УДК 519.11/.14

# КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ (НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ, АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ)

*В. А. Носов, В. Н. Сачков, В. Е. Тараканов*

Настоящий обзор является продолжением обзора по комбинаторной теории тех же авторов, изданного в настоящей серии в 1981 году. За последнее время наблюдалось дальнейшее увеличение числа исследований в тех разделах комбинаторики, которые были освещены в предыдущем обзоре; был получен целый ряд принципиально новых результатов. С другой стороны, там не были отражены многие важные направления в комбинаторной математике, прежде всего, бурно развивающееся в последние годы алгоритмическое направление.

В связи с этим в обзор включены разделы, связанные с комбинаторными вопросами неотрицательных матриц, и разделы, посвященные алгоритмической комбинаторике. Ввиду обширности материала, в стороне остались некоторые существенные направления комбинаторной теории. В обзоре рассматриваются прежде всего статьи, прореферированные в РЖ «Математика» в 1980—1983 гг. Однако в некоторых случаях для лучшего понимания по необходимости привлекаются также более ранние работы.

В последние годы на русском языке появился целый ряд монографий и обзорных статей по проблемам, близким к рассматриваемым в настоящем обзоре (см. [2, 5, 17, 23, 24, 69]); они оказали свое влияние на выбор и организацию материала в настоящей работе.

## § 1. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ (0,1)-МАТРИЦ

1. **Введение.** Основным объектом рассмотрения в §§ 1—3 будут матрицы, составленные из нулей и единиц ((0, 1)-матрицы). Введем некоторые определения и обозначения. Конечное множество из $n$ элементов будем называть $n$-множеством; число элементов в конечном множестве $S$ обозначаем через $|S|$. Через $[x]$ будем обозначать целую часть действительного числа $x$, через $\lceil x \rceil$ — минимальное целое число, не меньшее $x$. Для

матрицы $A$ пусть $A^T$ обозначает транспонированную матрицу. Через $I_n$ обозначаем единичную матрицу порядка $n$, через $J_n$, $J_{m,n}$ — матрицы, составленные из единиц, соответственно, порядка $n$ и размера $m \times n$. Матрицей перестановки называется квадратная (0,1)-матрица, которая в каждой строке и каждом столбце имеет по одной единице. Если $\sigma: i \to \sigma(i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, — подстановка на множестве $\{1, \ldots, N\}$, то ей соответствует матрица перестановки $P_\sigma = (p_{kl})$ порядка $N$, где $p_{kl} = 1$, если $l = \sigma(k)$, и $p_{kl} = 0$ в противном случае. Матрица перестановки, соответствующая транспозиции $(ij)$, обозначается $P_{ij}$.

Далее, пусть заданы два целочисленных вектора $R = (r_1, \ldots, r_M)$ и $S = (s_1, \ldots, s_N)$. Через $\mathfrak{A}(R, S; M, N)$ (или просто $\mathfrak{A}(R, S)$) обозначим класс Райзера, состоящий из (0, 1)-матриц размера $M \times N$ с вектором строчных сумм $R$ и вектором столбцевых сумм $S$. Если $R = (m, m, \ldots, m)$, $N = (n, n, \ldots, n)$, то соответствующие классы Райзера обозначаем через $\mathfrak{A}(m, n, N)$ и $\mathfrak{A}(n, N)$ при $m = n$. Совокупность (0, 1)-матриц размера $M \times N$, состоящая из матриц со строчными суммами, не превосходящими $m$, и столбцевыми суммами, не меньшими $n$, обозначается через $\mathfrak{A}(\leqslant m, \geqslant n, M, N)$. (0, 1)-матрица $A$ порядка $N$ называется частично разложимой, если существуют две такие матрицы перестановки $P$ и $Q$, что $P^{-1}AQ = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ X & A_2 \end{pmatrix}$, где $A_1$ и $A_2$ — квадратные матрицы. В противном случае $A$ называется вполне неразложимой. Нормальной называется квадратная матрица $A$, для которой $AA^T = A^T A$.

Конечное поле, состоящее из $q$ элементов, где $q$ — степень простого числа, обозначается $\mathrm{GF}(q)$. Характеристика поля $F$ обозначается через $\mathrm{char}\, F$. Для целых чисел $m$ и $n$ через $(m, n)$ обозначается их наибольший общий делитель.

**2. Конфигурации в (0,1)-матрицах.** Терм-рангом (0,1)-матрицы размера $m \times n$ называется максимальное число $\rho(A)$ единиц в $A$, которые можно выбрать так, чтобы никакие две из них не лежали в одной строке или одном столбце (другими словами, не лежали на одной линии). Если $A$ квадратна и $\rho(A) = n$, то множество мест, на которых лежат такие единицы, называется положительной диагональю $A$. По теореме Кёнига терм-ранг матрицы совпадает с минимальным числом линий, на которых расположены все ее единицы. Терм-ранг представляет собой интересную комбинаторную характеристику. Он был введен в 60-е гг. Райзером. Класс $\mathfrak{A}(R, S; m, n) = \mathfrak{A}(R, S)$ характеризуется максимальной $\bar{\rho}(R, S)$ и минимальной $\tilde{\rho}(R, S)$ величинами терм-ранга. В [74] получен простой вывод известной формулы Райзера

$$\bar{\rho}(R, S) = \min\{t_{kl} + k + l : k = 0, 1, \ldots, m;\ l = 0, 1, \ldots, n\},$$

где

$$t_{kl}=kl+\sum_{i>k} r_i-\sum_{j\leqslant l} s_j.$$

В [71] выводится формула также для минимального терм-ранга, упрощающая формулу, полученную в 1963 г. Хабером (Haber R. M.):

$$\tilde{\rho}(R, S)=\min\{e+f:\varphi(e, f)>t_{ef},\ 0\leqslant e\leqslant m,\ 0\leqslant f\leqslant n\},$$

где

$$\varphi(e, f)=\min\{t_{k_1,f+l_2}+t_{e+k_2,l_1}+(e-k_1)(f-l_1)\}$$

и минимум берется по всем целым числам $k_1$, $k_2$, $l_1$, $l_2$ таким, что $0\leqslant k_1\leqslant e\leqslant e+k_2\leqslant m$, $0\leqslant l_1\leqslant f\leqslant f+l_2\leqslant n$.

Пусть $A\in\mathfrak{A}(R, S)$ — квадратная матрица порядка $n$; через $A(i, j)$ обозначается подматрица, полученная из $A$ вычеркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца. Матрица $A$ называется матрицей с полным носителем, если для любых $i$, $j$ с $a_{ij}=1$ справедливо $\rho(A(i, j))=n-1$. Матрицы с полным носителем интересны потому, что они соответствуют дважды стохастическим матрицам с тем же расположением нулей, что и в $A$. В [68] получена характеристика (0,1)-матриц с полным носителем при условии $r_1\geqslant\ldots\geqslant r_n\geqslant 2$, $s_1\geqslant\ldots\geqslant s_n\geqslant 2$, а именно доказывается равносильность следующих условий:

а) в $\mathfrak{A}(R, S)$ есть матрица с полным носителем;

б) в $\mathfrak{A}(R, S)$ найдется вполне неразложимая матрица;

в) $t_{kl}\geqslant 0$, $t_{kl}+k+l\geqslant n$ для $k,l=0, 1, \ldots, n$, с равенством лишь в том случае, когда $k=0$ или $l=0$. Отсюда получается аналогичная характеристика также для (0,1)-матриц произвольных классов.

При изучении взаимосвязи между матрицами одного и того же класса оказывается полезным рассмотрение операций над матрицами, не выводящих за пределы класса. Такими операциями являются, например, перестановки строк, столбцов, а также введенная Райзером операция «замены», заключающаяся в переходе от матрицы $A$, содержащей подматрицу вида $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, к матрице $B$, содержащей на пересечении тех же строк и столбцов подматрицу $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ (и обратно). Известно, что если $A$, $B\in\mathfrak{A}(R, S)$, то от $A$ к $B$ можно перейти с помощью последовательности замен. В [73] изучалась структура класса $\mathfrak{A}(R, S)$ с точки зрения близости, устанавливаемой с помощью операций замены. А именно, строился граф $G(R, S)$, вершинами которого служили матрицы из $\mathfrak{A}(R, S)$, а ребрами соединялись матрицы, получающиеся одна из другой с помощью некоторой замены. Назовем инвариантным местом для класса (0,1)-матриц $\mathfrak{A}(R, S)$ такое место $(i, j)$, что для всех матриц $A=(a_{kl})\in\mathfrak{A}(R, S)$ $a_{ij}$ принимает одно и то же значение. В [73] были охарактеризованы классы $\mathfrak{A}(R, S)$ с графами $G(R, S)$, имеющими диаметр 2. Кроме того, была дана следующая характеристика классов с двудольными $G(R, S)$ (при отсутствии инвариантных мест). Эквивалентны следующие условия:

а) $G(R, S)$ двудолен,

б) $G(R, S)$ не имеет треугольников,

в) $m=n$ и $R=S=(1, \ldots, 1)$ или $R=S=(n-1, \ldots, n-1)$. Понятие инвариантного места было обобщено до понятия инвариантного множества класса $\mathfrak{A}(R, S; m, n)$: пусть $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $A[I, J]$ — подматрица матрицы $A$, определенная пересечениями строк с индексами из $I$ и столбцов с индексами из $J$, $\sigma(A)$ — число единиц в матрице $A$; $I \times J$ называется инвариантным множеством в $\mathfrak{A}(R, S)$, если $\sigma(A[I, J]) = \sigma(B[I, J])$ для любых $A$, $B$ из этого класса. В [76] доказывается, что если непустой класс $\mathfrak{A}(R, S)$ имеет инвариантное множество $I \times J$, где $I$, $J$ — собственные непустые подмножества индексов, то он имеет также инвариантное множество, состоящее из одного элемента. В более широком контексте целочисленных матриц с заданными строчными и столбцевыми суммами и ограничениями на величину элементов инвариантные места изучались в [47].

В [46] была обобщена операция замены. Пусть $A, B \in \mathfrak{A}(R, S)$ и предположим, что на пересечениях трех каких-либо строк и столбцов с одинаковыми индексами в $A$ и $B$ стоят матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, соответственно; скажем тогда, что $A$ и $B$ получаются одна из другой операцией треугольной замены. Пусть $U=(u_{ij})$ — матрица размера $m \times n$ с целыми положительными элементами. Определим $\mathfrak{A}_U(R, S)$ ($\mathfrak{A}^U(R, S)$) как совокупность целочисленных матриц $A=(a_{ij})$ с вектором строчных сумм $R$ и вектором столбцевых сумм $S$, удовлетворяющих условию $A \geqslant U$ ($A \leqslant U$); неравенства для матриц понимаются в смысле поэлементного сравнения. Для матрицы $P$ размера $m \times n$, имеющей не более одной единицы в столбце, в [46] доказывается, что любые две матрицы из $\mathfrak{A}_P(R, S)$ могут быть переведены одна в другую последовательностью операций, состоящей из обычных и треугольных замен, не выходя за пределы этого класса. Дальнейшее обобщение понятия замены находим в [47], где классы матриц $\mathfrak{A}^U(R, S)$ представляются как максимальные целочисленные потоки в некоторой сети с пропускными способностями, зависящими от $R$, $S$ и $U$. Рассматривая, как обобщение операции замены, переход от одной сети к другой с помощью некоторого «дополняющего» цикла, автор получает ряд результатов о близости двух матриц $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ в $\mathfrak{A}^U(R, S)$ в смысле расстояния, определяемого суммой $\sum_{i,j} |a_{ij}-b_{ij}|$ (для (0,1)-матриц это — расстояние

Хэмминга). Эти результаты обобщают как теорему Райзера о заменах, так и предыдущие результаты автора [46]. Они имеют применение для классификации графов с заданной последовательностью степеней.

Вопрос о существовании треугольных матриц (т. е. матриц $A=(a_{ij})$ с $a_{ij}=0$ при $i>j$) в классе квадратных (0,1)-матриц $\mathfrak{A}(R, S)$ рассматривался в [45]: если $r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_n$, $s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_n$, то для этого необходимо и достаточно, чтобы $r_i, s_i \leqslant n-i+1$, $1 \leqslant i < n$.

Классам $\mathfrak{A}(R, S)$, не содержащим некоторых конфигураций нулей и единиц, посвящены работы [43, 44], в которых обобщаются результаты Райзера о (0, 1)-матрицах, не содержащих конфигураций вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Определим $L_l$ как множество (0, 1)-матриц $C$ размера $i \times l$, $l \geqslant 2$, таких, что $CC^T > 0$, но $BB^T > 0$ не выполняется для любой матрицы $B$, получающейся из $C$ удалением столбцов. Доказывается, что если $A$ — (0, 1)-матрица размера $m \times n$ со столбцевыми суммами, не меньшими 2, и не содержащая в столбцах с суммами, не превосходящими $i$, матриц вида $(J_{i,1} \vdots C)$, где $C \in L_l$, то $n \leqslant \binom{m}{2}$. Изучен подробно «критический» случай $n = \binom{m}{2}$.

В связи с задачей построения расписаний движения автобусов, в [34] рассматривались (0,1)-матрицы с заданными столбцевыми суммами и некоторыми заданными типами строк (например, со строками, содержащими одинаковое число единиц, идущих все подряд). Для решения вопроса о существовании таких матриц был использован аппарат многочленов с целочисленными коэффициентами.

Интересная конструкция для квадратных (0,1)-матриц $A$ рассматривается в [75]. С $A$ связывается гиперграф $DH(A)$, называемый диагональным гиперграфом: вершинами в нем служат единицы $A$, а ребрами — положительные диагонали. Изоморфизм $DH(A) \cong DH(B)$ для заданных $A$, $B$ — такое взаимно однозначное соответствие $\varphi$ между множествами мест в $A$ и $B$, где стоят единицы, что $D$ — положительная диагональ в $A$ тогда и только тогда, когда $\varphi(D)$ имеет то же свойство в $B$. Имеется два типа отображений $A$, приводящих к матрице $B$, для которой $DH(A) \cong DH(B)$: 1) перестановки строк и столбцов; 2) транспонирование некоторой подматрицы при неподвижности остальных элементов. Существует предположение о том, что любое отображение $\varphi: A \to B$ «положительных» мест в матрице $A$, для которого $DH(A) \cong DH(B)$, получается с помощью последовательности этих отображений. В [75] получен результат в направлении этой гипотезы, касающийся случая, когда при $\varphi: A \to B$ таком, что $DH(A) \cong DH(B)$, некоторое фиксированное множество положительных мест $A$ переходит в такое же множество мест для $B$, лежащих на одной линии.

О существовании матриц в $\mathfrak{A}(R, S)$ с различными свойствами см. также [42, 70, 210].

3. **Матрицы инцидентности блок-схемы.** Ряд работ в том же круге проблем существования (0,1)-матриц был связан с вопросами существования матриц инцидентности блок-схем. Как известно, для матриц инцидентности $A$ блок-схем с параметрами $b, v, r, k, \lambda$ выполнено основное матричное уравнение

$$A^T A = (r - \lambda) I_v + \lambda J_v. \qquad (1)$$

Обратно, если (0, 1)-матрица $A$ удовлетворяет (1), а также уравнению

$$A J_v = k J_{b,v}, \qquad (2)'$$

то существует блок-схема с параметрами $b, v, r, k, \lambda$. При $b = v$, т. е. в случае симметричных схем критерием существования является разрешимость в квадратных (0, 1)-матрицах уравнений

$$A A^T = (k - \lambda) I_v + \lambda J_v, \qquad (1)'$$

$$A J_v = k J_v. \qquad (2)'$$

Понятен поэтому интерес к изучению матричных уравнений вида

$$A A^T = B, \qquad (3)$$

где $B$ — целочисленная неотрицательная симметрическая матрица. Если решение $A$ уравнения (3) существует, то $B$ называется реализуемой. Наиболее интересные результаты в связи с уравнениями $(1)'$ и (3) были получены в [203, 239, 240].

В [203] рассматривается более общее, чем $(1)'$, уравнение

$$Z E Z^T = D + \lambda J \qquad (1)''$$

для невырожденной бинарной (т. е. на двух элементах $x, y$) матрицы $Z$ порядка $n$ над полем $F$, при этом $E = [e_1, \ldots, e_n]$, $D = [d_1, \ldots, d_n]$ — диагональные матрицы порядка $n$ над $F$, $\lambda \in F$. В этой ситуации получен следующий результат: если $c_i$ — $i$-я строчная сумма $Z$, то для любого $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, справедливо соотношение

$$\lambda (1 + \lambda w) \{c_i - (x + y)\}^2 - t (1 + \lambda w)(x + y) \{c_i - (x + y)\} + t^2 \left(xyw + \frac{1}{e_i}\right) = 0,$$

где $w = 1/d_1 + \cdots + 1/d_n$, $t = \lambda(n-1) - (e_1 + \cdots + e_n) xy$. Из этой весьма общей теоремы вытекают многие частные результаты о матрицах инцидентности блок-схем, полученные ранее. Интересны некоторые ее следствия.

а) Если $E$ — скалярная матрица, $x \neq y$, $\lambda \neq 0$, то либо все столбцевые суммы $Z$ равны, либо существуют две такие суммы $c_1, c_2$ и для них $c_1+c_2=\frac{x+y}{\lambda}(t+2\lambda)$. Если столбцевые суммы у $Z$ одинаковы и $t \neq 0$, то одинаковы также строчные суммы и $D$ — скалярная матрица.

б) Если $\{x, y\}=\{0, 1\}$ и $\lambda=0$, то все строчные и столбцевые суммы $Z$ равны 1, т. е. $Z$ — матрица перестановки (при $\operatorname{char} F=0$).

в) Если $\{x, y\}=\{-1, 1\}$ и $\lambda=0$, то $ZZ^T=Z^TZ=nI_n$, т. е. $Z$ — матрица Адамара (при $\operatorname{char} F=0$).

В [239, 240] рассматривается интересный вопрос о существовании рациональной матрицы $A$ порядка $n$, реализующей целочисленную матрицу $B$, если известно, что существует целочисленная матрица размера $n\times r$, где $r<n$, удовлетворяющая (3). Получены результаты, которые в применении к матрицам инцидентности блок-схем можно считать близкими к окончательным. Так, в [240] с помощью результатов Кнезера о числе классов квадратичной формы автор доказывает:

а) Если существует рациональная матрица $Y$ размера $n\times r$, для которой выполнено (3) и $r\leqslant 7$, то существует целочисленная матрица $A$ того же размера, удовлетворяющая (3).

б) При тех же предположениях, но при $r\leqslant 16$, существует такая рациональная матрица $A$, удовлетворяющая (3), что $2A$ — целочисленная матрица размера $n\times r$.

Применяя эти результаты к матрицам инцидентности блок-схем, автор получает, что если $X$ — (0,1)-матрица размера $(v-r)\times v$, $r\leqslant 7$, такая, что $XX^T=(k-\lambda)I_{v-r}+J_{v-r}$, где $\lambda(v-1)=k(k-1)$ и $\lambda$, $k$, $v$ таковы, что удовлетворяются известные необходимые условия Брука — Райзера — Човла существования симметричных блок-схем с параметрами $v$, $k$, $\lambda$, то $X$ можно расширить до (0,1)-матрицы $A$, удовлетворяющей (1)′. Тем самым улучшен результат М. Холла — аналогичное утверждение при $r\leqslant 4$. Более того, как отметил М. Холл, в этой ситуации $r\leqslant 7$ — неулучшаемая граница. В [240] доказывается также, что при $v$, $k$, $\lambda$, удовлетворяющих упомянутым необходимым условиям для симметричных блок-схем, существует рациональное нормальное решение $A$ уравнения (1)′ с элементами, имеющими в знаменателях лишь степени 2.

В [67, 242] изучались циркулянтные решения нескольких иных матричных уравнений с правыми частями, как в (1), а именно, с левыми частями — некоторыми многочленами от $A$. Полученные результаты также связаны с проблемами существования блок-схем, разностных множеств и сильно регулярных графов. Содержательный обзор результатов об уравнении (1)′ для целочисленных матриц и некоторых его обобщениях дан в [204]. Матрицы инцидентности конечных проективных плоскостей рассматривались в [206] и [168]. В первой из них получены результаты по вычислению минимальных весов Хэмминга для пространств, натянутых на строки матрицы инцидентности $C$ плоскости порядка $n$ и ее дополнения $D$. В [168] приводится полный список из 46 характеристических многочленов матриц инцидентности плоскостей порядка 2. Определители (0,1)-матриц с одинаковыми строчными суммами и одинаковыми скалярными произведениями строк и столбцов рассматриваются в [50].

## § 2. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ (0,1)-МАТРИЦ

**1. Покрытия, глубина.** Одной из наиболее известных экстремальных является задача об $\alpha$-глубине (0,1)-матрицы, эквивалентная задача об $\alpha$-кратном покрытии для семейства подмножеств, покрывающих конечное множество. $\alpha$-глубиной $\varepsilon_\alpha(A)$ (0,1)-матрицы $A$ со столбцевыми суммами, не меньшими заданного натурального числа $\alpha$, называется такое минимальное число строк в $A$, что в образованной ими подматрице сумма элементов в каждом столбце не меньше $\alpha$. При $\alpha=1$ мы говорим просто о глубине матрицы $A$ и обозначаем ее через $\varepsilon(A)$. Задача об определении $\alpha$-глубины достаточно сложна. Для получения оценок $\alpha$-глубины матрица $A$ обычно рассматривается вместе с множеством $\mathfrak{A}$ других матриц того же размера, имеющих некоторые общие с $A$ параметры. Например, в качестве $\mathfrak{A}$ часто берется класс Райзера $\mathfrak{A}(R, S; M, N)$, в который входит $A$. Максимальная $\alpha$-глубина матрицы из $\mathfrak{A}$ обозначается через $\bar{\varepsilon}_\alpha(\mathfrak{A})$. В случае $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(m, n, N)$ ($\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(\leqslant m, \geqslant n, M, N)$) максимальная глубина $\bar{\varepsilon}(\mathfrak{A})$ обозначается также $\bar{\varepsilon}(m, n, N)$ ($\bar{\varepsilon}(\leqslant m, \geqslant n, M, N)$); при $M=N$ и $m=n$ соответствующее обозначение — $\bar{\varepsilon}(n, N)$.

