sin(\xi/m)$ при $0\leqslant\xi\leqslant\pi m$.

Пусть выполняются неравенства

$$P>0,\ \nu(Nm+k_1)P^{-1}\leqslant N\ \ (P=1-6\nu m(Nm+k_1)). \tag{23}$$

Тогда $|\mu_1'(\xi)|\leqslant N\sin(\xi/m)$. Анализ показывает, что если

$$\nu\leqslant\nu_0\quad(\nu_0=[m(1+6k_1+\sqrt{24k_1})]^{-1}), \tag{24}$$

то справедливы следующие утверждения: число

$$N_2 = 2k_1\{3[\rho+(\rho^2-2k_1/3)]\}^{-1} \tag{25}$$

$$(\rho = 6^{-1}[(\nu m)^{-1}-1-6k_1])$$

действительно и положительно; неравенства (23) выполняются при $N=N_2$, а второе из них не выполняется при $N<N_2$.

Положим $N=N_2$ и будем считать выполненным (24). Тогда

$$|\mu_1(\xi)| < N_2\sin(\xi/m),\ H<H_2\,(H_2=4N_2/m);$$

поэтому $\|S(u)\|_\alpha\leqslant R_2$ $(R_2=k_4e^H(b-d)^{1/2-\alpha}+1)$. Отсюда и из принципа Шаудера получаем следующую теорему существования решения системы Σ, принадлежащего $E_2(R_2, N_2)$.

Теорема 2. *Для существования хотя бы одного решения системы Σ достаточно, чтобы производная $d\Psi/ds$ была гельдеровой неположительной функцией и выполнялись условия* (9) *и* (24).

При m_1, $m_2 \to 0$ (или при $h \to \infty$) будет $\nu_0 \to 1$ (или $\nu_0 \to 1/m$). В обоих случаях $N_2 \to 0$, откуда, как нетрудно показать, вытекает, что на свободной границе $\theta \to 0$. Кроме того, в первом случае $a \to 0$.

В § 3 используется следующее утверждение (его справедливость без предположения о выпуклости Γ_z легко усмотреть из (25) и доказательства теоремы 2).

Лемма 4. *Пусть выполняется* (24). *Тогда* $N_2 \leqslant \delta/m$ $(\delta = \sqrt{k_1/6})$; *если* $|\mu(\xi)| \leqslant N_2 \sin(\xi/m)$, *то независимо от* $\|S(u)\|_\alpha$ *имеют место неравенства*

$$\begin{gathered} |M(\xi)| \leqslant N_2 \sin(\xi/m) \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \pi m), \\ |\theta_1(\xi)| < \delta + 6\delta^2, \ |\tau_1(\xi)| < 2\delta, \ l > q^{-1}. \end{gathered} \tag{26}$$

(q — *правая часть* (16) *с заменой* $\max \tau_1$ *на* 2δ).

§ 3. Разрешимость задачи в общем случае

Для доказательства теоремы существования без предположения о выпуклости Γ_z приходится накладывать дополнительные ограничения, в частности, требовать малости $b - d$ (или длины a). Будем считать, что выполнено (9), $d\Psi/ds$ ограничена и *на* Γ_z *отношение длины любой дуги к длине стягивающей ее хорды не превышает конечного числа* λ (*).

Лемма 5. *Пусть* $\{s(u), \mu(\xi)\}$ — *решение системы* Σ, *выполнено* (24) *и* $|\mu(\xi)| \leqslant N_2 \sin(\xi/m)$ $(0 \leqslant \xi \leqslant \pi m)$. *Пусть имеют место неравенства*

$$\delta_1 = \delta + 6\delta^2 < \pi/2, \tag{27}$$

$$(d-1)\ln(2d-1) > 3\pi m e^{4\delta} \sin\delta_1, \tag{28}$$

$$2l < \pi m e^{-2\delta} \cos\delta_1. \tag{29}$$

Тогда область D_z *однолистна.*

Доказательство. В силу (27) и леммы (4) $|\theta_1(\xi)| < \pi/2$. Будем отмечать штрихом координаты точек и длины отрезков в плоскости z, отнесенные к величине φ_0/v_0. Из леммы 4 и последнего неравенства вытекает

$$m e^{-2\delta} \cos\delta_1 < x'(F) < m e^{2\delta}, \ |y'(F)| < m e^{2\delta} \sin\delta_1. \tag{30}$$

Оценим $|ED|'$. Имеем

$$|ED|' = \pi^{-1} \int_1^d f e^{-\tau(u)} du, \ \tau(u) = T_1(u) + T_2(u). \tag{31}$$

Из (7) (или принципа максимума) и леммы 4 имеем $|T_1(u)| \leqslant 2\delta$. В силу (7), 10)

$$-\ln[(b-u)/(c-u)] \leqslant T_2(u) \leqslant \ln[(c-u)/(d-u)].$$

Подставляя эти неравенства в (31) и оценивая получающиеся интегралы, будем иметь

$$(d-1)\ln(2d-1)\, e^{-2\delta}(3\pi)^{-1} < |ED|' < \sqrt{b}\, e^{-c}. \tag{32}$$

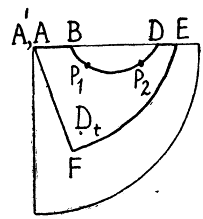

Рис. 3.

Из (28), (30), (32) и неравенства $|\theta_1(\xi)| < \pi/2$ вытекает, что $y'(F) > y'(D)$, то есть дуги EF и $EDCBA$ имеют лишь одну общую точку E. В силу (29), (30) $2l < \pi x'(F)$, то есть Γ_z не пересекается с прямой FA'. Из этих фактов делаем вывод об однолистности D_z.

Лемма 6. *В условиях леммы* 5 *для любых* u_1, $u_2 \in [d, b]$ $(u_1 < u_2)$ *имеет место оценка*

$$s(u_2) - s(u_1) < k_8 e^{k_9 l}\, l^{-1}(\ln[(b-1)/(u_2-u_1)])^{-1/2}$$

$$(k_8 = 2\pi\lambda^2 m \exp[2(\delta + \pi\sqrt{b})],\ k_9 = m^{-1}e^{-2\delta}).$$

Доказательство. Обозначим через Ω_z полуполосу

$$\{0 < x < me^{2\delta}\varphi_0/v_0,\ y < me^{2\delta}(\varphi_0/v_0)\sin\delta_1\}.$$

Область D_z однолистна в силу леммы 5, и вследствие (30), (32) $D_z \subset \Omega_z$. Функция $t = \exp[-i\pi z e^{-2\delta} v_0 (2m\varphi_0)^{-1}]$ отображает Ω_z на область Ω_t: $\{|t| < \exp\ (\pi\sin\delta_1/2),\ -\pi/2 < \arg t < 0\}$. При этом D_z отображается на однолистную область $D_t \subset \Omega_t$ (рис. 3). Ее площадь σ удовлетворяет неравенству $\sigma < \pi e^{\pi/4}$. На рис. 3 P_1, P_2 — точки с аффиксами t_1, t_2, соответствующие точкам $V = u_1$, u_2.

Так как в силу (9) на Γ_z $|y| \leqslant |y(B)|$, то на ее образе $|t| \geqslant |t(B)| = \exp[-\pi e^{-2\delta} y'(B)(2m)^{-1}]$. Используя (32), получим, что здесь $|t| > \exp[-(\pi\sqrt{b} + le^{-2\delta})(2m)^{-1}]$. Отсюда имеем оценки

$$k_{10} < v_0\varphi_0^{-1}|dz/dt| < k_{11}e^{k_{12}l} \quad (|t| \geqslant t(B)), \tag{33}$$

$$\left(k_{10} = \frac{2m}{\pi}e^{-\pi/2},\ k_{11} = \frac{2m}{\pi}\exp\left(2\delta + \frac{\pi\sqrt{b}}{m}\right),\ k_{12} = (2me^{2\delta})^{-1}\right).$$