Достаточно общие совокупности $\mathfrak{A}$ рассматриваются в работах [14, 16, 32]. Основной итог этих работ можно сформулировать следующим образом: во многих классах (0,1)-матриц большинство матриц имеет $\alpha$-глубину, близкую к максимальной. В [14] это показано для множества $\mathfrak{A}(*, k; M, N)$, состоящего из матриц размера $M\times N$ со столбцевыми суммами, равными $k$, при том условии, что $k/N\to 0$, если $N\to\infty$, а также при некоторых ограничениях на последовательности $M=M(N)$ и $\alpha=\alpha(N)$. В [16] этот результат дополняется не исследованным в [14] случаем, а именно, доказывается

Теорема. Пусть выполнено либо условие

а) $k/N\to c_0$, $N\to\infty$, где $c_0$ — константа, $0<c_0<1$, и при этом $\alpha/N\to 0$, $\ln\ln N/\ln M\to 0$, $\ln M/N\to 0$, либо условие

б) $k/N\to 1$, $N\to\infty$ и при этом $\alpha/N-k\to 0$, $\ln\ln N/\ln M\to 0$, $\ln M/\ln\frac{N}{N-k}\to\infty$, $\ln M/(N-k)\ln\frac{N}{N-k}\to 0$. Пусть также существует константа $c'>0$ такая, что $\alpha\leqslant c'\ln M$ при достаточно больших $N$. Тогда почти для всех (в обычном смысле) матриц $A \in \mathfrak{A}(*, k; M, N)$

$$\varepsilon_\alpha(A) \sim \bar{\varepsilon}_\alpha(\mathfrak{A})$$

при $N \to \infty$.

Эти результаты еще более подчеркивают актуальность изучения максимальной глубины матриц заданного класса, а также алгоритмов для нахождения покрытия, ориентированных на «наихудший» случай.

В [31] изучались максимальные глубины классов $\mathfrak{A}(m, n, N)$ при небольших значениях $m$ или $n$. Доказывается, что $\bar{\varepsilon}(m, 2, N) = [2N/(m+1)]$. Этот результат представляет интерес также в связи с тем, что дает пример классов, для которых достижима известная оценка сверху максимальной глубины класса $\mathfrak{A}(\leqslant m, \geqslant n, M, N)$:

$$\bar{\varepsilon}(\mathfrak{A}) \leqslant M\left\{1-(m-N/M)\frac{(m-n)!\,(n-1)^{m-1}}{\pi_{m-1}}\right\},$$

где $\pi_{m-1} = (2n-1)(3n-2)\ldots(mn-m+1)$.

Для класса $\mathfrak{A}(3, n, N)$ получены там же следующие оценки:

$$\bar{\varepsilon}(3, n, N) \leqslant \begin{cases} \left[\dfrac{5n-4}{3(3n-2)}N\right], & n \text{ четно}, \\ \left[\dfrac{5n-3}{3(3n-1)}N\right], & n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Для $\mathfrak{A}(4, n, N)$ —

$$\bar{\varepsilon}(4, n, N) \leqslant \begin{cases} \left(1-\dfrac{(5n-3)^2-1}{4(3n-2)(4n-3)}\right)N, & n \text{ четно}, \\ \left(1-\dfrac{(5n-2)^2+n-4}{4(3n-1)(4n-3)}\right)N, & n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Из этих результатов при частных значениях $n=3$ и 4 получается ряд результатов Хендерсона (Henderson J. R.) и Дина (Dean R. A.).

В [4] приводится оценка сверху для $\alpha$-глубины (0,1)-матрицы размера $M \times N$, определяемой некоторыми условиями на столбцы, принадлежащие строкам, содержащим более $q-1$ единиц для натурального числа $q$, $0 < q \leqslant N$. В той же работе получены оценки для мощности минимального множества в известной задаче О. Б. Лупанова о прокалывании $k$-мерных граней $n$-мерного единичного куба при $k=3$. В [52] приведены две нижние границы мощности минимального покрытия, совпадающие при сравнительно слабых ограничениях.

Хорошо известно, что к задаче о глубине (0,1)-матрицы приводят различные задачи дискретной математики, в том числе задачи об оценках структурных констант графов таких, как число доминирования, числа внутренней и внешней устойчивости, числа вершинного и реберного покрытия. Пусть $\gamma(G)$ — число доминирования графа $G$, т. е. минимальная мощность такого множества $D$ вершин графа, что в любую вершину, не принадлежащую $D$, входит дуга, начало которой есть вершина из $D$. В [30] доказывается, что: а) $\gamma(G)=\varepsilon(A+I_N)$, где $A$ — матрица смежности графа без петель $G$ на $N$ вершинах; б) для регулярных ориентированных графов без петель максимум чисел доминирования по всем графам с $N$ вершинами и степени регулярности $n$ равен $\bar{\varepsilon}(n+1,N)$. Отсюда и из известных оценок максимальной глубины класса $\mathfrak{A}(4,N)$ следует, например, что для кубических регулярных графов на $N$ вершинах $\gamma(G)\leqslant\leqslant(29/65)N$. Оценкам параметров графов посвящены работы [116, 60, 61]. В [116] для графов с $N$ вершинами и $M$ ребрами выводится оценка сверху числа $\alpha(G)$ внутренней устойчивости:

$$\alpha(G)\leqslant\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+N^2-N-2M}\right]:$$

при этом для любой пары $M,N$ с $M\leqslant N(N-1)/2$ существует такой $G$, для которого эта верхняя граница достигается. В [60], наряду с числом доминирования $\gamma(G)$ графа $G$, рассматривается независимое число доминирования $i(G)$, равное минимальной мощности максимального независимого множества вершин, и число избыточности $ir(G)$, равное минимальной мощности максимального неизбыточного множества вершин $G$ (вершина $x$ в подмножестве $X$ вершин графа избыточна, если ее замкнутая окрестность содержится в объединении замкнутых окрестностей вершин $X-\{x\}$; множество $X$ неизбыточно, если не содержит избыточных вершин). Легко видеть, что $ir(G)\leqslant\leqslant\gamma(G)\leqslant i(G)$. Доказывается, что для любого $G$ $ir(G)>\gamma(G)/2$, а также выводится достаточное условие для $ir(G)=\gamma(G)$. Если $G$ не содержит подграфов, изоморфных двудольному графу $K_{1,k+1}$ $(k\geqslant2)$, то $i(G)\leqslant\gamma(G)(k-1)-(k-2)$. Для графов $G$ без изолированных вершин с $|G|=p$ устанавливается соотношение:

$$i(G)\leqslant p-\gamma(G)+1-[(p-\gamma(G))/\gamma(G)];$$

эта граница достигается для графа с $p$ вершинами и $\gamma(G)\leqslant\leqslant[p/2]$. Связям между числом реберного покрытия $\alpha_0(G)$ и числом ребер $e(G)$ для $r$-графов (т. е. гиперграфов, у которых каждое ребро содержит $r$ вершин) посвящена работа [61]. Дается оценка

$$e(G)\geqslant\left[\frac{r\alpha_0+r-3}{r-1}\right]$$

для связного $r$-графа $G$. В частности, для обычного связного графа отсюда следует, что $\alpha_0(G)\leqslant(e(C)+1)/2$. Отметим, что в [31] для регулярного степени $n$ графа выводится оценка $\alpha_0(G)\leqslant2e(G)/(n+1)$.

**2. Покрытия $t$-множеств $k$-множествами.** Интересным частным видом задачи о покрытии является задача о покрытии всех $t$-подмножеств $v$-множества при помощи $k$-подмножеств, где $t \leqslant k \leqslant v$. Под этим понимается определение мощности $N(t, k, v)$ минимального такого набора $k$-подмножеств $v$-множества, чтобы любое $t$-подмножество содержалось по меньшей мере в одном из подмножеств этого набора. Если вместо последнего потребовать, чтобы любое $t$-подмножество содержалось по меньшей мере в $\lambda$ подмножествах набора, то приходим к понятию минимального $\lambda$-покрытия. Соответствующие числа $N(t, k, v)$, $N_\lambda(t, k, v)$ называются мощностями (или числами) минимального покрытия (минимального $\lambda$-покрытия). Для этих чисел известны оценки сверху и снизу, а также частные значения, в основном при малых значениях $t$, $k$. В последние годы получены также асимптотические оценки (см. [14, 15]). Заметим, что результаты в этих работах формулируются на языке покрытия вершин $t$-го слоя единичного $v$-мерного куба вершинами $k$-го слоя. Известны также формулировки подобных результатов на языке гиперграфов. Однако их перевод на более принятый язык подмножеств не составляет никакого труда. Из асимптотических результатов в [15] отметим следующие:

Пусть $t \geqslant 2$, $v \geqslant (t-s)k$, где $t=t(n)$ и $s=s(n)$ таковы, что $t(n) \to \infty$, $s(n)/t(n) \to 0$ при $v \to \infty$. Тогда $N(t, v-k, v) \sim t$ для достаточно больших $v$.

2) Пусть функция $\varphi(v)$ такова, что $\varphi(v) \geqslant 1$ и растет при $v \to \infty$ не быстрее, чем $v$. Тогда существуют такие $k_0(v)$ и $t_0(v)$, что рост отношения величин $N(t_0(v), k_0(v), v) \times \times \binom{k_0}{t_0} \Big/ \binom{v}{t_0}$ и $\varphi(v)$, а также обратного отношения ограничен двумя абсолютными константами.

В этой же работе получены следующие результаты, которые можно рассматривать как обобщение известной теоремы Турана:

а) если $(t+1)k > v \geqslant (t+1)k - [k/2]$, то $N(t, v-k, v) = t+2$;

б) если $t \geqslant 2$ и $(t+1)k - [k/2] > v \geqslant (t+1)k - [2k/3]$, то $N(t, v-k, v) = t+3$.

Большинство других результатов по изучению чисел $N_\lambda(t, k, v)$ получено для небольших значений $t$, $k$. Покрытия пар (случай $t=2$) рассматривались в [88, 213, 58]. В [213] показано, что при $\alpha = k/v \geqslant 1/2$ $N(2, k, v)$ есть $f(\alpha)$-функция лишь от $\alpha$:

$$f(\alpha) = \begin{cases} 3, & 2/3 \leqslant \alpha < 1, \\ 4, & 3/5 \leqslant \alpha < 2/3, \\ 5, & 5/9 \leqslant \alpha < 3/5, \\ 6, & 1/2 \leqslant \alpha < 5/9, \end{cases}$$

(значения $f(\alpha)$ при $3/5 \leqslant \alpha < 1$ были известны ранее). При $\alpha < 1/2$ $N(2, k, v)$ уже не монотонна, однако имеет место следующий результат: Для любых $k_0$, $v_0$ и $\varepsilon>0$ существует такое $V=V(\varepsilon, k_0)$, что для всех $v\geqslant V$ и $k$ из $k/v\geqslant k_0v_0+\varepsilon$ следует, что $N(2, k, v)\leqslant N(2, k_0, v_0)$. Там же показано, что $N(2, 3k+1{,}7k+2)\geqslant 8$ для любого $k\geqslant 1$. $\lambda$-покрытия пар тройками с повторяющимися элементами изучались в [58]. В стоящей несколько особняком работе [88] строится матрица инцидентности «пары—тройки» для покрытия пар тройками и рассматривается ранг этой матрицы $A$ над конечным полем $\mathrm{GF}(p)$, называемый $p$-рангом $A$. Приводятся оценки снизу этого ранга и построение, дающее покрытие с заданной величиной $p$-ранга для каждого его возможного значения.

Новым для рассматриваемой задачи в последние годы явилось рассмотрение упорядоченных покрытий, т. е. таких упорядоченных $k$-выборок (с повторением или без), в которых встречаются все упорядоченные $t$-выборки (порядок $t$-выборки «индуцируется» порядком $k$-выборки). В [217, 218] получены первоначальные результаты в этом направлении, касающиеся, главным образом, различного типа покрытий пар тройками и четверками.

Покрытия 3-множеств (случай $t=3$) изучаются в [223, 232]. В первой из них разбирается не до конца исследованный случай $t=3$, $k=4$. Пусть $L(t, k, v)=\left\lceil \frac{v}{k}\left\lceil \frac{v-1}{k-1}\left\lceil \ldots \right\rceil\right\rceil\right\rceil$; доказывается, что для бесконечного числа значений $v$ с $v\equiv 7 \pmod{12}$ число $N(3, 4, v)$ не превосходит $L(3, 4, v)$ более чем на единицу. В [232] доказывается, что $N(3, k, 2k-1)=14$ при $k\geqslant 15$, и найдены точные значения этой величины для $k=4, 5, 6, 7$; в интервале изменения $k$ от 8до 14 $N(3, k, 2k-1)$, как показано, равняется 13 или 14.

Различные модификации задачи о минимальном $\lambda$-покрытии рассматриваются в [221, 222]. В первой из них при $t\leqslant k\leqslant v$, $t\leqslant m\leqslant v$ исследуются $[t, k, m, v]$-покрытия, т. е. такие семейства $k$-подмножеств $v$-множества, что мощность пересечения каждого $m$-подмножества хотя бы с одним членом этого семейства не меньше, чем $t$. Приводится таблица значений мощностей минимальных $[t, k, m, v]$-покрытий для $v\leqslant 16$, найденных с помощью ЭВМ. Во второй рассматриваются минимальные $\lambda$-покрытия $t$-подмножеств подмножествами произвольной мощности; соответствующие числа минимальных покрытий обозначаются $N_\lambda(t, v)$. Приводятся таблицы $N_\lambda(t, v)$ для $\lambda=1$ и $v\leqslant 12$. Доказывается, что

$$N_1(v-4, v)=\begin{cases} 1+\binom{v-1}{4}, & v\equiv 2, 4, 6 \pmod 6,\\ \binom{v-1}{4}-(v-1)(v-6)/6, & v\equiv 1, 3 \pmod 6,\\ \binom{v-1}{4}-(v^2-12v-38)/6, & v\equiv 5 \pmod 6.\end{cases}$$

Если для $v$-множества рассмотреть матрицу инцидентности $A_{k,t}$ «$k$-множества — $t$-множества», то $N(t, k, v)$, очевидно, равно $\varepsilon(A_{k,t})$. Ширина матрицы $A_{k,t}$ (т. е. величина $\varepsilon(A_{k,t}^T)$) называется «числом Турана» и обозначается через $T(t, k, v)$. В [91] исследуются числа $T(4, 6, v)$; доказывается, в частности, что $T(4, 6, 9)=12$, $T(4, 6, 10)=20$. Исследование одного предположения Турана, касающегося построения системы из $T(3, k, v)$ троек такой, что для любого $k$-подмножества найдется содержащаяся в нем тройка из этой системы, проводится в [182] где это предположение опровергается для случая $k>3$, $v=2k-1$.

**3. Другие экстремальные задачи.** Обзор различных экстремальных задач, допускающих матричные формулировки, содержится в [53], где автором систематически используется язык гиперграфов. В [54] изучаются (0,1)-матрицы размера $m\times n$, не содержащие в качестве подматрицы циркулянта нечетного порядка с порождающим вектором $(110\ldots0)$ (понимаемые как матрицы инцидентности «ребра — вершины» гиперграфа $H$ на $n$-множестве вершин $X$ с $m$ ребрами). Такие матрицы $A$ называются сбалансированными. Пусть $\sigma(A)$ обозначает максимальное число попарно не пересекающихся трансверсальных множеств для ребер гиперграфа (множество вершин трансверсально, если имеет непустые пересечения с любым ребром); $s(A)$ пусть обозначает минимальное значение строчной суммы. Ясно, что $\sigma(A)\leqslant s(A)$. Через $A_Y$ для $Y\subseteq X$ обозначается матрица, составленная из столбцов, соответствующих вершинам из $Y$, и тех строк, пересечения которых с этими столбцами — ненулевые. Рассматриваются частичные гиперграфы, получаемые из $H$ удалением нескольких ребер и тех вершин, которые становятся тогда изолированными. Скажем, что $A$ (или гиперграф $H$) имеет свойство $(G)$, если $\sigma(A_Y)=s(A_Y)$ для любого $Y\subseteq X$. Доказывается, что свойство сбалансированности $A$ равносильно тому, что матрица каждого частичного гиперграфа для $H$ обладает свойством $(G)$. В той же работе получен ряд других, в том числе минимаксных, характеристик сбалансированных гиперграфов.

Трансверсали семейств подмножеств в связи с (0,1)-матрицами рассматриваются в [146, 86]. В первой из них классическая теорема Кёнига обобщается на бесконечный случай: она справедлива для (0,1)-матриц, содержащих на каждой линии лишь конечное число единиц. Во второй дается матричный критерий существования общей трансверсали для нескольких семейств конечных множеств. Более обобщенно трактуются трансверсали в [38], где получены критерии существования «взвешенных» трансверсалей для системы счетных подмножеств.

В [176] рассматривалась известная проблема Царанкевича: определить такое наименьшее число $z(m, n; s, t)$, что каждая (0,1)-матрица размера $m\times n$, содержащая $z(m, n; s, t)$ единиц, имеет своей подматрицей $J_{s,t}$. Получен следующий асимптотический результат:

$$\lim z(n, n; 2, k)\, n^{-3/2}=(k-1)^{1/2};$$

этот результат обобщает некоторые известные оценки. Близкая к этой задача изучается в [118]: определить такое наибольшее натуральное число $t(m, n, s)$, что произвольная матрица размера $m\times n$ содержит подматрицу размера $s\times t$, столбцы которой только нулевые или только единичные. Доказывается, что

1) Если $m\equiv 1 \pmod 2$, то $t(m, s, n)=t(m+1, n, s)=$ $=\left[2n\binom{(m+1)/2}{s}\Big/\binom{m+1}{s}\right]$ для $s\leqslant(m+1)/2$ и произвольного $n$.

2) Пусть $L(m, s)=\lim\limits_{n\to\infty} t(m, s, n)/n$. Тогда

$$L(m, s)=L(m+1, s)=\frac{1}{2^{s-1}}\prod_{i=1}^{s-1}\frac{m+1-2i}{m+1-i}.$$

3) Для $n\leqslant\log_2 m$, $[m/2^n]<s\leqslant[m/2]$ справедливо

$$n+\left[\log_2\left(\frac{1}{s}\left[\frac{m}{2^n}\right]\right)\right]\leqslant t(m, n, s)\leqslant n+\left[\log_2\left(\frac{1}{s}\left[\frac{m}{2^n}\right]\right)\right].$$

Кроме того, в предположении справедливости известной гипотезы о существовании матриц Адамара, даются формулы для $t(m, n, 2)$ и $t(m, n, 3)$.

Пусть $g(m, n)$ обозначает максимальное число строк в (0, 1)-матрице с $n$ столбцами и со строчными суммами, равными $m$, имеющей ранг не больше $n-1$ над любым полем нулевой характеристики. Функция $g(m, n)$, имеющая применение в теории информации, была известна лишь при $1\leqslant m\leqslant\sqrt{n-2}$ и $n-\sqrt{n-2}\leqslant m\leqslant n-1$. В [185] она определяется полностью: если $1\leqslant m\leqslant n-1$, то

$$g(m, n)=\begin{cases}\binom{n-1}{m}, & \text{если } m<n/2,\\ 2\binom{n-2}{(n-2)/2}, & \text{если } n\equiv 0 \pmod 2,\ m=n/2,\\ \binom{n-1}{m-1}, & \text{если } m>n/2.\end{cases}$$

Задача на максимум, связанная с суммами элементов квадрата (0, 1)-матрицы, решается в [37]. Пусть $\Sigma(A)=\sum\limits_{i,j} a_{ij}$ для матрицы $A=(a_{ij})$, $R(A)$ — множество матриц, получающихся из $A$ всевозможными перестановками ее элементов; для (0,1)-матрицы $A$ находятся четыре ее перестановки, для которых может достигаться $\max\Sigma(C^2)$, $C\in R(A)$, и указывается правило для выбора нужной матрицы из этих четырех. Отметим еще работу

[233], где решается задача о нахождении минимального числа столбцов в матрице с целыми положительными элементами, дающей все возможные комбинации натуральных чисел, меньших заданного числа $n$, в какой-либо строке; эта задача связана с проблемой нахождения 1-факторов графа.