В силу (33) отношение длины любой дуги на Γ_t (образе Γ_z) к длине стягивающей ее хорды не превышает

$$\lambda \max|dz/dt|/\min|dz/dt| < \lambda k_{11}k_{10}^{-1}e^{k_{12}l} = \lambda_1.$$

Из неравенства $s(u_2) - s(u_1) < \lambda|z(t_2) - z(t_1)|/a$ и (33) имеем

$$s(u_2) - s(u_1) < \lambda\pi k_{11}e^{k_{12}l}|t_2 - t_1|/l. \tag{34}$$

Пусть Λ — длина кратчайшего из путей, лежащих в D и соединяющих участки ABP_2 и P_1DE границы D_t. Очевидно, $\Lambda \geqslant \min |t'' - t'|$, где минимум берется по всем $t' \in ABP_2$ и $t'' \in P_1DE$. Но $|t'' - t'| \geqslant |t_2 - t_1|/\lambda_1$, поэтому $|t_2 - t_1| \leqslant \lambda_1 \Lambda$.

Отсюда и из (34) получим

$$s(u_2) - s(u_1) < \lambda\lambda_1 \pi k_{13} e^{k_{12} l} \Lambda / l. \tag{35}$$

По лемме Кравченко ([3], с. 139) $\Lambda < (4\pi\sigma / |\ln r|)^{1/2}$, где $r = (u(A), u_2, u(E), u_1)$ — ангармоническое отношение указанных точек оси u. Так как $\sigma < \pi e^{\pi/4}$, $u(A) = \infty$, $u(E) = 1$, $u_2 - u(E) \geqslant d - 1$, то $r > (u_2 - u_1)/(b-1)$, $\Lambda < \pi \sqrt{e^{\pi} / \ln [(b-1)(u_2 - u_1)^{-1}]}$.

Отсюда и из (35) вытекает утверждение леммы.

Из нее, в частности, получаем при $u_1 = d$, $u_2 = b$

$$\Phi(l) > 1 \left(\Phi(l) = k_{14} e^{k_9 l} / l, \; k_{14} = k_8 \left(\ln \frac{b-1}{b-d} \right)^{-1/2} \right). \tag{36}$$

Функция $\Phi(l)$ при $l \geqslant 0$ обладает следующими свойствами: $\Phi(0) = \Phi(\infty) = 0$; $\Phi(l)$ имеет единственный минимум, равный $k_{14} k_9 e$ при $l = l_0 = 1/k_9$; при условии

$$k_{14} e < \min (1/k_9, \; \pi m e^{-2\delta}/2) \tag{37}$$

уравнение $\Phi(l) = 1$ имеет корни $l' < l_0$, $l'' > l_0$; неравенства (29), (36) выполняются при $l < l'$, и (36) не выполняется при $l = l'$.

Лемма 7. *Пусть выполняются условия леммы 5 и (37). Пусть $l < l'$. Тогда $\|s(u)\|_\alpha < R_3$ при любом $\alpha \in (0, 1/2)$ и некотором $R_3 = R_3(\alpha)$.*

Доказательство. Отобразим D_U на верхний единичный полукруг в плоскости $\varkappa = \rho e^{i\sigma}$ так, чтобы отрезок FE $(0 < u < 1)$ перешел в действительный диаметр. Используя лемму 6, ограниченность $d\Psi/ds$ и неравенство $l < l'$, получим модуль непрерывности функции $\Psi\{s[u(\sigma)]\}$.

Из (8) можно получить $\Gamma_2(u) = \tau'(u) + \tau''(u)$, где

$$\tau'(u) = -D(c, u) + \beta_1 D(d, u), + \beta_2 D(b, u),$$

$$\theta''(u) = -\Psi[s(u)] + \pi(\beta_2 - 1) \quad (d < u < b),$$

$$\tau''(u) = \int_1^b \theta''(t) C(t, u)\, dt, \; \theta''(u) = \pi(\beta_1 + \beta_2 - 1) \quad (1 < u < d).$$

Функция $\theta''(u)$, в отличие от $\theta_2(u)$, непрерывна на $[1, b]$. Легко видеть, что $\tau''[u(\sigma)] + i\theta''[u(\sigma)] = \Omega(e^{i\sigma})$, где $\Omega(\varkappa)$ — аналитическая функция, непрерывная в замкнутом полукруге, причем $\operatorname{Re} \Omega(\varkappa) = 0$ при $\operatorname{Im} \varkappa = 0$.

Используя полученное выражение для $T_2(u)$, (5, (6), (17) и лемму 4, придем к неравенству

$$\frac{ds}{du} < qk_{15}(u-d)^{\beta_1-1/2}(b-u)^{\beta_2-1/2}\exp[2\delta-\tau''(u)]$$

$$(k_{15}=\sup\{f(u)(u-d)^{1/2-\beta_1}(b-u)^{1/2-\beta_2}e^{-\tau'(u)}\}<\infty).$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим отсюда

$$s(u_2)-s(u_1)<k_{16}|u_2-u_1|^{\alpha}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}e^{-p\tau''[u(\sigma)]}d\sigma$$

$$(0<\alpha<1/2,\ p=p(\alpha)>1,\ \sigma_k=\sigma(u_k)).$$

Так как у функции $\theta''[u(\sigma)]$ известен модуль непрерывности при $0\leqslant\sigma\leqslant\pi$, то аналогично [4] (с. 175) получим оценку последнего интеграла, а с ней и утверждение леммы.

Докажем теперь теорему существования.

Заменим в Σ выражение для $\tau_1(\xi)$ из (6) на

$$\tau_1(\xi)=\int\limits_0^{\xi}M_1(\xi)\,d\xi,\ \ M_1(\xi)=\operatorname{sign}\mu(\xi)\min\{|\mu(\xi)|,\ N_2\sin(\xi/m)\}.$$

Полученную систему Σ^* запишем в виде $x=A^*x$, $x=\{s(u), \mu(\xi), l\}$.

Условия (24), (27), (28), (37) предполагаем выполненными. Пусть $E^*=C_\alpha\times C\times Z$, где Z — числовая ось. Пусть E_0^* — замкнутое подмножество пространства E^*, элементы которого удовлетворяют условиям $\|s(u)\|_\alpha\leqslant R_3$, $|\mu(\xi)|\leqslant N_2$, $q\leqslant l\leqslant l'$.

Рассмотрим $x\in E_0^*$. Так как $|M_1(\xi)|\leqslant N_2\sin(\xi/m)$, то, как нетрудно показать, остаются справедливыми последовательные оценки (26), (29) и утверждения лемм 6, 7. Если $l=l'$, то не выполняется (36). Таким образом, система Σ не имеет решений на границе E_0^*. Используя гомотопный переход от Σ^* к системе Σ_0^*, соответствующей задаче обтекания невесомой жидкостью системы вертикальных пластинок, и применяя принцип Лере—Шаудера, получим теорему существования решения системы Σ^*, принадлежащего внутренности E_0^*. Так как для такого решения $|\mu(\xi)|\leqslant N_2\sin(\xi/m)$, то $M_1(\xi)=\mu(\xi)$, и это решение удовлетворяет исходной системе Σ.

Теорема 3. *Для существования хотя бы одного решения системы Σ достаточно, чтобы Γ_z имела гёльдерову кривизну и выполнялись условия* ($*$), (9), (24), (27), (28), (37).

Неравенства (27), (28), (37) выполняются при достаточной малости $b-d$.

§ 4. Малые решения для системы пластинок

Пусть Γ_z — вертикальный отрезок. В этом случае $\theta_2(u) = \pi/2$ $(d < u < c)$, $\theta_2(u) = -\pi/2$ $(c < u < b)$. Из (6) получим

$$Q_2[p(u)] = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\bar{u}\,[(2\bar{c} - \bar{d} - \bar{b}) - \bar{c}^2\bar{u}^2(2\bar{b}\bar{d} - \bar{d}\bar{c} - \bar{b}\bar{c})]}{[1 + (1 - \bar{c}^2\bar{u}^2)(1 - \bar{b}\bar{d}\bar{u}^2)](1 - \bar{c}^2\bar{u}^2)(1 - \bar{b}\bar{d}\bar{u}^2)} \qquad (38)$$

$(\bar{u} = [u/(1 - u)]^{1/2},\ \bar{c} = (1 - 1/c)^{1/2},\ \bar{d} = (1 - 1/d)^{1/2},\ \bar{b} = 1 - 1/b)^{1/2})$.