## § 3. ВОПРОСЫ КЛАССИФИКАЦИИ (0,1)-МАТРИЦ И ГРАФОВ

Во многих задачах дискретной математики представляют интерес свойства (0,1)-матриц, инвариантные относительно перестановок ее строк и столбцов. Таковы, в частности, многие задачи теории графов (как известно, граф может быть представлен (0,1)-матрицами смежности или инцидентности). В этих случаях естественно считать две (0,1)-матрицы $A$ и $B$ размера $m \times n$ эквивалентными (обозначение $A \sim B$), если $B$ перестановками строк и столбцов можно обратить в $A$. При этом возникает проблема классификации (0,1)-матриц относительно этой эквивалентности. Попарно эквивалентные матрицы объединяются в один класс эквивалентности. Ясно, что у матриц одного класса наборы строчных и наборы столбцевых сумм совпадают, поэтому равенство этих наборов следует считать первым шагом такой классификации и действовать далее в пределах семейств матриц с одинаковыми с точностью до перестановки векторами строчных и столбцевых сумм. Обозначим через $\mathcal{A}(R, S; m, n)$ (или просто $\mathcal{A}(R, S)$) такую совокупность (0,1)-матриц заданного размера $m \times n$, в которых вектор строчных сумм с точностью до перестановки компонент совпадает с заданным $m$-мерным вектором $R$, а вектор столбцевых сумм — с заданным $n$-мерным вектором $S$. Две матрицы $A$, $B$ из $\mathcal{A}(R, S; m, n)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие матрицы перестановки $P$ и $Q$ порядков $m$ и $n$, соответственно, что $P^{-1}AQ = B$. По аналогии с классификацией матриц над произвольным полем или коммутативным кольцом проблема классификации (0,1)-матриц из $\mathcal{A}(R, S)$ распадается на следующие задачи:

А) Нахождение представителей в каждом классе эквивалентности («канонических форм»).

Б) Критерий эквивалентности двух заданных матриц.

Далее, ввиду конечности числа матриц, возникают также следующие задачи:

В) Определение числа матриц в каждом классе эквивалентности.

Г) Подсчет числа классов эквивалентности и общего числа матриц в $\mathcal{A}(R, S)$.

Критерий эквивалентности (0,1)-матриц (или, что то же самое, изоморфизма гиперграфов) приводится в [29]. Он сводит задачу к рассмотрению подобия двух многомерных целочисленных матриц, построенных по заданным (0,1)-матрицам $A$,

$B\in\mathcal{A}(R, S)$. Это позволяет во многих случаях убедиться в их неэквивалентности и значительно сокращает перебор перестановок, которые могут перевести $A$ в $B$ в случае, если они эквивалентны. Дается его применение к задаче построения множеств попарно не эквивалентных матриц в $\mathcal{A}(R, K)$, где $K=(k, \ldots, k)$. Там же указывается нижняя граница для числа классов эквивалентности в $\mathcal{A}(R, K)$. Ряд классификационных задач решается в [30]. Автоморфизмом (0,1)-матрицы $A$ размера $m\times n$ называется пара $(P, Q)$ матриц перестановки порядков соответственно $m$ и $n$ со свойством $P^{-1}AQ=A$. Автоморфизмы $A$ образуют группу $G(A)$ всех автоморфизмов $A$. Ясно, что нахождение порядка этой группы дает ответ на задачу В) (см. выше). В [30] рассматривается вопрос о группе автоморфизмов $G(C)$ циркулянта $C$ порядка $n$. Доказывается, что $G(C)$ содержит группу диэдра порядка $2n$ в том и только том случае, когда порождающий вектор $C$ симметричен (т. е. совпадает с точностью до циклической перестановки с вектором, компоненты которого следуют в обратном порядке). Приводится также одно просто проверяемое условие совпадения $G(C)$ с группой диэдра. Результаты [30] вместе с критерием из [29] приводят фактически к полной классификации матриц из $\mathcal{A}(R, S; n, n)$, где $R=S=(2, \ldots, 2)$. Вопросы классификации для этой же совокупности рассматриваются также в [28]. В [243] на основе метода, развивающего идеи Райзера—Гейла, дается оценка снизу числа матриц в классе Райзера $\mathfrak{A}(R, S)$. В применении к классу квадратных матриц $\mathfrak{A}(K, K)=\mathcal{A}(K, K)$, $K=(k, \ldots, k)$, она приводит к неравенству:

$$|\mathcal{A}(K, K)|\geqslant(n!)^k/(k!)^n.$$

В [177] применяется иной принцип классификации. Пусть на элементах $\mathrm{GF}(q)$ действует группа подстановок $H$. На множестве матриц размера $m\times n$ над $\mathrm{GF}(q)$ вводится следующее отношение эквивалентности: $A=(a_{ij})$ эквивалентна $B=(b_{ij})$, если существует такая перестановка $\varphi\in H$, что $b_{ij}=\varphi(a_{ij})$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$. Соответственно определяется автоморфизм матрицы $A$. Изучаются вопросы классификации для случаев $H=S_q$ (симметрической группе на $q$ элементах) и $H$ — прямая сумма групп.

В ряде работ проблема изоморфизма графов и свойства, относящиеся к классам изоморфных графов, тесно связываются с перестановками их матриц смежности или инцидентности. Широкий спектр таких вопросов рассматривается в работе [72], носящей отчасти обзорный характер. В центре внимания здесь стоят связи между графами различных типов (неориентированными двудольными и ориентированными), которые ассоциируются с одной и той же (0,1)-матрицей, а также матричные критерии различных типов связности ориентированных графов и критерий вполне неразложимости (0,1)-матриц в терминах теории графов. Классификации графов посвящена также работа [209]. Пусть $A=(a_{ij})$ — матрица порядка $n \geqslant 2$, $G_1$, $G_2$ — неориентированные графы без петель на общем множестве вершин $\{1, \ldots, n\}$, $E(G_1)$, $E(G_2)$ — множества их ребер, $\bar{G}_1$ — граф, дополнительный к $G_1$. Скажем, что $G_1$ и $G_2$ находятся в отношении $L(A)$, если а) $\det A \neq 0$, б) $|E(G_1)| = |E(G_2)| \leqslant n(n-1)/2$, в) $a_{ir}a_{jp} - a_{ip}a_{jr} = 0$ для всех $(i, j) \in E(\bar{G}_1)$, $(r, p) \in E(G_2)$. Ставится вопрос: всякие ли графы, находящиеся в отношении $L(A)$, изоморфны? Доказывается, что если $G_1$ и $G_2$ находятся в отношении $L(A)$ и хотя бы один из них есть дерево с добавлением изолированных вершин, то $G_1$ и $G_2$ изоморфны.

Канонические формы для матриц инцидентности графа изучаются в [187]. Заданная матрица инцидентности упорядочивается лексикографически по строкам: считается, что $A_1$ превосходит $A_2$, если в ней найдется строка, превосходящая соответствующую строку $A_2$, а все предыдущие строки у них совпадают. Такое же упорядочение рассматривается и по столбцам. Выделяются максимальные матрицы инцидентности относительно этих упорядочений и изучаются вопросы построения максимальных матриц. Такие максимальные матрицы можно использовать для канонического представления графа (т. е. выделения представителя в классе изоморфизма). Утверждается, что в этом смысле предпочтительнее максимальные матрицы по столбцам, так как алгоритм их построения требует меньшего перебора, по сравнению с соответствующим алгоритмом для максимальных матриц по строкам.

О матрицах инцидентности для орграфов см. [57], о матрицах смежности для гиперграфов — [184].

## § 4. МАТРИЦЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

**1. Булевы матрицы. Целочисленные матрицы.** Во многих рассмотрениях используются различные алгебраические свойства (0,1)-матриц. При этом матричное умножение, в зависимости от специфики задачи, осуществляется либо с помощью операций в кольце целых чисел, либо в булевой алгебре с двумя элементами. В последнем случае (0,1)-матрицы называются булевыми матрицами (б. м.). Свойства б. м. и их применения рассматриваются в [78, 87, 141, 143, 205, 219]. Идемпотентные б. м. $B$ (т. е. обладающие свойством $B^k=J$ для некоторого целого числа $k$) изучаются в [78], где на языке теории разбиений выводится критерий идемпотентности. Пусть $B$ — б. м. $n$-го порядка, $k$, $d$ — наименьшие целые числа, для которых $B^k = B^{k+d}$; $k$ называется индексом, $d$ — периодом $B$. $S$-ранг б. м. $B$ определяется следующим образом: он равен 1, если у $B$ все ненулевые строки равны, и равен $r$, если $r$ — наименьшее число матриц ранга 1, дающих в сумме $B$. В [141] получены оценки индекса б. м. с периодом, большим 1. Доказывается, что если идемпотентная б. м. $B$ имеет $S$-ранг $r$ и $b_{ij}^{(s)}=1$ для некоторого $j$, то $k(B)\leqslant s(r-2)+s+1$. Пусть $M_n(F)$ — совокупность всех матриц порядка $n$ над произвольным полем $F$, $A_R$ — множество таких матриц из $M_n(F)$, у которых нули стоят на тех же местах, что и у заданной б. м. $R$. В [143] показано, что $A_R$ тогда и только тогда порождает $M_n(F)$, когда $R$ — идемпотентная б. м., из которой можно получить матрицу перестановки, заменив некоторое число единиц нулями. В [205] рассматривается соответствие между множеством бинарных отношений на $n$-множестве и множеством $\mathscr{B}_n$ б. м. порядка $n$; показано, как определить операции на $\mathscr{B}_n$, чтобы получающаяся система была изоморфна одной из бинарных операций: композиции, пересечения, объединения или одной из унарных операций: обращения, перехода к дополнению. Разложения в произведение для матриц из $\mathscr{B}_n$ изучаются в [87]: $A\in\mathscr{B}_n$ называется простой, если из $A=BC$, где $B$, $C\in\mathscr{B}_n$, следует, что $B$ или $C$ есть матрица перестановки. Б. м. $A\in\mathscr{B}_n$ называется $r$-неразложимой $(1\leqslant r\leqslant n)$, если она не содержит нулевой подматрицы размера $s\times t$, где $s$, $t\geqslant1$ и $s+t=n-(r-1)$. Пусть $n$, $r$ таковы, что $n>3(r-1)$. Выводится достаточное условие простоты: $A\in\mathscr{B}_n$ проста, если для нее выполнены следующие свойства:

1) $A$ $r$-неразложима,
2) $A$ содержит не более $r-1$ подматриц $J_2$,
3) $A$ не содержит $J_{2,3}$ и $J_{3,2}$.

Псевдообратные в смысле Мура — Пенроуза (см. ниже) для б. м. (при этом булево умножение заменяет обычное) изучаются в [219]. Выводится критерий существования псевдообратной для б. м. $B$: любые две строки у $B$ либо совпадают, либо ортогональны (в булевом смысле). В этой же работе б. м., допускающие псевдообратные, характеризуются как матрицы смежности линейных орграфов (т. е. графов, двойственных некоторому орграфу).

Свойства миноров и обобщенных обратных для (0,1)-матриц, понимаемых как матрицы над кольцом целых чисел, рассматриваются в [57, 234]. В первой из них характеризуются обобщенные обратные в смысле Мура—Пенроуза для матриц инцидентности $A$ орграфов и получен базис пространства решений уравнения $AXA=0$; показано также, что канонические формы Смита для этих матриц могут быть построены посредством матриц с элементами — 1, 0, 1. Во второй определяется класс матриц, сохраняющих свойство полной унимодулярности при операциях взятия дополнений в строках и столбцах ((0,1)-матрица вполне унимодулярна, если каждый ее минор равен 0, 1, —1). Вопросы об обратных для (0,1)-матриц $A$ в связи со свойствами графов, построенных по $A$, разбираются также в [151]. Матрица $A$ называется $M$-матрицей, если $A=sI-B$, где $s\geqslant\rho(B)$, $B$ — неотрицательная матрица с максимальным характеристическим числом $\rho(B)$. Почти треугольной назовем матрицу, перестановочно подобную треугольной; это свойство обозначим через $T$. С $A=(a_{ij})$ сопоставляется граф $G(A)$, в котором $(i,j)$ — ребро, если $a_{ij}\neq 0$. Если в $G(A)$ отбросить петли, то полученный граф обозначаем через $\tilde{G}(A)$. Определим множество матриц $Z_0=\{A=(a_{ij})\,|\,a_{ii}=1,\ a_{ij}=0$ или $-1$ при $i\neq j\}$. Доказывается, что:

1) Пусть $A\in T$ — $M$-матрица; тогда $A$ обратна (0,1)-матрице $F$, если и только если $A\in Z_0\cap T$ и $\tilde{G}(A)$ — лес.

2) Если (0,1)-матрица $F$ обратна некоторой $M$-матрице, то $F\in T$.

3) $A\in Z_0$ — невырожденная $M$-матрица, если и только если $A\in T$.

Векторные $mn$-мерные пространства $V$ матриц размера $m\times n$ над полями $GF(q)$ изучаются в [65]; в случае $m=n=2$ и произвольного $q$ подсчитывается число базисов, состоящих из матриц заданных рангов.

Матрицы с целыми элементами, обратные к которым также целочисленны, изучаются в [93, 115, 117]. В [142] для матриц с целыми неотрицательными элементами (и вообще для матриц с элементами из полукольца) вводится следующее отношение эквивалентности: $A$ и $B$ эквивалентны, если существуют такие матрицы $R, S$ и такое число $n\geqslant 0$, что $RA=BR$, $AS=SB$, $RS=B^n$, $SR=A^n$. Доказывается существование конечной процедуры для решения вопроса об эквивалентности двух матриц $A$ и $B$ при условии, что характеристический многочлен $A$ не имеет кратных корней (и при некоторых дополнительных условиях). Целочисленные циркулянты рассматриваются в [179, 180]. В первой из них подробно исследуется вопрос о том, для каких целых $m$, $n$ существует целочисленный циркулянт $C$ порядка $n$ с $\det C=m$. Показано, в частности, что это так, если $(m,n)=1$ или если $n^2|m$. Если простое число $p$ делит $(m,n)$ и $p^t|n$, то необходимым условием является $p^{t+1}|m$. Во второй доказывается, что определитель целочисленного циркулянта порядка $p^k$ $(p>3)$ не может равняться $p^{k+1}$. Дается контрпример к этому утверждению при $p=3$. Кроме того, при $p=3$ определитель либо не делится на 3, либо делится на 27. Перечислительная задача о минорах (0,1)-матрицы $A_n$ размера $n\times(2^n-1)$, все столбцы которой ненулевые и различны между собой, рассматривается в [193]. В $A_n$ выделяется подматрица $A_{nm}$, каждый столбец которой содержит в точности $m$ единиц. Пусть $g_n=|A_nA_n^T|$, $a_n$ — количество миноров порядка $n$ в $A_n$, $Q(n)$ — среднее значение квадратов миноров матрицы $A_n$, т. е. $Q(n)=g_n/a_n$, $Q(n,m)$ — среднее значение квадратов миноров $A_{nm}$. Находится асимптотика чисел $Q(n)$ и $Q(n,m)$ при $n\to\infty$. В [77, 113] изучаются множества $\mathcal{J}$ матриц перестановки порядка $n$, сумма которых совпадает с $J_n$. Такие множества характеризуются в случаях, когда а) матрицы из $\mathcal{J}$ перестановочны и б) множество $\mathcal{J}$ замкнуто относительно умножения [77]. Другие вопросы о неотрицательных целочисленных матрицах см. [51, 150].

**2. Неотрицательные вещественные матрицы.** Изучению общих свойств матриц с неотрицательными элементами в рассматриваемый период было посвящено лишь небольшое число работ. В [131, 132] исследовались обобщенные обратные неотрицательных матриц. Для вещественных матриц размера $m \times n$ рассматриваются следующие уравнения:

$$AXA = A, \tag{1}$$

$$XAX = X, \tag{2}$$

$$(AX)^T = AX, \tag{3}$$

$$(XA)^T = XA, \tag{4}$$

$$AX = XA. \tag{5}$$

Если $\lambda \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, то $X$, удовлетворяющая уравнениям с номерами из $\lambda$, называется $\lambda$-обратной для $A$. В частности, $\{1, 2, 3, 4\}$-обратная есть псевдообратная Мура—Пенроуза, а $\{1, 2, 5\}$-обратная (для квадратной матрицы $A$) называется групповой обратной; если она существует, то единственна. В [132] характеризуются неотрицательные матрицы, имеющие групповые обратные. Отсюда получается также характеристика неотрицательных матриц, совпадающих со своими $\{1\}$- или $\{1, 2\}$-обратными. В той же работе описываются все неотрицательные скелетные разложения матриц с групповыми обратными. В [131] дается обзор результатов о неотрицательных матрицах, имеющих неотрицательные обобщенные обратные. Вопрос о существовании неотрицательных скелетных разложений для неотрицательных матриц $A$ решается в отрицательном смысле (см. [134]) для случаев:

а) $A$ размера $m \times n$ ($m \geqslant n \geqslant 4$), ранга $n-1$, в любой строке $A$ имеется не более двух ненулевых элементов, никакие две строки не пропорциональны, любые $n-2$ столбца линейно независимы;

б) $A$ размера $p \times q$, ранга $r$ ($p \geqslant r+1 \geqslant 4$, $q \geqslant r+1$) содержит подматрицу $A_0$ с указанными в п. а) свойствами.

В связи с математическими моделями энергетических запросов в экономике в [112] рассматривается вопрос о получении для положительно полуопределенной неотрицательной матрицы $A$ порядка $n$ разложения $A = B^T B$, где $B$ — также неотрицательная матрица порядка $n$. Даются доказательства геометрического характера известных фактов: такая факторизация существует при $n \leqslant 4$; для $n \geqslant 5$ она не всегда возможна.

Аналогично идемпотентным булевым матрицам, неотрицательная квадратная матрица $A$ называется примитивной, если $A^\gamma > 0$ для некоторого целого $\gamma$. Наименьшее целое число $\gamma(A)$

с таким свойством называется показателем (примитивности) матрицы $A$. Интересные результаты, касающиеся примитивных матриц, получены в [152]. В 1950 г. Виландом (Wielandt H.) была указана следующая верхняя граница для показателя $\gamma$ примитивной матрицы $A$ порядка $n$:

$$\gamma(A)\leqslant n^2-2n+2. \qquad (1)$$

В дальнейшем Далмейджем (Dulmage A. L.) и Мендельсоном (Mendelsohn N. S.) были выделены такие целые числа, удовлетворяющие (1), которые не являются показателями никакой примитивной матрицы порядка $n$; таковы, например, числа из интервалов $(n^2-3n+4,\ (n-1)^2)$ и $(n^2-4n+6,\ n^2-3n+2)$. При четном $n$ такой «лакуной» будет интервал $(n^2-4n+6,\ (n-1)^2)$, объединяющий оба предыдущих. Авторы [152] усиливают эти результаты, показывая, что для любых $n$, $t$ не существует примитивной матрицы порядка $n$, показатель которой $\gamma(A)$ удовлетворял бы неравенствам

$$n^2-tn+\frac{1}{4}(t+1)^2<\gamma(A)<n^2-(t-1)n+t-2.$$

Усилен также упомянутый результат об интервале для четного $n$. Теория индекса примитивных матриц обобщается следующим образом в РЖМат, 1983, 3А347. Пусть $X$ — множество неотрицательных квадратных матриц порядка $k$ и $\Pi(m)$ обозначает произведение любых $m$ матриц из $X$, причем разрешены их повторения; $X$ примитивно, если для некоторого $m_0$ каждая матрица из $\Pi(m_0)$ положительна; индекс $g(X)$ множества $X$ — наименьшее число с таким свойством. Доказывается, что $g(X)\leqslant 2^k-2$ и эта оценка достижима.

**3. Стохастические и дважды стохастические матрицы.** Неотрицательные вещественные матрицы этих классов изучаются наиболее интенсивно. Напомним, что стохастической называется неотрицательная вещественная матрица $A=(a_{ij})$ порядка $n$, для которой выполняются условия $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$, $i=1,\ldots,n$; если при этом также $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1$, $j=1,\ldots,n$, то $A$ называется дважды стохастической (дв. с.). Если в определении стохастической матрицы отказаться от требования неотрицательности элементов, то такую матрицу назовем почти стохастической (п. с. м.). Через $\Omega_n$ обозначим множество дв. с. м., через $\mathcal{S}_n$ — множество п. с. м. порядка $n$. Если в матрице $I_n$ элемент на месте $(i, i)$ заменить на $\alpha$, а на месте $(i, j)$ — на $1-\alpha$, то приходим к п. с. м. $L_{ij}(\alpha)$. Такие матрицы называются элементарными п. с. м. (при $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ — элементарными стохастическими). В [135] исследуется вопрос о разложении матриц из $\mathcal{S}_n$ в произведение элементарных п. с. м. Доказывается, что любую $A \in \mathscr{C}_n$ $(n \geqslant 2)$ можно разложить в произведение, включающее в качестве сомножителей элементарные п. с. м. в числе не больше $q(n)$, где $q(n)$ — некоторый квадратный многочлен от $n$, и, быть может, матрицу транспозиции $P_{12}$ (в том случае, когда $\det A < 0$); у матрицы ранга $r$ число вырожденных сомножителей есть $n-r$, и это число — минимально возможное. Аналогичный результат получен также для стохастических матриц (с той же границей $q(n)$), только в качестве сомножителей допускаются элементарные стохастические матрицы, обратные к ним (они входят в $\mathscr{S}_n$), $P_{12}$ и лишь они. В этом случае указывается также верхняя граница для числа сомножителей $L_{ij}(\alpha)$ с $0 \leqslant \alpha \leqslant 1-\varepsilon$ при любом заданном $\varepsilon > 0$.

Граница для модулей собственных значений одного класса стохастических матриц $M$, ассоциированных с графами, получена в [148]. Пусть $G$ — связный граф с $n$ вершинами и матрицей смежности $A$; приходим к матрице $M$, деля каждый элемент $A$ на сумму элементов строки, где он расположен. Множество собственных значений стохастической матрицы включает $\lambda = 1$ и, быть может, $\lambda = -1$. Доказывается, что при $\lambda \neq \pm 1$ для собственного значения матрицы $M$ справедлива оценка $|\lambda| \leqslant 1 - n^{-3}$. Приведены примеры графов, для которых оценка достигается: это — два полных графа на $n/3$ вершинах, соединенных цепью с $n/3$ вершинами. Более сильные оценки получаются при том условии, что с ростом $n$ диаметр $G$ или максимальная степень вершины остаются ограниченными. В [136] рассматривается вопрос о возможности приведения стохастической матрицы к дв. с. м. преобразованием подобия. Показано, что это возможно не всегда, и выведены некоторые достаточные условия, например: если ни один элемент стохастической матрицы не меньше $1/(n+1)$, то она подобна дв. с. м. Интересно, что положение меняется, если от стохастических матриц перейти к п. с. м., а именно, доказывается, что любая $A \in \mathscr{S}_n$ подобна вещественной матрице, у которой все строчные и столбцевые суммы равны 1.

В нескольких работах изучались свойства дв. с. м. или их различных обобщений. В [48] методами, заимствованными из линейного программирования, устанавливается, что для любых двух различных дв. с. м. $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ порядка $n$ найдется такая перестановка $\sigma$, что

$$\prod_i a_{i\sigma(i)} > \prod_i b_{i\sigma(i)}.$$

Оценка величины элемента дв. с. м. $A = (a_{ij})$ с помощью евклидовой нормы $\|X\|$ матрицы $X$ приводится в [215]:

$$|a_{ij} - 1/n| \leqslant \frac{n-1}{n} \|A - J_n\|,$$

подробно обсуждается случай равенства. В [216] рассматриваются матрицы, удовлетворяющие для некоторого натурального

$p$ условию $A^p = A^T$; они называются условно симметрическими. Если такая матрица $A$ — стохастическая, то она будет дв. с. м. Дается описание всех условно симметрических стохастических матриц.

Различные обобщения дв. с. м. рассматривались в [39, 81, 106]. В первой из них известное описание экстремальных точек пространства симметрических дв. с. м. распространяется на случай бесконечных матриц. Во второй теорема Биркгофа о том, что множество дв. с. м. есть выпуклая оболочка матриц перестановки, обобщается на случай матриц с элементами — двумерными векторами, со строчными и столбцевыми суммами, равными (1,1). Наконец, в [106] рассматривается множество $\Delta_n(R)$ матриц порядка $n$ над кольцом $R$ с единицей, у которых все строчные и столбцевые суммы совпадают. В духе упомянутой теоремы Биркгофа для $\Delta_n(R)$ ищутся $R$-базисы, состоящие из матриц перестановки; доказывается, в частности, что каждый такой базис содержит $n^2 - n + 2$ элементов.

**4. Перманенты.** Теория перманентов обогатилась в рассматриваемый период результатом первостепенного значения: в [7] (см. также [33]) была, наконец, доказана знаменитая гипотеза Ван дер Вардена: $\min\{\operatorname{per} A \mid A \in \Omega_n\} = \operatorname{per} J_n = n!/n^n$ и $J_n$ — единственная матрица из $\Omega_n$, на которой этот минимум достигается. Успех при доказательстве гипотезы (см. [7]) во многом был обусловлен привлечением созданной еще в 30-е гг. А. Д. Александровым теории смешанных дискриминантов, которая обычно использовалась при исследовании объемов выпуклых тел в евклидовом пространстве. Перманент может быть представлен как смешанный дискриминант; этот факт позволил применить к нему частный случай неравенства, полученного А. Д. Александровым для дискриминантов, что и привело к доказательству гипотезы Ван дер Вардена. Этот результат привел также к решению целого ряда сопутствующих проблем и вызвал многочисленные отклики. Оказались доказанными все результаты, полученные ранее в предположении справедливости гипотезы Ван дер Вардена. Обзор таких утверждений см. [17] и [20]. Это относится, в частности, к оценкам числа неизоморфных троек Штейнера и числа латинских прямоугольников и квадратов. О работах по оценкам снизу перманентов дв. с. м. и проблеме Ван дер Вардена, а также родственным ей проблемам см. [9, 17, 20, 22, 92, 96, 132, 155, 156, 158—161, 164, 167, 192, 214].

В недавно вышедшей на русском языке монографии Минка [17], снабженной полной библиографией работ по перманентам (доведенной в русском переводе до 1981 г.), подробно разбираются самые различные стороны теории перманентов. Поэтому мы не будем сколько-нибудь подробно останавливаться на достижениях в этой области, отсылая читателя к гл. 8, библиографии и послесловию в этой книге, где дается подробный обзор современного ее состояния (из работ, не упоминавшихся выше, там рассматриваются, в частности, [8, 66, 107, 169, 173, 174, 178, 211]). Отметим лишь некоторые результаты, полученные в последнее время.

Новый метод вычисления перманентов (0,1)-матриц излагается в [137]. Он основан на соотношениях величин перманентов, у которых строки удовлетворяют некоторым условиям, выраженным в терминах теоретико-множественных операций на строках матрицы. Приводится таблица времени счета с помощью предлагаемого алгоритма и с помощью известных алгоритмов Райзера и Уилфа, основанных на формуле включения — исключения. О формулах для вычисления перманентов см. также [6, 7]. Оценкам снизу перманентов дважды стохастических циркулянтов посвящена работа [226]. В ней рассматривается множество дв. с. циркулянтов вида $\alpha I_n+\beta P_n+\gamma P_n^2$, где $P_n$ — матрица перестановки $(12\ldots n)$. Доказывается, что 1) если $n>3$, то минимум перманентов таких матриц меньше, чем $1/2^{n-1}$, и 2) при $n=3, 4$ матрица $A_n=\frac{1}{3}(I_n+P_n+P_n^2)$ — единственная, где этот минимум достигается. Ранее Минком было доказано, что минимум принадлежит полуоткрытому интервалу $(1/2^n, 1/2^{n-1}]$ и при $n\geqslant 5$ значение перманента матрицы $A_n$ не минимально. Нижние границы для некоторых функций от перманента дв. с. м., определенных с помощью подперманентов, см. [114]. В [133] характеризуются точки $n$-выпуклого множества, на которых достигает минимума супераддитивная $n$-однородная функция (обобщение функции перманента). В [36] с помощью известной теоремы Фробениуса — Кёнига о перманентах (0,1)-матриц перечисляются семейства, состоящие из двухэлементных подмножеств конечного множества, имеющие хотя бы одну систему различных представителей.

## § 5. АЛГОРИТМЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

**1. Введение.** В настоящее время произошло резкое увеличение числа работ, связанных с изучением сложности комбинаторных алгоритмов, и были достигнуты значительные продвижения в этой области. Основные направления исследований здесь — установление, имеет ли конкретная комбинаторная задача полиномиальный разрешающий алгоритм и последующие исследования, связанные с понижением полиномиальных оценок, либо установление NP-полноты конкретной задачи и нахождение разрешающего алгоритма с невысокой экспоненциальной оценкой.

В данном разделе дается обзор некоторых результатов в данных направлениях, связанных с решением алгебраических и графических задач, а также проблем выбора и поиска. Основное внимание уделяется рассмотрению оценок эффективности. В качестве меры сложности в основном используется время работы алгоритма в худшем случае как функции от размера входных данных. В качестве основной модели вычислительного устройства, на которой базируется мера сложности, как правило используется машина с произвольным доступом к памяти (RAM) [2].

Область комбинаторных алгоритмов слишком обширна, чтобы ее можно было охватить в одной статье. В стороне оставлены такие темы, как расчет константных множителей в оценках сложности комбинаторных алгоритмов, анализ поведения сложности алгоритмов в среднем, алгоритмы со случайным выбором и некоторые другие вопросы.

**2. Умножение матриц и связанные с ним вопросы.** Активно изучаемая в последнее время задача умножения матриц заключается в изучении мультипликативной сложности вычисления по двум данным матрицам $A$ и $B$ порядка $n\times n$ их матричного произведения $A\cdot B$, при условии, что элементы матриц берутся из некоторого кольца. Важность этой задачи объясняется, например, тем, что установлена сложностная эквивалентность задачи умножения матриц другим задачам: задаче решения системы линейных уравнений, задаче вычисления определителя матрицы, задаче нахождения замыкания матрицы [2]. И. Мунро (1972 г.) заметил, что более частные задачи, такие как возведение матрицы в квадрат и умножение симметрических матриц, имеют ту же по порядку сложность, что и общий случай. Стандартный метод умножения матриц требует $O(n^3)$ умножений. Если же разбивать матрицу $A$ на $(n\times m)$-подматрицы $A_i$, а матрицу $B$ на $(m\times n)$-подматрицы $B_i$, то ясно, что

$$A\cdot B=\sum_{i=1}^{n/m} A_iB_i.$$

Выбирая $m=\lfloor \log n \rfloor$, можно организовать вычисление произведения $AB$ за $O(n^3/\log n)$ операций.

В 1969 году Штрассен предложил рекурсивный алгоритм умножения двух $(n\times n)$-матриц, основанный на методе умножения двух $(2\times 2)$-матриц и использующий только 7 умножений. Данный алгоритм умножения двух $(n\times n)$-матриц требует $O(n^{\log 7})$ операций ($\log_2 7\simeq 2.807$).

Этот результат стимулировал появление целого ряда работ, посвященных нахождению алгоритмов умножения $(n\times n)$-матриц с мультипликативной сложностью $O(n^\beta)$, где $\beta\leqslant\log_2 7$, а также применение данного алгоритма для решения других задач (например, графических). В течение почти 10 лет вопрос об оптимальности алгоритма Штрассена был открыт, но, начиная с 1978 года, появилась целая серия алгоритмов с более лучшими оценками, чем в алгоритме Штрассена.

Так, в 1978 году Пан предложил так называемый алгоритм трилинейного собирания, который позволил получить оценку для сложности умножения матриц порядка $O(n^{2.796})$ для случая произвольного поля коэффициентов. Этот алгоритм быстрого умножения основан на тождествах типа

$$Tr(ABC)=\sum_{q=1}^{M} L_1(A) L_2(B) L_3(C)$$

(где $L_i$ — линейные формы от элементов матрицы) с небольшим значением $M$. Затем группа авторов — Бини, Капивани, Лотти, Романи в том же 1978 году для случая бесконечного поля коэффициентов получили оценку $O(n^{2.780})$. Их подход заключается во введении понятия граничного тензорного ранга, который определяется как тензорный ранг минимального страта, в замыкании которого лежит данный тензор. Через год Шёнхаге усовершенствовал их алгоритм, используя сведение умножения матриц к умножению «нескольких» матриц, и получил оценку $O(n^{2.609})$. Затем Пан, комбинируя все три метода указанных работ, получил новую оценку мультипликативной сложности умножения $(n\times n)$-матриц порядка $O(n^{2.6054})$ [188]. Дальнейшее улучшение этой оценки сделал Шёнхаге (Schönhage A., Partial and total matrix multiplication. Univ. Tübingen, W. G., preprint, 1980), предложивший новый алгоритм с оценкой $O(n^{2.523})$. Романи, используя некоторые свойства сумм тензоров, получил в работе [201] новую оценку $O(n^{2.5166})$.

В [189] выводятся новые тождества, связывающие следы произведения матриц и суммы произведений некоторых форм от коэффициентов матриц, которые дают лучшие оценки сложности произведения матриц с учетом констант.

Копперсмит и Виноград [84] получили следующий результат в этом направлении:

Пусть существует некоторая билинейная программа, вычисляющая произведение произвольных матриц порядков $m\times n$ и $n\times p$, использующая $L$ умножений, тогда для любого $r$ существует алгоритм произведения двух $(r\times r)$-матриц со сложностью

$$O(r^{\beta}),\ \text{где}\ \beta=3\log L/\log(mnp).$$

Пусть $n^{\beta}$ — предельная точка мультипликативных сложностей вычисления произведения двух матриц порядка $n$ в рассматриваемом классе алгоритмов. Показано, что $\beta<2.495364$. В работе [84] изучается величина $\omega(F)=\inf\{\omega_n(F)\mid n\geqslant 2\}$, называемая экспонентой матричного умножения, где $M(n)=n^{\omega_n(F)}$ обозначает ранг трехмерного тензора умножения двух квадратных матриц порядка $n$ над полем $F$. Число $M(n)$ совпадает с минимальной из мультипликативных сложностей «билинейных» алгоритмов, вычисляющих указанное произведение матриц. Основной результат состоит в том, что $\omega(F)$ является предельной точкой последовательности $\omega_n(F)$ в строгом понимании этого термина. Отсюда следует, что $\omega(F)$ не реализуется никаким конкретным билинейным алгоритмом. Интуитивно это можно трактовать так, что среди билинейных алгоритмов нет в точном смысле наилучшего.

Как уже отмечалось, данные оценки сложности умножения матриц характеризуют также и сложность обращения невырожденной матрицы, сложность вычисления определителя матрицы, сложность решения квадратных систем линейных уравнений. Случай произвольных систем $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными был рассмотрен в работе [26], где на основе усовершенствования алгоритма $LUP$-разложения матрицы из [2] был получен алгоритм решения произвольной системы линейных уравнений за число операций

$$O(\max(m, n)\cdot(\min(m, n))^{\log 3.5}).$$

Обратимся теперь к задаче булева умножения $(0,1)$-матриц размера $n\times n$. В этом случае указанные выше алгоритмы уже неприменимы, так как они существенно использовали свойства кольца коэффициентов, которые в данном случае не выполняются. Ясно, что обычный алгоритм умножения требует $O(n^3)$ операций. Используя алгоритм Шёнхаге «быстрого» умножения чисел, авторы работы [2] получили алгоритм булева умножения $(0,1)$-матриц размера $n\times n$, требующий

$$O_Б(n^{\log 7}\cdot\log n\cdot\log\log n\cdot\log\log\log n)$$

битовых операций. Этот алгоритм был усовершенствован (см. РЖМат, 1982, 5В696) и получена новая, более точная оценка

$$O_Б(n^{\log 7}\log n\cdot\log\log\log n\cdot\log\log\log\log n)$$

для числа битовых операций для булевого умножения матриц. К данному направлению относится также следующая задача, рассмотренная в работе [109]. Пусть имеется $(p\times q)$-матрица $R$ из нулей и единиц и натуральное число $m$. Требуется установить, существуют ли $(p\times m)$- и $(m\times q)$-матрицы из нулей и единиц $A$ и $B$ такие, что $R=A\cdot B$. К этой задаче сводится задача о вычислении $(p\times q)$-билинейной формы с константами $\{0, 1\}$ билинейными программами, использующими $m$ умножений. Показано, что мультипликативная сложность билинейной формы $B$ с матрицей $R$ размера $p\times q$ с коэффициентами 0,1 равна минимальному числу $r$ такому, что $R=X\cdot Y$, где $X$ и $Y$ — $(p\times r)$- и $(r\times q)$-матрицы из нулей и единиц.

В [109] установлено, что данная задача является NP-полной. Отсюда следует, что и задача определения по данному набору билинейных форм $\{B_i\}$, $i=1, \ldots, k$, размера $p\times q$ с коэффициентами {0, 1} и произвольному натуральному $m$: может ли значение этого набора билинейных форм быть вычислено с помощью $m$ умножений, является NP-полной задачей. Аналогичные результаты получены и относительно аддитивной сложности. Например, задача определения по заданной билинейной форме $B$ и натуральному числу $l$: можно ли $B$ вычислить с помощью $l$ сложений, является NP-полной задачей, даже если фиксируется число умножений. Алдер и Штрассен [41] рассмотрели общую задачу о мультипликативной сложности перемножения двух элементов конечной ассоциативной алгебры $A$. Установлено, что для данной сложности $L$ справедливо неравенство $L(A) \geqslant 2\dim A - t$, где $t$ — число максимальных двусторонних идеалов алгебры $A$.

Если $A$ — тело, то достигается равенство.

Приведем теперь результаты, связанные с графической интерпретацией некоторых методов решения систем линейных уравнений.

В [202] рассмотрена графическая интерпретация метода Гаусса исключения неизвестных. При решении системы по методу Гаусса фактически проводится факторизация $(n \times n)$-матрицы коэффициентов $A$ в виде $A = L \cdot U$, где $L$ и $U$ — верхняя и нижняя треугольные матрицы. В ходе решения некоторые нулевые элементы матрицы $A$ могут перейти в ненулевые элементы в $L$ или $U$. Такие элементы называются пополнением. Пусть $G = (V, E)$ — $n$-вершинный граф данной матрицы коэффициентов $A$, определяемый отношениями:

$$(v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow a_{ij} \neq 0 \text{ или } a_{ji} \neq 0, \; v_i, \; v_j \in V, \; i, \; j = 1, \ldots, n.$$

Тогда задача заключается в нахождении такого упорядочения вершин графа $G = (V, E)$, при котором бы минимизировалось число пополнений в ходе реализации алгоритма Гаусса. Доказано [202], что задача определения такого упорядочения является NP-полной проблемой.

Роуз и Тарьян (1978 г.) в связи с изучением метода Гаусса для разреженных систем линейных уравнений рассмотрели следующую задачу: для произвольного ориентированного графа $G = (V, E)$ и натурального числа $k$ установить, можно ли так перенумеровать вершины графа $G$, что получится самое бо́льшее $k$ пар вершин $(u, v) \in V \times V \setminus E$, обладающих свойством: $G$ содержит ориентированный путь из $u$ в $v$, проходящий только через такие вершины $w$, что $f(w) < \min\{f(u), f(v)\}$, где $f(t)$ — номер вершины $t$. Данная задача также является NP-полной [202]. Другой результат в этом направлении получен в работе [105]. Назовем разметкой графа $G = (V, E)$ любое инъективное отображение $f: V \to Z^+$ множества вершин в множество положительных целых чисел. Охватом разметки $f$ назовем величину

$$\text{Охв}(f) = \max_{(u,v)\in E} \{|f(u) - f(v)|\}.$$

Охватом графа $G=(V, E)$ называется величина

$$\text{Охв}(G) = \min\{\text{Охв}(f)\},$$

где минимум берется по всем разметкам $f$ графа $G=(V, E)$. Нетрудно получить, что $\text{Охв}(G) \leqslant k$ в том и только в том случае, когда существует такая перестановочная матрица $P$, что все ненулевые элементы матрицы $P^T AP$ лежат на диагонали или на $k$ первых наддиагоналях или первых $k$ поддиагоналях. Построены алгоритмы с линейной сложностью для определения, справедливо ли равенство $\text{Охв}(G)=1$ и $\text{Охв}(G)=2$. Другими словами, за время $O(n)$ проверяется, может ли матрица $A$ приводиться к тридиагональному виду перестановкой строк и столбцов. В то же время, если заданы произвольные граф $G=(V, E)$ и натуральное число $k$, то задача определения, существует ли упорядочение вершин графа $G=(V, E)$ такое, что справедливо $\text{Охв}(G) \leqslant k$, является NP-полной проблемой.

**3. Сложность алгоритмов, связанных алгебраическими задачами.** В 1972 году Тарьян показал, что изоморфизм двух групп порядка $n$, заданных таблицами Кэли, можно распознать за $O(n^{\log n + O(1)})$ шагов. Этот алгоритм основывается на том факте, что любая группа порядка $n$ порождается не более чем $\log_2 n$ элементами. Этот подход можно использовать для построения алгоритмов проверки изоморфизма квазигрупп порядка $n$ и латинских квадратов порядка $n$. Этому посвящена работа [172] и предложенные там алгоритмы имеют сложность $O(n^{\log n})$ с точностью до полиномиального множителя. Д. Ю. Григорьев (1980 г.) установил, что изоморфизм двух полупростых алгебр, заданных своими структурными целочисленными тензорами (над алгебраически замкнутым полем), может быть разрешен в полиномиальное время.

Хопкрофт и Ванг (1974 г.) показали, что задача изоморфизма для планарных графов решается за полиномиальное время. Установлена также полиномиальность разрешения для некоторых других частных классов графов. Однако в общем виде проблема, лежит ли задача об изоморфизме графов в классе $P$, остается открытой. Приведем некоторые результаты, связанные с эквивалентностью матриц Адамара, тех $(n\times n)$-матриц $H$, состоящих из $-1$, 1 и таких, что $H\cdot T^T = nI$, где $I$ — единичная матрица. Две матрицы Адамара называются эквивалентными, если одна матрица может быть получена из другой следующими операциями: перестановка строк (столбцов) и умножение строк (столбцов) на $-1$. Задача заключается в сложности выяснения эквивалентности матриц Адамара. Мак-Кей (1979 г.) показал, что данная задача за полиномиальное время сводится к проверке изоморфизма некоторых графов.

Леон (1979 г.) предложил алгоритм, решающий данную задачу за $n^{O(\log n)}$ шагов.

В работе [82] показано, что эквивалентность двух матриц Адамара можно проверить, используя память объемом $O(\log^2 n)$.

Пусть $G$ — свободная группа. Проблема степени в группе $G$ — это проблема существования алгоритма, который по любым двум элементам $x$, $y \in G$ отвечает на вопрос, является ли $x$ степенью $y$ в $G$. Проблема степенной сопряженности в $G$ — это проблема существования алгоритма, который по любым двум элементам $x$, $y \in G$ отвечает на вопрос, сопряжен ли $x$ некоторой степени $y$ в $G$.