Интегрируя по частям выражение для $Q_1(\xi)$ и учитывая, что $d\tau_1[p(u)]/du = -\mu[p(u)]f(u)$, будем иметь

$$Q_1[p(u)] = \int_0^1 D(t,\ u) f(t)\,\mu[p(t)]\,dt. \qquad (39)$$

Принимая во внимание (39), (4), (6) и производя замену $u = u(\sigma) = \cos^2(\sigma/2)$, придем к уравнению

$$v(\sigma) = \nu\int_0^\pi K(t,\ \sigma)\,\Phi(t)\left(1 + 3\nu\int_0^t \Phi(t)\,dt\right)^{-1} dt; \qquad (40)$$

$$\Bigg(\Phi(\sigma) = (c - u)\,[(d - u)(b - u)]^{-1/2}\sin[v(\sigma) + g(\sigma)],$$

$$K = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt\sin n\sigma}{n},$$

$$v(\sigma) = Q_1[p(u(\sigma))],\ g(\sigma) = Q_2[p(u(\sigma))]\Bigg).$$

Если $c = d = b$ (то есть $m_1 = m_2 = 0$, а профиль вырождается в точку), то $g(\sigma) = 0$, и (40) допускает решение $v(\sigma) = 0$ при любом ν. Будем искать решение (40), когда $c \approx d \approx b$, то есть $\bar{c} \approx \bar{d} \approx \bar{b}$ (в общем случае $0 < \bar{d} \leqslant \bar{c} \leqslant \bar{b} < 1$). Пусть $\bar{d} = \bar{c} - \varepsilon d_1$, $\bar{b} = \bar{c} + \varepsilon b_1$, где ε, d_1, $b_1 \geqslant 0$, ε — малый параметр. Тогда $\lambda(\sigma) = (c - u)[(d - u)(b - u)]^{-1/2} = 1 + \varepsilon A + \varepsilon^2 B$, $g(\sigma) = \varepsilon B + \varepsilon^2 C$, где

$$A = \frac{\bar{c}c^2}{2}\ \frac{d_1 - b_1}{c - u},\quad B = \frac{(d_1 - b_1)\sin\sigma}{1 + (\bar{c} - 1)u},\quad C = \frac{\bar{c}(d_1^2 + b_1^2)\,u\sin\sigma}{[1 + (\bar{c} - 1)u]^2}.$$

Уравнение (40) примет вид

$$v = \nu\int_0^\pi K\Big[v - 3\nu v\int_0^t v\,dt + \varepsilon(Av + B)\Big(1 - 3\nu\int_0^t v\,dt\Big) +$$

$$+ \varepsilon^2(AB + C) + \ldots\Big]dt. \qquad (41)$$

Пусть $\nu \neq n$ ни при одном натуральном n (регулярный случай). Ищем решение (41) в виде $v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots$. Будем иметь

$$v_1 = \nu \int_0^\pi K(v_1 + B)\,dt, \quad v_2 = \nu \int_0^\pi K(v_2 + P)\,dt \tag{42}$$

$$\left(P(\sigma) = C + AB + Av_1 - 3\nu(v_1 + B)\int_0^\sigma (v_1 + B)\,d\sigma\right).$$

Решения (42) имеют вид

$$v_1(\sigma) = \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k-\nu}\sin k\sigma, \quad v_2(\sigma) = \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{k-\nu}\sin k\sigma.$$

При ν, близком к k, знак $v(\sigma)$ совпадает со знаком $B_1/(k-\nu)$, то есть со знаком $(d_1 - b_1)/(k-\nu)$. Если, например, $d_1 > b_1$, то при $\nu < k$ $v(\sigma) \geqslant 0$, то есть свободная поверхность понижается по направлению течения, а при $\nu < k$ — повышается.