Доказывается [90], что проблема сопряженности, проблема степени, проблема степенной сопряженности разрешимы для свободной группы в линейное время на многоленточных машинах Тьюринга. Это значит, что на машине RAM эти проблемы разрешимы за линейное время при равномерном весовом критерии и разрешимы с логарифмическим замедлением при логарифмическом весовом критерии. Заметим, что ранее Кардоза, Линтон, Мейер (1976 г.) установили, что проблема равенства слов для абелевых групп требует экспоненциальной памяти. Другая задача из данной области — проверка ассоциативности группоида. Пусть $G$ — группоид, заданный своей таблицей умножения. Требуется определить его ассоциативность. В 1972 году Фрейзер установил [98], что если алгоритмы проверки ассоциативности используют только тройки элементов группоида $G$, то для любого такого алгоритма $A$ существует группоид $G$, ассоциативность которого не может быть установлена менее, чем за $n^3$ операций. Алгоритм другого типа проверки ассоциативности, требующий $O(n^2)$ операций, предложен в работе [241].

**4. Алгебраическая задача о назначении** ставится следующим образом. Пусть $S$ — непустое множество с бинарным отношением $+$ и отношением порядка $\leqslant$, которые удовлетворяют условиям:

а) $S$ — множество, полностью упорядоченное отношением $\leqslant$.

б) Система $(S, +)$ является коммутативной полугруппой.

в) $S$ содержит единичный элемент $e$.

г) $b \geqslant e$ влечет $a \leqslant a+b$ для всех $a$.

д) $a < b$ влечет существование $c \geqslant e$ такого, что $a+c=b$.

е) $a+c=b+c$ влечет $a=b$, либо $a+c=b+c=c$. Здесь $a$, $b$, $c \in S$.

Пусть заданы элементы $c_{ij} \in S$ для $i$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\} = N$. Требуется найти перестановку $\varphi$ множества $N$ такую, которая минимизирует сумму

$$\sum_{i \in N} c_{i\varphi(i)} = c_{1\varphi(1)} + c_{2\varphi(2)} + \ldots + c_{n\varphi(n)}$$

по всем перестановкам $\varphi$ множества $N$. Эта задача представляет собой обобщение классической задачи о назначении, в которой в качестве $S$ берется множество действительных чисел с обычными операциями $+$ и $\leqslant$.

В 1977 году Буркард, Гамахер, Циммерман предложили для алгебраической задачи о назначении алгоритм со сложностью $O(n^4)$. В работе [100] для данной задачи был предложен алгоритм со сложностью $O(n^3)$, который, по существу, является модификацией алгоритма Диница и Кронрода (1969 г.) для решения классической задачи о назначении.

Заметим, что квадратичная задача о назначении NP-полна. Она формулируется так: Заданы неотрицательные целые числа $c_{ij}$ (стоимости), $i, j=1, \ldots, n$, и $d_{kl}$ (расстояния), $k, l=1, \ldots, m$, $B$. Спрашивается, существует ли такое однозначное отображение $f: \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$, что справедливо соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} c_{ij} \cdot d_{f(i)\, f(j)} \leqslant B.$$

NP-полнота данной задачи установлена Сахни, Гонцалез (1976 г.)

## § 6. ПРОБЛЕМЫ ВЫБОРА

1. Стокмейер и Вонг в работе [225] рассмотрели задачу о нахождении пересечения двух отношений. На матричном языке задача ставится так.

Пусть даны две матрицы $A$ и $B$ с вещественными элементами размером $(m \times k)$ и $(n \times k)$, соответственно. Строки обеих матриц попарно различны между собой. Требуется путем попарных сравнений элементов матрицы выделить множество общих строк матриц $A$ и $B$. Пусть $I(m, n, k)$ — минимальное число сравнений в худшем случае для решения поставленной задачи. В [225] установлено, что имеют место неравенства:

$$(m+n)\log_2 m + (m+n-1)k - m + 1 \geqslant I(m, n, k) \geqslant$$
$$\geqslant \max((m+n)\log_2 n - 2.9m, (m+n-1)k).$$

Если требуется в произвольной $(m \times k)$-матрице путем попарных сравнений элементов матрицы выделить одинаковые строки, то для числа $P(m, k)$ — минимального количества сравнений (в худшем случае), необходимых для решения этой задачи, справедливо соотношение:

$$m\log_2 m + (m-1)(k-1) \geqslant P(m, k) \geqslant$$
$$\geqslant \max(m\log_2 m - 1.45, (m-1)k).$$

2. Пусть дано некоторое линейно упорядоченное множество $S$. Если требуется упорядочить множество $S$ путем попарных сравнений, то имеются хорошие алгоритмы, требующие $O(n\log n)$ попарных сравнений, где $|S|=n$. При этом, если алгоритм использует только попарное сравнение, то данный порядок оценки сложности неулучшаем [2]. Пусть теперь требуется выбрать $i$-й наибольший элемент из множества $S$. Пусть $v_i(n)$ — наименьшее требуемое для этого число сравнений в худшем случае. Многими авторами, начиная со Штейнхауза (ок. 1930 г.), были получены различные верхние и нижние оценки для величины $v_i(n)$ при различных $i$.

В качестве нижней оценки Киркпатрик в 1981 году установил, что

$$v_i(n)\geqslant\begin{cases}\left\lfloor \frac{1}{2}(3n+i+1)\right\rfloor, & \text{если } \frac{1}{3}n<i\leqslant\frac{1}{2}(n+1),\\ n-i-3+\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant i-2}\left\lceil\log\frac{n-i+2}{i+j}\right\rceil, & \text{если } i\leqslant\frac{1}{3}n.\end{cases}$$

Что касается верхних оценок, то классической была оценка

$$v_i(n)\leqslant n-i+(i-1)\quad\lceil\log_2(n-i+2)\rceil,$$

и до 1972 года не было известно, действительно ли требуется $O(n\log n)$ попарных сравнений в решении данной задачи.

В 1973 году группа авторов: Блюм, Флойд, Пратт, Райвест, Тарьян получили верхнюю оценку порядка $O(n)$. Затем Шёнхаге (1976 г.) установил, что имеет место соотношение:

$$v_i(n)\leqslant 3n+o(n)\quad\text{для любого } i.$$

В работе [175] было проведено сравнительное изучение указанных алгоритмов и показано, что асимптотически первый алгоритм (группы Блюма) лучше второго. Кроме того, если $i=o(n)$, то $v_i(n)=n+o(n)$. Тем самым установлена оптимальность алгоритма при небольших значениях $i$. В [40] устанавливаются точные формулы для минимального числа сравнений в худшем случае, необходимых для выделения трех наибольших элементов и третьего наибольшего элемента. В частности, показано, что

$$v_3(n)=\begin{cases}(n-3)+2k & \text{при } d<2,\\ (n-3)+2k+1 & \text{при } 2\leqslant d\leqslant 2^{k-2},\\ (n-3)+2k+2 & \text{при } d>2^{k-2},\end{cases}$$

где $n=2^k+d$, $0\leqslant d<2^k$.

Заметим, что для нахождения 2-х наибольших элементов необходимо и достаточно $n+\lceil\log_2 n\rceil-2$ сравнений, а одного наибольшего $n-1$ сравнение (см. [2]). Нахождение наибольшего и наименьшего из $n$ элементов требует $\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil-2$ сравнений. Если выбираются $i$-е по порядку подмножества или наборы, то здесь могут появиться NP-трудные задачи. Например, пусть заданы конечное множество $A$, размер $s(a)$, являющийся натуральным числом каждого элемента $a \in A$, и положительные целые числа $K$ и $B$. Требуется установить, существует ли не менее $K$ различных подмножеств $A' \subseteq A$, сумма размеров элементов которых не превосходит $B$? NP-трудность этой задачи установили Джонсон, Каждан (1976 г.).

3. Задача лексикографической сортировки ставится так. Пусть имеется последовательность наборов (кортежей) с элементами из линейно упорядоченного множества $S$. Тогда очевидным образом на множестве наборов определяется лексикографический порядок. Требуется построить алгоритм, который данный список наборов упорядочивал бы в лексикографическом порядке. Если каждая компонента наборов является целым числом в интервале 0 и $m-1$, то $k$ наборов длины $n$ можно лексикографически упорядочить за время $O((m+n)k)$ [2].

Видерман [244, 245] совершенствует процедуру лексикографического упорядочения и предлагает алгоритм с временной сложностью $O(n(\log n+k))$.

Близкая задача с целочисленными наборами может стать NP-трудной.

Например, пусть заданы множества $X_1, \ldots, X_m$ натуральных чисел, размер $s(x)$ каждого элемента $x \in X_i$, $i=1, \ldots, m$, являющийся целым числом, а также натуральные числа $K$ и $B$. Требуется установить, существует ли, по крайней мере, $K$ различных $m$-мерных наборов $(x_1, \ldots, x_m)$ из множества $X_1 \times \ldots \times X_m$ таких, что справедливо

$$\sum_{i=1}^{m} s(x_i) \geqslant B.$$

NP-трудность этой задачи установили Джонсон и Мидзогути (1978 г.)

## § 7. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КЛАССОВ $P$ И NP

1. Главная открытая проблема теории сложности — это установление: верно ли, что $P=\mathrm{NP}$? С момента появления работ Кука (1971 г.) и Карпа (1972 г.), которые представили список некоторых NP-полных проблем, число таких проблем продолжает быстро расти. В книге [5] представлен список более чем 300 NP-полных проблем. Появилось еще несколько работ, посвященных установлению NP-полноты конкретных задач. Появление новых NP-полных проблем увеличивает возможности в разрешении проблемы: верно ли, что $P=\mathrm{NP}$? и, кроме того, является сильным подтверждением того, что NP-полные проблемы действительно труднорешаемы. В последнее время получено сильное продвижение в характеризации классов $P$ и NP.

Хорошо известно, что проблема выполнимости формул, заданных в конъюнктивной нормальной форме, является NP-полной проблемой, она остается NP-полной, если каждая скобка содержит по 3 буквы (3 — выполнимость), и становится полиномиальной, если каждая скобка содержит по 2 буквы (2 — выполнимость).

Представляет значительный интерес эффективное описание случаев, когда соответствующая проблема выполнимости лежит в $P$ и когда в NP.

В работе [208] в этом направлении получено определенное продвижение. Предварительно введем определения. Пусть $S = (R_1, \ldots, R_m)$ — конечное множество логических отношений. Логическое отношение — это подмножество $\{0, 1\}^k$ для некоторого $k \geqslant 1$. $S$-формула — это конъюнкция скобок, каждая из которых есть $R_i(x_1, x_2, \ldots)$.

Обозначим через SAT($S$) множество всех выполнимых $S$-формул.

Логическое отношение $R$ называется 0-выполнимым, если оно выполнимо на наборе из нулей, и 1-выполнимым, если оно выполняется на наборе из единиц.

Логическое отношение $R$ называется слабо позитивным (слабо негативным), если оно может быть задано формулой в конъюнктивной нормальной форме, имеющей самое большее одно отрицание (одно переменное без отрицания) в каждой скобке.

Логическое отношение $R$ называется биюнктивным, если оно может быть задано формулой в КНФ, имеющей самое большее 2 буквы в каждой скобке. Наконец, логическое отношение $R$ называется аффинным, если оно может быть задано в виде системы линейных уравнений над полем GF(2), т. е. может быть задано конъюнкцией формул вида $x_{i_1} + \ldots + x_{i_p} = 0$ и $x_{j_1} + \ldots + x_{j_q} = 1$.

В работе [208] установлена следующая теорема: Если множество логических отношений $S$ удовлетворяет одному из условий:

1) каждое отношение $R$ в $S$ 0-выполнимо;
2) каждое отношение $R$ в $S$ 1-выполнимо;
3) каждое отношение $R$ в $S$ слабо позитивно;
4) каждое отношение $R$ в $S$ слабо негативно;
5) каждое отношение $R$ в $S$ аффинно;
6) каждое отношение $R$ в $S$ биюнктивно,

то множество SAT($S$) полиномиально разрешимо. В противном случае SAT($S$) — NP-полно.

2. Хартманис и Борман (1978 г.) установили, что все известные NP-полные проблемы оказываются полиномиально изоморфными, т. е. между ними существует взаимно однозначное полиномиальное сведение друг к другу. Ими выдвинута гипотеза, что все NP-полные задачи полиномиально изоморфны. Если это так, то отсюда следовало бы, что $P \neq$ NP. Автор работы [163] установил, что если имеется NP-полная задача, не поли-

номиально изоморфная множеству $S$ («рюкзак»), то существует бесконечно много NP-полных, попарно полиномиально неизоморфных множеств. Следовательно, число классов полиномиального изоморфизма либо единица, либо счетно бесконечно.

3. Значительный интерес представляет нахождение «хороших» экспоненциальных алгоритмов для решения конкретных NP-полных проблем.

Для проблемы рюкзака Горович и Сахни (1974 г.) предложили алгоритм с временем работы $T=O(2^{n/2})$ и объемом памяти $S=O(2^{n/2})$. Тарьян и Трояновски (1977 г.) построили алгоритм для проблемы клик с характеристиками $T=O(2^{n/3})$ и $S=O(n)$.

В работе [212] был выделен некоторый класс проблем, который характеризуется аксиомами декомпозиции. В частности, этот класс включает проблему рюкзака, проблему точной выполнимости, проблему покрытия множествами. Для данного класса проблем построен алгоритм решения с характеристиками $T=O(2^{n/2})$ и $S=O(2^{n/4})$ (с точностью до полиномиальных множителей).

На основе приведенного алгоритма строится семейство алгоритмов, характеристики которых связаны соотношением $T\cdot S^2=O(2^n)$.

Опишем теперь класс проблем, для которых применимы эти алгоритмы. Под проблемой размера $n$ понимается предикат на бинарных наборах размера $n$. На проблемах действует бинарный оператор $\oplus$, называемый оператором соединения, если выполняются условия:

1) Оператор $\oplus$ аддитивен: для любых проблем $P'$ и $P''$

$$|P'\oplus P''|=|P'|+|P''|,\text{ где } |P| \text{ — размер задачи } P.$$

2) Оператор $\oplus$ истинный: для любых двух решений $x'$ для проблемы $P'$ и $x''$ для проблемы $P''$ конкатенация $x=x'x''$ — решение для проблемы $P'\oplus P''$.

3) Оператор $\oplus$ полный: для любого решения $x$ для проблемы $P$ и для любого представления $x$ в виде $x=x'x''$ имеются проблемы $P'$ и $P''$ такие, что $x'$ решает $P'$, $x''$ решает $P''$, и $P=P'\oplus P''$.

4) Оператор $\oplus$ полиномиален: проблема $P'\oplus P''$ может быть решена за время, полиномиально зависящее от размеров задач $P'$ и $P''$. Множество проблем полиномиально перечислено, если имеется полиномиальный алгоритм, который находит для каждой бинарной последовательности $x$ подмножество проблем, для которых $x$ является решением.

Оператор соединения $\oplus$ называется монотонным, если проблемы каждого размера могут быть упорядочены таким образом, что $\oplus$ удовлетворяет условиям: $|P'|=|P''|$ и $P'<P''$ влечет, что $P'\oplus P<P''\oplus P$ и $P\oplus P'<P\oplus P''$.

Основной результат. Если множество проблем полиномиально перечислимо и имеет монотонный оператор соединения, то его задачи размера $n$ могут быть решены за время $T=O(2^{n/2})$ и с памятью $S=O(2^{n/4})$.

## § 8. АЛГОРИТМЫ НА ГРАФАХ

**1. Паросочетания.** Пусть $G=(V, E)$ — неориентированный граф. Задача о паросочетании на графе $G$ заключается в том, чтобы найти максимальное число ребер в $E$ таких, что никакие два ребра не имеют общих вершин. Данное множество ребер называется максимальным паросочетанием. Если при этом каждая вершина инцидентна ребру из паросочетания, то оно называется совершенным.

Для решения задачи построения максимального паросочетания было предложено значительное количество алгоритмов. Если граф $G=(V, E)$ — двудольный, то данная задача легко трансформируется в задачу о максимальном потоке в сети, для решения которой известный алгоритм Форда — Фалкерсона дает оценку $O(|V|\cdot|E|)$. Хопкрофт и Карп (1974 г.) получили оценку $O(|V|^{1/2}\cdot|E|)$. Их алгоритм использовал поиск в ширину.

Для произвольных графов классическим является алгоритм Эдмонса (1965 г.) с оценкой $O(|V|^4)$. Этот алгоритм был усовершенствован и были получены следующие оценки для сложности решения данной задачи:

$$O(|V|\cdot|E|) \text{ (1976 г., Лолер, Габов),}$$

$$O(|V|^{1/2}\cdot|E|\cdot\log|V|) \text{ (1976 г., Ивен, Карив).}$$

В работе А. В. Козиной [10] предложен алгоритм перехода от произвольного максимального паросочетания к какому-либо другому и на основе этого перехода построен алгоритм перечисления всех максимальных паросочетаний графа. Сложность предложенного алгоритма — $O(|E|\cdot|V|+k|V|^2)$, где $k$ — число всех маскимальных паросочетаний в графе. Р. Г. Нигматуллиным [18] построен эффективный алгоритм проверки максимальности паросочетания за число действий $O(|E|+|V|)$. Этот алгоритм является дальнейшим развитием алгоритма Эдмонса, использующего стягивание циклов и увеличивающие пути. Нижняя оценка порядка $O(|E|+|V|)$ для проверки максимальности паросочетания очевидна.

Ряд работ связан с обобщением задачи о максимальном паросочетании. Так, Каннингем и Марш в работе [85] рассмотрели задачу построения оптимального паросочетания. В этом случае каждому ребру $e\in E$ графа $G=(V, E)$ приписано положительное действительное число $\omega(e)$. Задача заключается в том, чтобы найти такое совершенное паросочетание $M$, при котором величина $\sum\limits_{e \in M} \omega(e)$ является минимальной. Ими предложен алгоритм решения поставленной задачи со сложностью $O(|V|^2 \cdot |E|)$.

Другое обобщение рассмотрено в работе [129].

Пусть $G=(X, Y, E)$ — двудольный граф и заданы $E_1, \ldots, E_k$ — подмножества множества ребер $E$ и целые числа $r_1, \ldots, r_k$. Рассматривается задача совершенного паросочетания с ограничениями, которая заключается в проверке существования совершенного паросочетания $M$ (т. е. $|X| \leqslant |Y|$ и любая вершина $x \in X$ инцидентна ребру из $M$), удовлетворяющего условиям:

$$|M \cap E_j| \leqslant r_j, \ j=1, \ldots, k.$$

Если $|X|=|Y|$, то данная задача называется задачей точного полного паросочетания. Показано, что обе указанные задачи являются NP-полными.

Если же $k=1$, т. е. имеется единственное ограничение, то задача полного паросочетания с ограничениями может быть решена за время $O(n \cdot |E|)$, где $n=|X|+|Y|$. Соответствующий алгоритм основан на использовании потоковых методов. Задача перечисления всех точных паросочетаний может быть решена за время $O(|E| \cdot (n^{1/2}+m))$, где $m$ — число точных паросочетаний. Еще одно обобщение рассмотрено в [157]. Двудольный граф $G=(X, Y, E)$ называется выпуклым на множестве вершин $X$, если $X$ можно так упорядочить, что для любой вершины $b$ из множества $Y$ все вершины множества $X$, смежные вершине $b$, образуют интервал в $X$. Граф $G$ называется дважды выпуклым, если он выпуклый для обоих множеств $X$ и $Y$. В данной работе получены алгоритмы нахождения максимального паросочетания:

а) Для двудольного графа $G=(X, Y, E)$, выпуклого на множестве $X$, предложенный алгоритсм имеет временнýю сложность $O(|X|+|Y| \cdot f(|Y|))$, где $f$ — очень медленно растущая функция, определяемая через обратную функцию Аккермана.

б) Для дважды выпуклого двудольного графа $G=(X, Y, E)$ предложенный алгоритм имеет временнýю сложность $O(|X|+|Y|)$. Заметим, что задача о минимальном по мощности максимальном паросочетании является NP-полной. Точнее, пусть заданы граф $G=(V, E)$ и положительное целое число $k (k \leqslant |E|)$. Требуется установить, существует ли в $G$ максимальное паросочетание $M$ мощности не выше $k$ (см. [5]).

Авторы работы [224] предложили еще некоторые обобщения задачи о максимальном паросочетании, которую можно переформулировать следующим образом: Для графа $G=(V, E)$ найти наибольшее по мощности множество $M \subseteq E$ такое, что расстояние между любыми двумя ребрами в $M$ есть по крайней мере единица. Если в этой постановке заменить единицу на $\delta$ ($\delta \geqslant 2$), то получим задачу, названную авторами задачей о $\delta$-отделимом паросочетании.

Следующее обобщение, названное задачей о звездном паросочетании, заключается в нахождении такого отображения $\lambda: V \to \{R, T\}$, что для любой вершины $u \in V$ такой, что $\lambda(u) = R$, существует, по крайней мере, одна вершина $v \in V$, смежная с $u$ и такая, что $\lambda(v) = T$, причем, число вершин, помеченных $R$, максимально. Еще одно представленное обобщение названо задачей о $TR$-паросочетании. $TR$-паросочетанием в графе называется пара $(M, \lambda)$, где $M \subseteq E$ и $\lambda: V \to \{R, T, \Lambda\}$, с условиями:

1) $M$ — паросочетание в $G$.
2) Если в $M$ нет ребер, инцидентных вершине $u$, то $\lambda(u) = \Lambda$.
3) Для всех $\{u, v\} \in M$ справедливо $\{\lambda(u), \lambda(v)\} = \{R, T\}$.
4) Для всех $\{u, v\} \bar{\in} M$ справедливо $\{\lambda(u), \lambda(v)\} \neq \{R, T\}$.

Задача состоит в нахождении $TR$-паросочетания с максимальным по мощности множеством $M$.