Пусть теперь $\nu = 1 + \delta$, где δ — малый параметр (случай ветвления). Применим метод Ляпунова—Шмидта [5]. Сохраняя в (41) лишь члены вида $v^\alpha \varepsilon^\beta \delta^\gamma (\alpha + \beta + \gamma \leqslant 2)$ и вводя обозначение

$$\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\sigma v(\sigma)\,d\sigma, \tag{43}$$

будем иметь

$$v - \int_0^\pi K_1 v\,dt = \xi\sin\sigma + \int_0^\pi K\Big[v\Big(\delta - 3\int_0^t v\,dt\Big) + \varepsilon\Big(B + \delta B +$$

$$+ Av - 3B\int_0^t v\,dt - 3v\int_0^t B\,dt\Big) + \varepsilon^2\Big(AB + C - 3B\int_0^t B\,dt\Big) + \ldots\Big]\,dt,$$

где $K_1(t, \sigma) = K(t, \sigma) - 2\pi^{-1}\sin t \sin\sigma$. Используя резольвенту ядра K_1, получим отсюда

$$v = \xi\sin\sigma + \int_0^\pi K_2\Big[\delta v - 3v\int_0^t v\,dt + \varepsilon\Big(B + \delta B + Av -$$

$$- 3B\int_0^t v\,dt - 3v\int_0^t B\,dt\Big) + \varepsilon^2\Big(C + AB - 3B\int_0^t B\,dt\Big) + \ldots\Big]\,dt \tag{44}$$

$$\left(K_2(t,\ \sigma) = 2\sin t \sin\sigma + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin kt\cdot\sin k\sigma}{k-1}\right).$$

Будем искать решение (44) в виде

$$v(\sigma) = \xi\sin\sigma + \sum_{i+j+k\geqslant 1}\xi^i\delta^j\varepsilon^k v_{ijk}(\sigma). \tag{45}$$

В результате получим

$$v_{110} = \sin\sigma, \quad v_{011} = v_{001} = B_1\sin\sigma + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{k-1}\sin k\sigma, \tag{46}$$

$$v_{101} = \int_0^{\pi} K_2\left[A\sin t - 3B(1-\cos t) - 3\sin t\int_0^t B dt\right]dt = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \sin k\sigma,$$

$$v_{002} = \int_0^{\pi} K_2\left(AB + C - 3B\int_0^t B\sin t dt\right)dt = \sum_{k=1}^{\infty} q_k\sin k\sigma,$$

$$v_{200} = -3\sin\sigma + \frac{3}{2}\sin 2\sigma,\ v_{0j0} = 0.$$

Подставляя (46), (45) в (43), придем к уравнению разветвления $3\xi^2 - \xi(\delta + \varepsilon r_1) - (\varepsilon B_1 + \varepsilon\delta B_1 + \varepsilon^2 q_1) = 0$, которое имеет решения $\xi_{1,2} = (\delta + \varepsilon r_1)/6 \pm [(\delta + \varepsilon r_1)^2/36 + \varepsilon B_1]^{1/2}$. В зависимости от знака выражения в квадратных скобках число действительных решений равно 0, 1 или 2. В частности, при $\varepsilon = 0$ будет $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \delta/3$. Подставляя в (45), получим два решения:

$$v = 0 \text{ и } v = (\delta/3)\sin\sigma + \ldots .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тер-Крикоров А. М. Нелинейная задача теории подводного крыла.— ДАН СССР, 1958, т. 119, № 6.
2. Гуревич И. Л. О существовании решения задачи обтекания тяжелой жидкостью симметричного профиля в канале.— ПММ, 1981, т. 45, вып. ...
3. Kravtchenko J. Representation conforme de Helmholtz. Théorie des sillages et des proues.— J. Math. Pures Appl., 20, 1941.
4. Leray J. Les problémes de representation conforme d'Helmholtz; theories des sillages et des proues.—Comment. math. helv., 8, 1935.
5. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1969.

Доложено на семинаре 2 февраля 1981 г.