Все три указанных обобщения задачи о паросочетании, как показано в [224], являются NP-полными проблемами.

**2. Пути в графе.** Для графа $G = (V, E)$, у которого каждое ребро $e$ снабжено «длиной» $l(e)$, являющейся неотрицательным действительным числом, задача о кратчайшем пути формулируется следующим образом:

а) Найти кратчайший путь между заданной парой вершин $s$ и $t$.

б) Найти кратчайшие пути между заданной вершиной $s$ и всеми остальными вершинами.

в) Найти кратчайшие пути между всеми парами вершин.

Для решения этих задач были предложены эффективные алгоритмы. Для задачи а) имеется алгоритм Дейкстры (1959 г.) со сложностью $O(|V|)$. Для задачи б) — алгоритм, принадлежащий ему же (1959 г.), со сложностью $O(|V|^2)$. Для задачи в) имеется алгоритм Флойда (1962 г.) со сложностью $O(|V|^3)$. Данная проблематика получила дальнейшее развитие. Так, в работе [126] рассмотрены следующие задачи. Пусть $b$ — верхняя граница степени вершин графа $G$ и пусть фиксированы множества $S \subseteq V$ и $F \subseteq V$. Можно сформулировать задачи, связанные с путями из $S$ в $F$.

$\Pi_1$: Определить, существует ли путь из $S$ в $F$.

$\Pi_2$: Если существует путь из $S$ в $F$, то найти его.

$\Pi_3$: Найти длину кратчайшего пути из $S$ в $F$.

$\Pi_4$: Найти кратчайший путь из $S$ в $F$.

$\Pi_5$: Найти число кратчайших путей из $S$ в $F$.

$\Pi_6$: Найти все кратчайшие пути из $S$ в $F$.

$\Pi_7$: Найти мощность максимального множества попарно непересекающихся путей из $S$ в $F$.

$\Pi_8$: Перечислить все элементы предыдущего множества.

$\Pi_9$: Найти путь минимальной длины из фиксированной вершины во все остальные.

На основе модификации алгоритма Дейкстры дается алгоритм со сложностью $O(|V|)$ при фиксированном значении $b$ для одновременного решения задач $\Pi_3$ и $\Pi_4$. Ясно, что задачи $\Pi_1$ и $\Pi_2$ могут быть решены с этой сложностью. Если граф $G$ неориентирован, то для задачи $\Pi_9$ предлагается алгоритм со сложностью $O(|V|\cdot b^2)$. Для задач $\Pi_6$ и $\Pi_8$ построены алгоритмы со сложностью $O(|V|)$ действий. Если для некоторого $k$ в графе $G=(V, E)$ ищется $k$ кратчайших путей, то для решения этой задачи Лолер [149] предложил алгоритм со сложностью $O(|V|^3 k \log k)$. Имеются также труднорешаемые задачи, связанные с кратчайшими путями. Например, пусть задан граф $G=(V, E)$ с двумя выделенными вершинами $s, t \in V$ и для каждого $e \in E$ заданы два натуральных числа: «длина» $l(e)$ и «вес» $w(e)$, а также два натуральных числа $K$ и $W$.

Требуется установить, существует ли в $G$ простой путь из $s$ в $t$, веса не более $W$ и длины не более $K$. Эта задача NP-полна (см. [5]). Другая задача NP-трудна. Пусть заданы граф $G=(V, E)$ с двумя выделенными вершинами $s$ и $t$ и для каждого ребра $e$ задано натуральное число — длина $l(e)$, а также положительные целые числа $B$ и $K$.

Требуется установить, существует ли в $G$ $K$ различных путей из $s$ в $t$, веса которых не превосходят $B$?

Эффективные алгоритмы решения задач, связанных с расстоянием в графах для случая невзвешенных ребер, получили Бут и Липтон [63]. Эти алгоритмы основаны на бинарном поиске и быстром умножении матриц. Пусть $M(n)$ — число действий алгоритма умножения $(n\times n)$-матриц. Ими предложены алгоритмы для нахождения диаметра графа, центра графа, кратчайших путей между всеми парами вершин за время $O(M(n)\log n)$, $n=|V|$. Если для графа $G=(V, E)$ имеется такое число $\rho$, что $\rho/2\leqslant d(i)\leqslant 2\rho$ (условие псевдооднородности), где $d(i)$ — степень вершины $i$, для всех $i\in V$, то в этом случае для $G$ предлагается алгоритм вычисления всех расстояний с числом действий $O((n^3M(n))^{1/2})$.

Авторы работы [248] получили нижнюю оценку в задаче нахождения кратчайших путей между всеми парами вершин в графе при условии, что сложность алгоритма $L$ оценивается высотой дерева решений. На основе изучения мощностей множества граней фиксированной размерности в полиэдре, определенном линейными формами с коэффициентами, являющимися строками в матрице длин ребер, утверждается, что $L\geqslant O(|V|^2\log|V|)$. Однако приведенное в [248] доказательство ошибочно и, значит, данную оценку нельзя считать установленной.

Известно, что если в произвольном графе выделены $k$ пар вершин $(s_i, t_i)$, $i=1, \ldots, k$, то задача существования $k$ вершинно непересекающихся путей $P_i$ из $s_i$ в $t_i$, $i=1, \ldots, k$, является NP-полной. В работе [186] для $k=2$ приведен алгоритм определения двух вершинно непересекающихся путей $P_1$ (из $s_1$ в $t_1$) и $P_2$ (из $s_2$ в $t_2$) за время $O(|V|\cdot|E|)$.

Проблема покрытия путями ставится так. Дан произвольный орграф $G=(V, E)$ и натуральное число $k$. Требуется определить, существует ли множество из $k$ вершинно непересекающихся путей, которые покрывают все вершины графа $G$. Для произвольного орграфа эта проблема является NP-полной даже для случая $k=1$. В работе [121] построен алгоритм решения данной задачи со сложностью $O(|V|\cdot|E|)$ для редуцируемых потоковых графов. Потоковый граф $G=(V, E, s)$ — это орграф, для которого каждая вершина достижима из начальной вершины $s$. На потоковом графе можно определить две операции $T_1$ и $T_2$, где $T_1$ — операция удаления циклов, а $T_2$ — операция, которая заменяет пару вершин $x$, $y$ на новую вершину $z$ и удаляет соответствующее ребро $\{x, y\}$. Если предельный граф $G_F$, полученный применением этих операций (известно, что он единственный), состоит из единственной вершины, то $G$ называется редуцируемым.

Для произвольных потоковых графов задача покрытия путями также NP-полна.

В [49] рассмотрена задача нахождения доминирующих множеств с ограничениями на длины путей в них. Для орграфа $G=(V, E)$ подмножество $U\subseteq V$ называется доминирующим множеством, если для любой вершины $y\in V\setminus U$ найдется вершина $x\in U$ такая, что $\{x, y\}\in E$. Рассматривается следующая проблема: по данному орграфу и натуральному числу $k$ определить, есть ли в орграфе доминирующее множество, не содержащее ориентированных путей длины $k$ по вершинам этого множества. Для любого фиксированного $k\geqslant 2$ доказывается NP-полнота данной задачи.

Другой цикл NP-полных задач, связанных с путями в графах, получен в [127].

Пусть $s$, $t$ — различные вершины графа $G$. Формулируются четыре близкие задачи, которым можно дать следующую единообразную формулировку: найти максимально возможное число непересекающихся по ребрам (внутренним вершинам) простых цепей из $s$ в $t$, имеющих длину $k$ (длину, не большую, чем $k$). Все четыре задачи, получаемые комбинацией «вершины — ребра» и «длина равна $k$ — длина не превышает $k$» являются NP-полными, начиная с $k=5$.

В работе [59] рассмотрена следующая задача. Суперконцентратором называется ориентированный ациклический граф с $n$ вершинами, помеченными как входы, и с $n$ вершинами, помеченными как выходы, такой, для любого множества $S$ из $m(m\leqslant n)$ входов и любого множества $T$ из $m(m\leqslant n)$ выходов существует $m$ вершинно непересекающихся путей из $S$ в $T$. Существование суперконцентраторов было установлено Валиантом (1975 г.). В данной работе доказывается, что проблема распознавания, является ли данный граф суперконцентратором, принадлежит классу CONP.

**3. Циклы в графе.** Задача перечисления циклов в графе $G=(V, E)$ заключается в построении алгоритма, который бы перечислял циклы в некотором порядке. Этой задаче было посвящено значительное количество работ.

Так, В. А. Арлазаров, А. В. Усков, И. А. Фараджев [1] предложили алгоритм, перечисляющий все циклы орграфа в лексикографическом порядке за время $O(|V|\cdot|E|\cdot Z(G))$, где $Z(G)$ — число циклов в графе. Джонсон (1975 г.) построил алгоритм, использующий поиск в глубину со сложностью $O((|V|+|E|)(Z(G)+1))$. Обычно алгоритмы, основанные на использовании фундаментального множества циклов графа, работают хуже, чем алгоритмы, использующие поиск в глубину. В связи с этим в работе [227] для планарных графов предложен алгоритм, работающий на векторах пространства циклов и перечисляющий все циклы планарного графа со сложностью $O((|V|+|E|)Z(G))$ и памятью $O(|V|+|E|)$, т. е. алгоритм с той же сложностью, что и алгоритм, использующий поиск в глубину.

В [228] этот алгоритм усовершенствован и получена временна́я сложность $O(|V|+|V|Z(G))$ с памятью $O(|V|)$. Трущинский [235] рассмотрел задачу нахождения цикла длины, большей, чем три, и не имеющего диагоналей. Представленный для решения этой задачи алгоритм имеет сложность $O((|V|+|E|)\log|V|)$.

В работе [128] рассматривается задача нахождения минимального цикла в графе $G=(V, E)$. Для решения этой задачи предложено несколько алгоритмов. Цикл называется почти минимальным, если его длина превышает длину минимального цикла не более чем на 1. Представлен алгоритм со сложностью $O(|V|^2)$ для нахождения почти минимального цикла и алгоритм нахождения минимального цикла со сложностью $O(|V|^2)$ в среднем. Кроме того, предложена процедура со сложностью $O(|V|^2)$ сведения задачи о нахождении минимального цикла к задаче нахождения треугольника (цикла длины три) и построены алгоритмы для обнаружения цикла длины три:

1) Алгоритм с использованием корневых деревьев с оценкой $O(|E|^{3/2})$ (для планарных графов $O(|V|)$).

2) Алгоритм с непосредственной проверкой каждого ребра, входит ли оно в треугольник со сложностью $O(|V|\cdot|E|)$.

3) Алгоритм с использованием быстрого умножения матриц со сложностью $O(|V|^{\log 7})$.

В работе Карпа (РЖМат, 1979, 4В473) изучается характеризация циклового среднего в орграфе. Если $G=(V, E)$ — орграф, у которого каждое ребро $e\in E$ снабжено весом $w(e)$ являющимся действительным числом, то, по определению, вес последовательности ребер $\sigma=e_1\ldots e_p$ есть $w(\sigma)=\sum_{i=1}^{p} w(e_i)$.

Средним весом называется величина $m(\sigma)=\frac{w(\sigma)}{p}$.

Пусть $\lambda^*=\min_c m(c)$, где $c$ пробегает все контуры графа $G$. Величина $\lambda^*$ называется минимальным цикловым средним. Предложен алгоритм вычисления $\lambda^*$ для графа $G=(V, E)$ со сложностью $O(|V|\cdot|E|)$.

В работе [111] установлен факт, что для нахождения гамильтонова цикла в 4-связном планарном графе существует алгоритм, временна́я и емкостная сложность которого равна $O(|E|^3)$. NP-полнота задачи о гамильтоновом пути в различных графах установлена в [56].

В [197] рассмотрена задача о минимальных доминирующих циклах. Цикл называется доминирующим, если множество его вершин — доминирующее множество. Показано, что проблема нахождения доминирующего цикла минимального размера для 2-связных планарных графов NP-полна.

**4. Остовные деревья.** Задача о нахождении остовного дерева для графа $G=(V, E)$, у которого каждое ребро $e\in E$ снабжено положительным действительным весом $w(e)$, заключается в нахождении дерева $T=(V, E')$, где $E'\subseteq E$ и для которого величина $w(T)=\sum_{e\in E'} w(e)$ минимальна.

Краскал (1956 г.) и Прим (1957 г.) предложили эффективные алгоритмы для решения этой задачи, которые в дальнейшем обобщались и модернизировались.

Рассмотрим некоторые из полученных в этом направлении результатов.

Тарьян [229] предложил алгоритм нахождения $k$ непересекающихся по ребрам остовных деревьев, сложность которого — $O(k^2|E|^2)$ операций.

Если $k=2$, то получен алгоритм со сложностью $O|V|\cdot|E|)$. Габов (РЖМат, 1979, 3В557) рассмотрел следующую задачу. Обозначим через $d(r)$ степень вершины в остовном дереве $T$. Фиксируется величина $r$ и положительное целое число $b$. Требуется построить минимальное остовное дерево с ограничением $d(r)=b$ (варианты задачи: $d(r)\geqslant b$, либо $d(r)\leqslant b$). Для решения данной задачи получен алгоритм со сложностью $O(|E|\log\log|V|+|V|\log|V|)$ и объемом памяти $O(|E|+|V|)$.

Задача перечисления всех остовных деревьев рассмотрена в [104]. Предложен алгоритм решения данной задачи с временно́й сложностью $O(|V|+|E|+|E|\cdot N)$, где $N$ — число остовных деревьев. Память алгоритма — $O(|V|+|E|)$. Остовное дерево $T_k$ называется $k$-м по порядку минимальным остовным деревом, если:

1) $T_1$ — минимальное остовное дерево;

2) $T_k$ ($k \geqslant 2$) — остовное дерево, имеющее минимальный вес среди остовных деревьев, отличных от $T_1, T_2, \ldots, T_{k-1}$. В работе [140] предлагается алгоритм поиска $k$ минимальных остовных деревьев с временем работы $O(k \cdot |E| + \min(|E| \log\log|V|, |V|^2))$ и объемом памяти $O(k+|E|)$.

Заметим, что задача о $k$ наилучших остовных деревьях NP-трудна. Она формулируется следующим образом: Пусть заданы граф $G=(V, E)$ и вес $w(e)$ каждого ребра $e \in E$, являющийся неотрицательным целым числом, а также натуральные числа $K$ и $B$. Требуется установить, существует ли в $G$ $k$ различных остовных деревьев, общий вес которых не превосходит $B$ (см. [5]). В работе [194] доказано, что задача выделения в планарном графе остовного дерева минимального диаметра и веса, ограниченного произвольно заданной константой, является NP-полной. Для произвольных графов это было установлено в книге [5]. В работе Г. Н. Копылова [11] описывается алгоритм со сложностью $O(|V|^3)$ для отыскания в графе с неотрицательными весами ребер остовного дерева с минимальным диаметром.

В заключение приведем некоторые результаты, связанные с деревьями.

В [191] изучаются реберные разметки для деревьев. Пусть $G$ — граф с $n$ ребрами и $w$ — множество из $n$ чисел (весов). Произвольное взаимно однозначное соответствие $f$ между ребрами графа $G$ и весами из $w$ называется реберной разметкой. Для данной реберной разметки $f$ и произвольных вершин $i$ и $j$ графа $G$ определено $d_f(i, j)$ как минимум расстояний между $i$ и $j$ по всем цепям, соединяющим $i$ и $j$. Диаметр графа для данной разметки $f$ определяется соотношением $D_f(G) = \max\limits_{i,j} d_f(i, j)$, где максимум берется по всем парам вершин в $G$. Величина $R_f(G) = \min\limits_i \{\max\limits_j \{d_f(i, j)\}\}$ называется радиусом графа $G$ для данной разметки $f$. Пусть дано дерево $T$ с $n$ ребрами и множество $w$ с $n$ неотрицательными весами и натуральное число $k$. Требуется выяснить, существует ли разметка $f$ такая, что $D_f(T) = k$ (или $D_f(T) \leqslant k$, или $D_f(T) \geqslant k$). Показано, что все три задачи являются NP-полными. С другой стороны, можно оформулировать аналогичные проблемы для случая весов $\{0, 1\}$.

В [191] показывается, что нахождение такой разметки с минимальным радиусом (или минимальным диаметром) может быть осуществлено за $O(n)$ шагов. В работе [94] представлен алгоритм со сложностью $O(n)$, который находит разбиение произвольного дерева на минимальное число поддеревьев с диаметром, не превосходящим заданного числа $k$. Для произвольных графов указанные задачи, как известно, являются NP-полными.

**5. Разрезы.** Если дан граф $G=(V, E)$ и разбиение множества вершин $V$ на два непересекающихся множества $V_1$ и $V_2$, то множество ребер $C=C(V_1, V_2)$ графа $G$, одна концевая вершина которых лежит в $V_1$, а другая в $V_2$, называется разрезом. Если в графе выделены две вершины $s$ и $t$ такие, что $s \in V_1$, $t \in V_2$, то соответствующий разрез называется $(s, t)$-разрезом. Если $(s, t)$-разрез не содержит других $(s, t)$-разрезов, то он называется правильным.

Ряд работ был посвящен задаче перечисления разрезов и правильных разрезов в графе. Первоначально предложенные для решения этой задачи алгоритмы требовали $O(|V| \cdot |E| \cdot R + |V| + |E|)$ операций, где $R$ — число разрезов графа.

В [236, 237] было представлено два алгоритма со сложностью $O((|E|+|V|)(R+1))$ и с памятью одного $O(|V|^2)$, а другого $O(|V|+|E|)$. В [238] эти алгоритмы модернизируются для решения задачи перечисления правильных $(s, t)$-разрезов с теми же оценками эффективности.

Следующая задача рассмотрена в работе [124]. Пусть задан неориентированный граф $G=(V, E)$, каждому из ребер $e \in E$ которого поставлено в соответствие неотрицательное число $l(e)$ — расстояние между вершинами, инцидентными этому ребру. Пусть $S \subset V$ и $C(S, V \setminus S)$ — соответствующий разрез. Рассматривается задача определения множества $S_0$, для которого $|S_0|=K$ ($K$ — фиксированное целое) и

$$\min_{e \in C(S_0, V \setminus S_0)} l(e) = \max_{S \subset V, |S|=K} \min_{e \in C(S, V \setminus S)} l(e).$$

В работе строится алгоритм решения указанной задачи со сложностью $O(|V|^2 \log |V|)$. Заметим, задачи о максимальном разрезе и минимальном разрезе с ограничениями для взвешенного графа NP-полны. Они формулируются следующим образом.

1) Пусть задан граф $G=(V, E)$, натуральный вес $w(e)$ для каждого ребра $e \in E$ и натуральное число $K$. Требуется установить, существует ли разбиение множества $V$ на два непересекающихся множества $V_1$ и $V_2$ такое, что сумма весов ребер из $E$, соединяющих вершины из множеств $V_1$ и $V_2$, не меньше, чем $K$.

2) Пусть задан граф $G=(V, E)$ с двумя выделенными вершинами $s$ и $t$, натуральный вес $w(e)$ для каждого ребра $e \in E$, а также натуральные числа $B$ и $K$ ($B \leqslant |V|$). Требуется установить, существует ли разбиение множества $V$ на два непересекающихся множества $V_1$ и $V_2$ такое, что $s \in V_1$, $t \in V_2$, $|V_1| \leqslant B$, $|V_2| \leqslant B$ и сумма весов ребер из $E$, соединяющих вершины из $V_1$ и $V_2$, не превосходит $K$ (см. [5]).

В работе [198] представлен алгоритм нахождения минимального $(s, t)$-сечения в плоской неориентированной сети, у которой веса ребер — положительные, действительные числа. Если значения весов произвольны, то представленный алгоритм имеет временнýю сложность $O(|V|\log^2|V|)$ по критерию единичной сложности на РАМ. Если значения весов не превосходят $|V|^{O(1)}$, то алгоритм требует времени $O(|V|\log|V|\log\log|V|)$. Для случая, когда все ребра имеют единичный вес, алгоритм имеет временнýю сложность $O(|V|\log|V|)$. Для сравнения укажем, что алгоритм Гомори и Ху (1961 г.) давал $O(|V|^2\log|V|)$ действий. Другой алгоритм представлен в [119].

**6. Раскраска.** Граф $G=(V, E)$ называется $k$-хроматическим, если его вершины можно раскрасить с использованием $k$ цветов так, чтобы не было двух смежных вершин одного цвета. Аналогично определяется реберная $k$-раскрашиваемость. Если заданы произвольные граф $G=(V, E)$ и натуральное число $k$ и спрашивается, является ли граф $G$ $k$-хроматическим, то данная задача, как известно, является NP-полной. Она остается NP-полной даже для планарных графов. В то же время для некоторых классов графов она полиномиальна. Ряд работ был посвящен раскраске двудольных графов и мультиграфов. Так, в работе [101] Габов представил алгоритм нахождения минимальной реберной раскраски двудольного мультиграфа, который требует времени $O(|V|^{1/2}\cdot|E|\log|V|+|E|)$ и памяти $O(|E|+|V|)$.

Затем в работах [102, 103] Габов и Карив провели ряд модернизаций этого алгоритма и представили алгоритмы нахождения минимальной реберной раскраски со следующими характеристиками: $T_1=O(|E|(\log|V|^2)$ и $T_2=O(|V|^2\log|V|)$ — для двудольных графов, а также для мультиграфов со сложностью

$$T_1=O(|V|\cdot|E|\cdot\log k;\quad T_2=O(|E|\cdot k\cdot\log|V|);$$

$$T_3=O(|E|\cdot(|V|\log|V|)^{1/2});\quad T_4=O(|V|^2\log k),$$

где $k$ — максимальная кратность ребра; $|E|$ — число ребер без учета кратностей.

Данные алгоритмы раскраски основываются на алгоритмах нахождения максимального паросочетания. Однако в работе [83] было замечено, что достаточно уметь быстро строить паросочетание, покрывающее все вершины максимальной степени.

Представлено два алгоритма построения паросочетания двудольного графа, покрывающего все вершины максимальной степени. Данные алгоритмы имеют следующие оценки сложности:

$$T_1=O\left(|E|\log\frac{|E|}{\sigma}\right)\leqslant O(|E|\log|V|),$$

где $\sigma$ — максимальная степень вершин,

$$O(|E|),\ \text{если}\ |E|\geqslant O(|V|\log|V|(\log\log|V|)^2),$$

$$O(|V|\log|V|(\log\sigma)^2),\ \text{если}\ |E|<O(|V|\log|V|(\log\log|V|)^2).$$

На основе данных методов и метода Габова — Карива работ [102, 103] предлагается алгоритм нахождения минимальной реберной раскраски двудольного графа за время $O(|E|\log|V|)$.

В работе [79] приводится алгоритм со сложностью $O(|V|)$ для 5-раскрашивания планарного графа. Ранее алгоритмы такого типа имели оценку $O(|V|\log|V|)$.

В [122] показывается, что проблема $k$-раскрашиваемости остается NP-полной даже для кубических графов. Другая NP-полная проблема о раскраске указана в [120].

**7. Проверка свойств графов.** К данному направлению относится широкий круг вопросов, мы коснемся только некоторых из них.

В работе [200] авторы рассмотрели задачу о сложности распознавания свойств графов по матрице смежностей и установили, что если $P$ — нетривиальное, монотонное свойство, независимое от разметки вершин и наличия петель, то в худшем случае необходимо $O(|V|^2)$ операций.

В [130] для некоторых свойств графов, таких как планарность, наличие двусвязных и трехсвязных компонент и других предложены алгоритмы решения, требующие памяти всего $O(\log^2|V|)$. Эти алгоритмы основаны на алгоритмах обращения матриц порядка $n$ с элементами в двоичной записи длины $O(|V|)$ на машине Тьюринга с памятью $O(\log^2|V|)$. Стоком орграфа $G=(V, E)$ называется вершина с $|V|-1$ входящими в нее дугами и не имеющая исходящих дуг.

Показано [144], что для определения того, имеет ли сток орграф, заданный матрицей смежности размера $|V|\times|V|$, достаточно $3|V|-\lfloor\log|V|\rfloor-3$ обращений к матрице, причем эта оценка неулучшаема, т. е. нет алгоритма с меньшей сложностью.

Проблема удаления вершин заключается в следующем: для фиксированного свойства графа $P$ требуется найти минимальное число вершин, после удаления которых граф удовлетворял бы свойству $P$. Пусть свойство $P$ таково, что проверка, обладает ли этим свойством граф $G=(V, E)$, осуществляется за полиномиальное время. Свойство $P$ называется нетривиальным, если им обладает бесконечно много графов и одновременно не обладает бесконечно много графов.

Свойство $P$ называется наследственным на порожденных подграфах, если для любого графа, обладающего свойством $P$, свойством $P$ будут обладать и все вершинно порожденные подграфы. В работах [153, 247] установлено, что для любого нетривиального и наследственного на порожденных подграфах свойства проблема удаления вершин NP-полна как для ориентированных, так и для неориентированных графов. Примерами таких свойств являются: транзитивность, двудольность, транзитивная ориентируемость, отсутствие циклов заданной длины.

Другие проблемы, связанные с удалением вершин, изучаются в работах [147, 89], в которых получен список новых NP-проблем.

В [147] приведены следующие NP-полные проблемы. Задан неориентированный граф $G$ и натуральное число $k$. Требуется выяснить, можно ли удалением некоторых $k$ вершин получить: а) пустой подграф; б) объединение полных графов: в) объединение непересекающихся деревьев; г) объединение гамильтоновых графов.

Другая NP-полная задача, связанная с удалением вершин, представлена в [89]. Определим дельта-оператор $\delta(S)$, действующий на подмножестве $S$ множества $V$ вершин графа $G=(V, E)$ и равный числу различных вершин из $V \setminus S$, которые соединены ребром с некоторой вершиной из $S$. Проблема дельта-оператора ставится так: для заданного $n$-вершинного графа $G$ и действительного числа $p>1$ найти последовательность $S_0 \subset \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n$ с условием $|S_i|=i$, которая минимизирует выражение $\sum_{i=0}^{n} p^{\delta|S_i|}$, $n=|V|$.

Доказывается NP-полнота общей проблемы оператора, а для корневых и некорневых деревьев приведены алгоритмы решения данной проблемы со сложностью $O(n)$ и $O(n^3)$, соответственно. Другая NP-полная проблема, связанная с пополнением графа ребрами так, чтобы он обладал заданным свойством, представлена в работе [99].

В [110] рассмотрена такая задача. Пусть $G=(V, E)$ — граф; обозначим через $C(V, E)$ его транзитивное замыкание. Транзитивным сокращением ациклического графа $(V, E)$ называется наименьший граф $(V, R)$ такой, что $C(V, E)=C(V, R)$, $R \subseteq E$.

Авторами построен алгоритм одновременного нахождения транзитивного замыкания и транзитивного сокращения ациклического графа $(V, E)$. Сложность представленного алгоритма — $O(|V| \cdot |R|+|E|)$.

Известно, что задача о кликовом покрытии графа NP-полна. Строится [125] полиномиальный алгоритм для нахождения кликового покрытия графов, не содержащих полного двудольного подграфа $K_{1,3}$ в качестве порожденного подграфа. Дается [190] алгоритм со сложностью $O(|V|)$, перечисляющий все клики планарного графа $G=(V, E)$.

В работах [162, 166] изучаются проблемы, родственные проблеме изоморфизма. Так, в [162] доказана NP-полнота некоторых проблем, связанных со свойствами автоморфизмов графа. В частности, NP-полной является проблема: «Имеет ли данный граф автоморфизм без неподвижных точек?» Эта проблема остается NP-полной, если ее ограничить только автоморфизмами порядка 2.

Другая проблема такого рода рассмотрена в [166]. Пусть $G=(V, E)$ — граф с множеством вершин $V=\{v_1, \ldots, v_n\}$ и множеством ребер $E=\{e_1, \ldots, e_m\}$. Через $D(G)$ обозначим набор подграфов графа $G$ вида: $G-v_1$, $G-v_2, \ldots$, $G-v_n$, а через $D_e(G)$ — набор подграфов графа $G$ вида: $G-e_1$, $G-e_2, \ldots$ $\ldots, G-e_m$. Набор подграфов $H=\{H_1, \ldots, H_n\}$ называется правильной колодой, если для некоторого графа $G$ существует биекция $\psi: H \to D(G)$ такая, что $H_i$ и $G-v_i$ изоморфны для всех $i=1, \ldots, n$.

В работе, в частности, показано, что проблема изоморфизма графов полиномиально сводится к проблемам построения графа $G$ по заданному набору $D(G)$ либо по заданному набору $D_e(G)$.

Работы [123, 195, 55] посвящены исследованию сложности некоторых задач, связанных с разбиением графов. Так, в [123] доказано, что для любого фиксированного $n, n \geqslant 3$, проблема определения, существует ли разбиение ребер произвольного графа на подграфы, изоморфные полному графу $K_n$, является NP-полной.

В [195] рассматривается задача разложения графа на $k$ факторов (непересекающихся по ребрам остовных подграфов) диаметра, не превышающего заданные $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Аналогично ставится задача разложения графа $G$ на $k$ факторов радиуса, не превышающего заданные $r_1, r_2, \ldots, r_k$.

Показано, что обе сформулированные задачи являются NP-трудными. Это справедливо даже в случае, если $k=2$, $d_1=d_2=2$ или $r_1=r_2=2$.

Другие опубликованные новые NP-полные комбинаторные проблемы указаны в списке литературы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Арлазаров В. А., Усков А. В., Фараджев И. А.,* Алгоритм нахождения всех простых циклов в ориентированном графе. В сб. «Исслед. по дискретной мат.». М.: Наука, 1973, 178—183 (РЖМат, 1973, 9В375)
2. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.,* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979, 535 с.
3. *Воробьев Н. Н. (мл.),* О сложности распознавания устойчивости в графах. Многошагов., дифференц., бескоалицион. и кооп. игры и их прил. Калинин, 1982, 110—114 (РЖМат, 1982, 9В525)
4. *Гордеев Э. Н.,* Новые оценки в задаче о покрытии. Моделир. и оптимиз. слож. систем упр. М., 1981, 116—122 (РЖМат, 1982, 3В500)
5. *Гэри М., Джонсон Д.,* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982, 416 с. (РЖМат, 1982, 12В679К)
6. *Егорычев Г. П.,* Полиномиальное тождество для перманента. Мат. заметки, 1979, *26,* № 6, 961—964 (РЖМат, 1980, 4А372)
7. —, Решение проблемы Ван-дер-Вардена для перманентов. Ин-т физ. СО АН СССР. Препр., 1980, № 13М, 11 с. (РЖМат, 1981, 2А363)
8. —, Новые формулы для перманента. Докл. АН СССР, 1980, *254,* № 4, 784—787 (РЖМат, 1981, 2В450)
9. —, Доказательство гипотезы Ван-дер-Вардена для перманентов. Сиб. мат. ж., 1981, *22,* № 6, 65—71 (РЖМат, 1982, 3В537)

10. *Козина А. В.,* О максимальных паросочетаниях. Вопр. кибернет. (Москва), 1978, № 26, 145—155 (РЖМат, 1980, 11В541)
11. *Копылов Г. Н.,* Нахождение остовного дерева минимального диаметра. Эвристич. алгоритмы оптимиз. Ярославль, 1981, 50—57 (РЖМат, 1982, 1В850)
12. *Корнеенко Н. М.,* О сложности вычисления расстояния между графами. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1982, № 1, 10—13 (РЖМат, 1982, 6В650).
13. *Кристофидес Н.,* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978, 432 с.
14. *Кузюрин Н. Н.,* Асимптотическое исследование задачи о покрытии. Пробл. кибернет. (Москва), 1980, № 37, 19—56 (РЖМат, 1981, 1В546)
15. —, О минимальных покрытиях вершин фиксированного веса в единичном $n$-мерном кубе. Сб. работ по мат. кибернет. М., 1981, 143—152 (РЖМат, 1982, 6В508)
**16. —, К задаче об $\alpha$-глубине (0,1)-матриц.** Вопр. кибернет. (Москва), 1982, № 86, 131—139 (РЖМат, 1982, 6В509)
17. *Минк X.,* Перманенты. М.: Мир, 1982, 213 с. (РЖМат, 1983, 2А289К)
18. *Нигматуллин Р. Г.,* Распознавание максимальности паросочетания за $O(m+n)$ операций. Rostock. Math. Kolloq., 1980, № 13, 49—64 (РЖМат, 1981, 4В486)
19. —, Проблема нижних оценок сложности и теория NP-полноты (обзор). Изв. вузов. Мат., 1981, № 5, 17—25 (РЖМат, 1981, 11В597)
20. *Носов В. А., Сачков В. Н., Тараканов В. Е.,* Комбинаторный анализ. Матричные проблемы, теория выбора. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Теория вероятностей. Мат. стат. Теор. кибернет., 1981, *18,* 53—93 (РЖМат, 1981, 10В520)
21. *Плесневич Г. С., Сапаров М. С.,* Алгоритмы в теории графов. Ашхабад: Ылым, 1981, 311 с. (РЖМат, 1981, 12В795К)
22. *Реза В. Н.,* К гипотезе Ван-дер-Вардена о бистохастических матрицах. В сб. «Актуальн. пробл. ЭВМ и программир.». Днепропетровск, 1981, 121—123 (РЖМат, 1982, 1А438)
23. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. М.,* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980, 476 с. (РЖМат, 1980, 11В451К)
24. *Сачков В. Н.,* Комбинаторные свойства неотрицательных матриц. Вопр. кибернет. (Москва), 1978, № 26, 37—50 (РЖМат, 1980, 9В507)
25. —, Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982, 384 с.
26. *Солодовников В. И.,* Распространение оценки Штрассена на решение произвольных систем линейных уравнений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1979, *19,* № 3, 581—593 (РЖМат, 1979, 10Б1094)
27. *Сотсков Ю. Н.,* Об ориентировании ребер смешанного графа. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1981, № 5, 22—24 (РЖМат, 1982, 2В620)
28. *Супруненко Д. А.,* Об эквивалентности (0,1)-матриц. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1980, № 5, 5—9 (РЖМат, 1981, 2В465)
29. *Тараканов В. Е.,* К задаче классификации (0,1)-матриц. Вопр. кибернет. (Москва), 1980, № 64, 67—80 (РЖМат, 1980, 12В457)
30. —, *Комбинаторные задачи на бинарных матрицах. Комбинаторн. анализ.* М., 1980, № 5, 4—15(РЖМат, 1981, 4В397)
31. —, О глубине (0,1)-матриц с одинаковыми строчными и одинаковыми столбцевыми суммами. Мат. заметки, 1983, *34,* № 3, 463—476
32. *Устюжанинов В. Г.,* Типичная длина минимального покрытия у таблиц со спектром. Кибернетика, 1980, № 5, 24—27 (РЖМат, 1981, 4В371)
33. *Фаликман Д. И.,* Доказательство гипотезы Ван-дер-Вардена о перманенте дважды стохастической матрицы. Мат. заметки, 1981, *29,* № 6, 931—938 (РЖМат, 1981, 12А364)
34. *Фляйшер В., Хион Я.,* Некоторые задачи о (0,1)-матрицах, связанные с теорией автобусных расписаний. Зап. Тартус. Ун-та, 1981, № 556, 75—84 (РЖМат, 1981, 7В582)

35. *Хачиян Л. Г.*, Полиномиальный алгоритм в линейном программировании. Докл. АН СССР, 1979, *244*, № 5, 1093—1096 (РЖМат, 1979, 6Б896)
36. *Шевелев В. С.*, О числе трансверсальных семейств двухэлементных подмножеств конечного множества. Вопр. техн. диагност. Ростов н/Д, 1981, 118—123 (РЖМат, 1982, 2В543)
37. Aharoni R., A problem in rearrangements of (0, 1) matrices. Discrete Math., 1980, *30*, № 3, 191—201 (РЖМат, 1980, 10В461)
38. —, Represententing matrices. J. Combin. Theory, 1980, *A 29*, № 2, 151—165 (РЖМат, 1981, 2В466)
39. —, Extreme symmetric doubly stochastic matrices. J. Combin. Theory, 1980, *A 29*, № 2, 263—265 (РЖМат, 1981, 2В467)
40. *Aigner M.*, Selecting the top three elements. Discrete Appl. Math., 1982, *4*, № 4, 247—267 (РЖМат, 1983, 2В454)
41. *Alder A., Strassen V.*, The algorithmic complexity of linear algebras. Lect. Notes Comput. Sci., 1981, *122*, 343—354 (РЖМат, 1982, 6А334)
42. *Anstee R. P.*, Properties of (0, 1)-matrices with no triangles. J. Combin. Theory, 1980, *A29*, № 2, 186—198 (РЖМат, 1981, 3В472)
43. —, Properties of (0, 1)-matrices with forbidden configurations. Combinatorics '79. Part 2. Amsterdam e. a., 1980, 177—179 (РЖМат, 1981, 5В425)
44. —, Properties of (0, 1)-matrices without certain configurations. J. Combin. Theory, 1981, *A31*, № 3, 256—269 (РЖМат, 1982, 5В452)
45. —, Triangular (0, 1)-matrices with prescribed row and column sums. Discrete Math., 1982, *40*, № 1, 1—10 (РЖМат, 1982, 10В467)
46. —, Properties of a class of (0, 1)-matrices covering a given matrix. Can. J. Math., 1982, *34*, № 2, 438—453 (РЖМат, 1983, 1В625)
47. —, The network flows approach for matrices with given row and column sums. Discrete Math., 1983, *44*, № 2, 125—138 (РЖМат, 1983, 6В466)
48. *Bapat R., Raghavan T. E. S.*, On diagonal products of doubly stochastic matrices. Linear Algebra and Appl., 1980, *31*, 71—75 (РЖМат, 1981, 1А377)
49. *Bar-Yehuda R., Vishkin U.*, Complexity of finding $k$-path-free dominating sets in graphs. Inf. Process. Lett., 1982, *14*, № 5, 228—232 (РЖМат, 1983, 2В549)
50. *Bautz M.*, Über (0,1)-Determinanten mit großen Absolutwerten. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau, 1981, *27*, № 4, 39—55 (РЖМат, 1982, 3А420)
51. *Bazelow A. R.*, Integer matrices with fixed row and column sums. Ann. N. Y. Acad. Sci., 1979, *319*, 593—594 (РЖМат, 1982, 10В460)
52. *Beister J.*, A relationship between two lower bounds on the cardinality of a minimal cover. Digit. Processes, 1980, *6*, № 4, 217—225 (РЖМат, 1982, 5В440)
53. *Berge C.*, Packing problems and hypergraph theory: a survey. Discrete Optimization. Vol. 1. Amsterdam e. a., 1979, 3—37 (РЖМат, 1980, 5В408)
54. —, Balanced matrices and property ($G$). Math. Program. Study, 1980, *12*, 163—175 (РЖМат, 1980, 11В437)
55. *Bertolazzi P., Lucertini M., Marchetti S.*, Analysis of a class of graph partitioning problems. RAIRO. Inf. théor., 1982, *16*, № 3, 255—261 (РЖМат, 1983, 3В572)
56. *Bertossi A. A.*, The edge Hamiltonian path problem is NP-complete. Inf. Process. Lett., 1981, *13*, № 4—5, 157—159 (РЖМат, 1982, 7В591)
57. *Bevis J. H., Hall F. J., Katz I. J.*, Integer generalized inverses of incidence matrices. Linear Algebra and Appl., 1981, *39*, 247—258 (РЖМат, 1982, 3А425)
58. *Billington E. J.*, On lambda coverings of pairs by triples repeated elements allowed in triples. Util. Math., 1982, *C21*, May, 187—203 (РЖМат, 1983, 4В583)
59. *Blum M., Karp R. M., Vornberger G., Papadimitriou C. H., Yannakakis M.*, The complexity of testing whether a graph is a superconcentrator. Inf. Process. Lett., 1981, *13*, № 4—5, 164—167 (РЖМат, 1982, 8В635)
60. *Bollobás B., Cockayne E. J.*, Graph-theoretic parameters concerning domi-

nation, independence and irredundance. J. Graph Theory, 1979, *3*, № 3, 241—249 (РЖМат, 1980, 5В496)

61. —, *Thomassen C.*, The size of connected hypergraphs with prescribed covering number. J. Combin. Theory, 1981, *B31*, № 2, 150—155 (РЖМат, 1982, 3В501)
62. *Booth K. S., Johnson J. H.*, Dominating sets in chordal graphs. SIAM J. Comput., 1982, *11*, № 1, 191—199 (РЖМат, 1982, 8В638)
63. —, *Lipton R. J.*, Computing extremal and approximate distances in graphs having unit cost edges. Acta Inf., 1981, *15*, № 4, 319—328 (РЖМат, 1982, 11В679)
64. *Borodin A., Guibas L. J., Lynch N. A., Yao A. C.*, Efficient searching using partial ordering. Inf. Process. Lett., 1981, *12*, № 2, 71—72 (РЖМат, 1981, 10В981)
65. *Brawley J. V., Hankins M.*, On distribution by rank of bases for vector spaces of matrices over a finite field. Linear Algebra and Appl., 1981, *39*, 91—101 (РЖМат, 1982, 3А411)
66. *Brenner J. L., Wang E. T. H.*, Permanental pairs of doubly stochastic matrices. II. Linear Algebra and Appl., 1979, *28*, 39—41 (РЖМат, 1980, 6А405)
67. *Bridges W. G., Mena R. A.*, Rational circulants with rational spectra and cyclic strongly regular graphs. Ars combinatoria, 1979, *8*, 143—161 (РЖМат, 1980, 10В485)
68. *Brualdi R. A.*, Matrices of 0's and 1's with total support. J. Combin. Theory, 1980, *A28*, № 3, 249—256 (РЖМат, 1980, 12В460)
69. —, Matrices of zeros and ones with fixed row and column sum vectors. Linear Algebra and Appl., 1980, *33*, 159—231 (РЖМат, 1981, 4В393)
70. —, On the diagonal hypergraph of a matrix. Combinatorics 79. Part 1. Amsterdam e. a., 1980, 261—264 (РЖМат, 1981, 7В583)
71. —, On Haber's minimum term rank formula. Eur. J. Comb., 1981, *2*, № 1, 17—20 (РЖМат, 1981, 11В506)
72. —, *Harary F., Miller Z.*, Bigraphs versus digraphs via matrices. J. Graph Theory, 1980, *4*, № 1, 51—73 (РЖМат, 1980, 11В469)
73. —, *Li Qiao*, Small diameter interchange graphs of classes of matrices of zeros and ones. Linear Algebra and Appl., 1982, *46*, 177—194 (РЖМат, 1983, 2В464)
74. —, *Ross J. A.*, On Ryser's maximum term rank formula. Linear Algebra and Appl., 1980, *29*, 33—38 (РЖМат, 1980 11В436)
75. —, —, Matrices with isomorphic diagonal hypergraphs. Discrete Math., 1981, *33*, № 2, 123—138 (РЖМат, 1981, 6В543)
76. —, —, Invariant sets for classes of matrices of zeros and ones. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *80*, № 4, 706—710 (РЖМат, 1981, 7В584)
77. *Chao Chong-Yun*, On some sets of permutation matrices. Linear Algebra and Appl., 1982, № 45, 131—134 ((РЖМат, 1983, 1А363)
78. *Chaudhuri R., Mukherjea A.*, Idempotent Boolean matrices. Semigroup Forum, 1980, *21*, № 2—3, 273—282 (РЖМат, 1981, 4В396)
79. *Chiba N., Nishizeki T., Saito N.*, A linear algorithm for five-coloring a planar graph. Lect Notes Comput. Sci., 1981, *108*, 9—19 (РЖМат, 1982, 6В637)
80. *Chiba Toru, Nishioka Ikuo, Shirakawa Isao*, An algorithm of maximal planarization of graphs. Int. Symp. Circuits and Syst. Proc., Tokyo, 1979. New York, N. Y., s. a., 649—652 (РЖМат, 1980, 10В495)
81. *Clapp M. H., Shiflett R. C.*, A Birkhoff theorem for doubly stochastic matrices with vector entries. Stud. Appl. Math., 1980, *62*, № 3, 273—279 (РЖМат, 1981, 3А366)
82. *Colbourn C. J., Colbourn M. J.*, Deciding Hadamard equivalence of Hadamard matrices. BIT (Sver.), 1981, 21, № 3, 374—376 (РЖМат, 1982, 5В453)
83. *Cole R., Hopcroft J.*, On edge coloring bipartite graphs. SIAM J. Comput., 1982, *11*, № 3, 540—546 (РЖМат, 1983, 1В676)

84. *Coppersmith D., Winograd S.,* On the asymptotic complexity of matrix multiplication. SIAM J. Comput., 1982, *11*, № 3, 472—492 (РЖМат, 1983, 1А354)
85. *Cunningham W. H., Marsh A. B.,* III, A primal algorithm for optimum matching. Math. Program. Study, 1978, *8*, 50—72 (РЖМат, 1979, 4В487)
86. *Dacić R.,* Common transversals of finite families. Publ. Inst. math., 1979, *26*, 97—99 (РЖМат, 1980, 9В465)
87. *De Caen D., Gregory D. A.,* Prime Boolean matrices. Lect. Notes Math., 1980, № 829, 76—82 (РЖМат, 1981, 4В394)
88. *Dehon M.,* Ranks of incidence matrices of (2,3)-coverings. Ars combinatoria, 1980, *9*, 131—147 (РЖМат, 1981, 4В392)
89. *Diaz J.,* The δ-operator. Math. Res., 1979, *2*, 105—111 (РЖМат, 1980, 4В367)
90. *Domanski B.,* The complexity of two decision problems for free groups. Houston J. Math., 1982, *8*, № 1, 29—38 (РЖМат, 1983, 2А113)
91. *Droesbeke F., Lorea M.,* Détermination de valeurs du nombre de Turan $T$ ($n$, 4, 6). Cah. Cent. étud. rech. opér., 1982, *24*, № 2—4, 185—191 (РЖМат, 1983, 5В484)
92. *Egorychev G. P.,* The solution of van der Waerden's problem for permanents. Adv. Math., 1981, *42*, № 3, 299—305 (РЖМат, 1982, 5А319)
93. *Ericksen W. S.,* Inverse pairs of matrices with integer elements. SIAM J. Numer. Anal., 1980, *17*, № 3, 474—477 (РЖМат, 1981, 2А366)
94. *Farley A., Hedetniemi S., Proskurowski A.,* Partitioning trees: matching, domination, and maximum diameter. Int. J. Comput. and Inf. Sci., 1981, *10*, № 1, 55—61 (РЖМат, 1982, 3В616)
95. *Fernandez de la Vega W., Lueker G. S.,* Bin packing can be solved within $1+\varepsilon$ in linear time. Combinatorica, 1981, *1*, № 4, 349—355 (РЖМат, 1982, 12В611)
96. *Foregger T. H.,* On the minimum value of the permanent of a nearly decomposable doubly stochastic matrix. Linear Algebra and Appl., 1980, *32*, Aug., 75—85 (РЖМат, 1981, 1А366)
97. *Fowler R. J., Paterson M. S., Tanimoto S. L.,* Optimal packing and covering in the plane are NP-complete. Inf. Process. Lett., 1981, *12*, № 3, 133—137 (РЖМат, 1981, 11В532)
98. *Frazer W. D.,* On testing a binary operation for associativity. Combinator. Algorithms. New York, N. Y., 1973, 77—90 (РЖМат, 1974, 2А167)
99. *Frederickson G. N., Ja'Ja' J.,* Approximation algorithms for several graph augmentation problems. SIAM J. Comput., 1981, *10*, № 2, 270—283 (РЖМат, 1982, 1В867)
100. *Frieze A. M.,* An algorithm for algebraic assignment problems. Discrete Appl. Math., 1979, *1*, № 4, 253—259 (РЖМат, 1980, 8В271)
101. *Gabow H. N.,* Using Euler partitions to edge color bipartite multigraphs. Int. J. Comput. and Inform. Sci., 1976, *5*, № 4, 345—355 (РЖМат, 1978, 2В465)
102. —, *Kariv O.,* Algorithms for edge coloring bipartite graphs. Conf. Rec. 10 Annu. ACM Symp. Theory Comput., San Diego, Calif., 1978. New York, N. Y., 1978, 184—192 (РЖМат, 1980, 2В640)
103. —, —, Algorithms for edge coloring bipartite graphs and multigraphs. SIAM J. Comput., 1982, *11*, № 1, 117—129 (РЖМат, 1982, 10В514)
104. —, *Myers E. W.,* Finding all spanning trees of directed and undirected graphs. SIAM J. Comput., 1978, *7*, № 3, 280—287 (РЖМат, 1979, 2В513)
105. *Garey M. R., Graham R. L., Johnson D. S., Knuth D. E.,* Complexity results for bandwidth minimization. SIAM J. Appl. Math., 1978, *34*, № 3, 477—495 (РЖМат, 1979, 1В681)
106. *Gibson P. M.,* Generalized doubly stochastic and permutation matrices over a ring. Linear Algebra and Appl., 1980, *30*, 101—107 (РЖМат, 1980, 12А403)
107. —, Permanental polytopes of doubly stochastic matrices. Linear Algebra and Appl., 1980, *32*, Aug., 87—111 (РЖМат, 1981, 2А365)

108. *Gligor V., Maier D.,* Finding angmented-set bases. SIAM J. Comput., 1982, *11*, № 3, 602—609 (РЖМат, 1983, 2В848)
109. *Gonzales T., Ja'Ja' J.,* On the complexity of computing bilinear forms with {0, 1} constants. J. Comput. and Syst. Sci., 1980, *20*, № 1, 77—95 (РЖМат, 1980, 10В484)
110. *Goralčiková A., Koubek V.,* A reduct-and-closure algorithms for graphs. Lect. Notes Comput. Sci., 1979, *74*, 301—307 (РЖМат, 1980, 5В486)
111. *Gouyou-Beauchamps D.,* The Hamiltonian circuit problem is polynomial for 4-connected planar graphs. SIAM J. Comput., 1982, *11*, № 3, 529—539 (РЖМат, 1983, 1В698)
112. *Gray L. J., Wilson D. G.,* Nonnegative factorization of positive semidefinite nonnegative matrices. Linear Algebra and Appl., 1980, *31*, 119—127 (РЖМат, 1981, 1А378)
113. *Grone R. D., Hoffman D. G., Wall J. R.,* Permutation-matrix groups with positive sum. Linear Algebra and Appl., 1982, № 45, 29—34 (РЖМат, 1982, 12А379)
114. *Gyires B.,* The common source of several inequalities concerning doubly stochastic matrices. Publ. math., 1980, *27*, № 3—4, 291—304 (РЖМат, 1981, 7А360)
115. *Hall F. J., Katz I. J.,* More on integral generalized inverses of integral matrices. Linear and Multilinear Algebra, 1980, *9*, № 3, 201—209 (РЖМат, 1981, 6А359)
116. *Hansen P.,* Upper bounds for the stability number of a graph. Rev. roum. math. pures et appl., 1979, *24*, № 8, 1195—1199 (РЖМат, 1980, 5В495)
117. *Hanson R.,* Integer matrices whose inverses contain only integers. Two-Year Coll. Math. J., 1982, *13*, № 1, 18—21 (РЖМат, 1982, 6В525)
118. *Harborth H., Mengersen I.,* Ein Extremalproblem für Matrizen aus Nullen und Einsen. J. reine und angew. Math., 1979, *309*, 149—155 (РЖМат, 1980, 3В592)
119. *Hassin R.,* Maximum flow in (*s*, *t*) planar networks. Inf. Process. Lett., 1981, *13*, № 3, 737 (РЖМат, 1982, 6В726)
120. *Hell P., Kirkpatrick D. G.,* Scheduling, matching and coloring. Alg. Methods in Graph Theory. Vol. 1. Amsterdam; Budapest, 1981, 273—279 (РЖМат, 1982, 1В815)
121. *Hirata Tomio, Maruoka Akira, Kimura Masayuki,* Efficient algorithm to solve the path cover problem for reducible flow graphs. Int. Symp. Circuits and Syst. Proc., Tokyo, 1979. New York, N. Y., s. a., 637—640 (РЖМат, 1980, 10В526)
122. *Holyer I.,* The NP-completeness of edge-coloring. SIAM J. Comput., 1981, *10*, № 4, 718—720 (РЖМат, 1982, 6В634)
123. —, The NP-completeness of some edge-partition problems. SIAM J. Comput., 1981, *10*, № 4, 713—717 (РЖМат, 1982, 6В713)
124. *Hsu Wen-Lian, Nemhauser G. L.,* Easy and hard bottleneck location problems. Discrete Appl. Math., 1979, *1*, № 3, 209—215 (РЖМат, 1980, 8В364)
125. —, —, Algorithms for minimum covering by cliques and maximum clique in claw-free perfect graphs. Discrete Math., 1981, *37*, № 2—3, 181—191 (РЖМат, 1982, 5В538)
126. *Hübler A., Klette R., Werner G.,* Shortest path algorithms for graphs of restricted in-degree and out-degree. Elektron. Informationsverarb. und Kybern., 1982, *18*, № 3, 141—151 (РЖМат, 1983, 3В554)
127. *Itai A., Perl Y., Shiloach Y.,* The complexity of finding maximum disjoint paths with length constraints. Networks, 1982, *12*, № 3, 277—286 (РЖМат, 1983, 1В695)
128. —, *Rodeh M.,* Finding a minimum circuit in a graph. Conf. Rec. 9th Annu. ACM Symp. Theory Comput. Boulder, Colo, 1977, New York, N. Y., 1977, 1—10 (РЖМат, 1979, 3В576)
129. —, —, *Tanimoto S. L.,* Some matching problems for bipartite graphs. J. Assoc. Comput. Mach., 1978, *25*, № 4, 517—525 (РЖМат, 1979, 5В720)

130. *Ja'Ja' J., Simon J.,* Space efficient algorithms for some graph theoretical problems. Acta Inf., 1982, *17*, № 4, 411—423 (РЖМат, 1983, 3B570)
131. *Jain S. K.,* Nonnegative matrices having nonnegative generalized inverses. Math. Stud., 1978, *46*, № 1, 42—48 (РЖМат, 1981, 11A380)
132. —, *Kwak E. K., Goel V. K.,* Decomposition of nonnegative group-monotone matrices. Trans. Amer. Math. Soc., 1980, *257*, № 2, 371—385 (РЖМат, 1980, 9A358)
133. *Jeter M. W.,* The infimum of a superadditive *n*-homogeneous function. J. Indian Math. Soc., 1978, *42*, № 1—4, 345—352 (РЖМат, 1980, 11A389)
134. —, *Pye W. C.,* Some nonnegative matrices without nonnegative rank factorizations. Ind. Math., 1982, *32*, № 1, 37—41 (РЖМат, 1983, 1A364)
135. *Johnsen E. C.,* Real essentially stochastic matrices: factorizations into special elementary matrices. Linear and Multilinear Algebra, 1981, *10*, № 4, 319—328 (РЖМат, 1982, 4A398)
136. *Johnson C. R.,* Row stochastic matrices similar to doubly stochastic matrices. Linear and Multilinear Algebra, 1981, *10*, № 2, 113—130 (РЖМат, 1981, 11A378)
137. *Kallman R.,* A method for finding permanents of 0,1 matrices. Math. Comput., 1982, *38*, № 157, 167—170 (РЖМат, 1982, 8B520)
138. *Kariv O., Hakimi S. L.,* An algorithmic approach to network location ploblems. I. The *p*-centers. SIAM J. Appl. Math., 1979, *37*, № 3, 513—538 (РЖМат, 1980, 6B489)
139. —, —, An algorithmic approach to network location problems. II. The *p*-medians. SIAM J. Appl. Math., 1979, *37*, № 3, 539—560 (РЖМат, 1980, 6B490)
140. *Katoh N., Ibaraki T., Mine H.,* An algorithm for finding *K* minimum spanning trees. SIAM J. Comput., 1981, *10*, № 2, 247—255 (РЖМат, 1982, 1B789)
141. *Kim K. H.,* An extension of the Dulmage-Mendelsohn theorem. Linear Algebra and Appl., 1979, *27*, 187—197 (РЖМат, 1980, 4B320)
142. —, *Roush F. W.,* Some results on decidability of shift equivalence. J. Combinatorics, Inform. and Syst. Sci., 1979, *4*, № 2, 123—146 (РЖМат, 1981, 7B581)
143. —, —, Generating all linear transformations. Linear Algebra and Appl., 1981, *37*, 97—101 (РЖМат, 1982, 2B553)
144. *King K. N., Smith-Thomas B.,* An optimal algorithm for sink-finding. Inf. Process. Lett., 1982, *14*, № 3, 109—111 (РЖМат, 1982, 9B536)
145. *Knuth D. E.,* A permanent inequality. Amer. Math. Mon., 1981, *88*, № 10, 731—740 (РЖМат, 1982, 4A393)
146. *Komar J., Łoś J.,* König theorem in the infinite case (extended abstract). Oper. Res-Verfahren, 1978, *32*, 153—155 (РЖМат, 1981, 4B395)
147. *Krishnamoorthy M. S., Deo Narsingh,* Node-deletion NP-complete problems. SIAM J. Comput., 1979, *8*, № 4, 619—625 (РЖМат, 1980, 5B437)
148. *Landau H. J., Odlyzko A. M.,* Bounds for eigenvalues of certain stochastic matrices. Linear Algebra and Appl., 1981, *38*, 5—15 (РЖМат, 1982, 1A448)
149. *Lawler E. L.,* Comment on computing the *k* shortest paths in a graph. Communs ASM, 1977, *20*, № 8, 603—604 (РЖМат, 1978, 3B487)
150. *Leighton F. T., Newman M.,* Positive definite matrices and Catalan numbers. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *79*, № 2, 177—181 (РЖМат, 1981, 1A353)
151. *Lewin M., Neumann M.,* On the inverse *M*-matrix problem for (0, 1)-matrices. Linear Algebra and Appl., 1980, *30*, 41—50 (РЖМат, 1980, 12B459)
152. —, *Vitek J.,* A system of gaps in the exponent set of primitive matrices. Ill. J. Math., 1981, *25*, № 1, 87—98 (РЖМат, 1981, 11A382)

153. *Lewis J., Yannakakis M.*, The node-deletion problem for hereditary properties is NP-complete. J. Comput. and Syst. Sci., 1980, *20*, № 2, 219—230 (РЖМат, 1980, 12В519)
154. *Lichtenstein D.*, Planar formulae and their uses. SIAM J. Comput., 1982, *11*, № 2, 329—343 (РЖМат, 1983, 1В709)
155. *Lint J. H. van*, Notes on Egoritsjev's proof of the van der Waerden conjecture. Linear Algebra and Appl., 1981, *39*, 1—8 (РЖМат, 1982, 5А320)
156. —, The van der Waerden conjecture: two proofs in one year. Math. Intell., 1982, *4*, № 2, 72—77 (РЖМат, 1983, 1А359)
157. *Lipski W., Jr, Preparata F. P.*, Efficient algorithms for finding maximum matchings in convex bipartite graphs and related problems. Acta Inf., 1981, *15*, № 4, 329—346 (РЖМат, 1982, 11В670)
158. *London D.*, On the van der Waerden conjecture for matrices of rank two. Linear and Multilinear Algebra, 1980, *8*, № 4, 281—289 (РЖМат, 1980, 11А388)
159. —, On the Đoković conjecture for matrices of rank two. Linear and Multilinear Algebra, 1981, *9*, № 4, 317—327 (РЖМат, 1981, 10А320)
160. —, Monotonicity of permanents of certain doubly stochastic circulant matrices. Linear Algebra and Appl., 1981, *37*, 235—249 (РЖМат, 1982, 2А376)
161. —, Monotonicity of permanents of certain doubly stochastic matrices. Pacif. J. Math., 1981, *95*, № 1, 125—138 (РЖМат, 1982, 2А377)
162. *Lubiw A.*, Some NP-complete problems similar to graph isomorphism. SIAM J. Comput., 1981, *10*, № 1, 11—21 (РЖМат, 1981, 11В561)
163. *Mahaney S. R.*, On the number of *P*-isomorphism classes of NP-complete sets. 22nd Annu. Symp. Found. Comput. Sci., Nashville, Tenn., Oct. 28—30, 1981. New York, N. Y., 1981, 271—278 (РЖМат, 1982, 10В482)
164. *Malek-Shahmirzadi M.*, On a conjecture by D. Z. Dokovič. Linear Algebra and Appl., 1980, *30*, 177—182 (РЖМат, 1980, 12А380)
165. *Manders K. L., Adleman L.*, NP-complete decision problems for binary quadratics. J. Comput. and Syst. Sci., 1978, *16*, № 2, 168—184 (РЖМат, 1978, 11В1322)
166. *Mansfield A.*, The relationship between the computational complexities of the legitimate deck and isomorphism problems. Quart. J. Math., 1982, *33*, № 131, 345—347 (РЖМат, 1983, 3В571)
167. *McDonald J. N.*, On some zero configurations associated with the van der Waerden conjecture. Linear Algebra and Appl., 1980, *32*, Aug., 137—155 (РЖМат, 1981, 1А367)
168. *Mena R. A.*, The characteristic polynomials of the plane of order 2. J. Combinatorics, Inform. and Syst. Sci., 1982, *7*, № 1, 91—93 (РЖМат, 1983, 6В468)
169. *Merriell D.*, The maximum permanent in $\Lambda_n^k$. Linear and Multilinear Algebra, 1980, *9*, № 2, 81—91 (РЖМат, 1981, 3А365)
170. *Mikolajczak B.*, On some problems associated with a memory minimization in finite automata. Math. Models Comput. Syst. Proc. 3rd Hung. Comput. Sci., Conf., Budapest, Jan., 1981. Budapest, 1981, 55—61 (РЖМат, 1982, 7В662)
171. *Miliotis P., Laporte G., Nobert Y.*, Computational comparison of two methods for finding the shortest complete cycle or circuit in a graph. RAIRO. Rech. opér., 1981, *15*, № 3, 233—239 (РЖМат, 1982, 6В667)
172. *Miller G. L.*, On the $n^{\log n}$ isomorphism technique. Conf. Rec. 10th Annu. ACM Symp. Theory Comput., San Diego, Calif., 1978, New York, N. Y., 1978, 51—58 (РЖМат, 1980, 1В1134)
173. *Minc H.*, On a conjecture of R. F. Scott (1881). Linear Algebra and Appl., 1979, *28*, 141—153 (РЖМат, 1980, 6А400)
174. —, An asymptotic solution of the multidimensional dimer problem. Linear and Multilinear Algebra, 1980, *8*, № 3, 235—239 (РЖМат, 1980, 8А333)

175. *Motoki Tatsuya,* A note on upper bounds for the selection problem. Inf. Process. Lett., 1982, *15*, № 5, 214—219 (РЖМат, 1983, 5В527)
176. *Mörs M.,* A new result on the problem of Zarankiewicz. J. Combin. Theory, 1981, *A31*, № 2, 126—130 (РЖМат, 1982, 3В536)
177. *Mullen G. L.,* Equivalence classes of matrices over finite fields. Linear Algebra and Appl., 1979, *27*, 61—68 (РЖМат, 1980, 5В426)
178. *Nemeth E., Seberry J., Shu M.,* On the distribution of the permanent of cyclic (0, 1)-matrices. Util. Math., 1979, *16*, 171—182 (РЖМат, 1980, 9В509)
179. *Newman M.,* On a problem suggested by Olga Taussky-Todd. Ill. J. Math., 1980, *24*, № 1, 36—78 (РЖМат, 1980, 9А359)
180. —, Determinants of circulants of prime power order. Linear and Multilinear Algebra, 1980, *9*, № 3, 187—191 (РЖМат, 1981, 6А358)
181. *Nijenhuis A., Wilf H. S.,* Combinatorial algorithms. New York, Acad. Press, 1975. XIV, 233 pp. (РЖМат, 1978, 3В409К)
182. *Novak J.,* On a conjecture of Turan. Čas. pěstov. mat., 1981, *106*, № 2, 127—137 (РЖМат, 1981, 11В481)
183. *Ntafos S. C., Hakimi S. L.,* On the complexity of some coding problems. IEEE Trans. Inform. Theory, 1981, *27*, № 6, 794—796 (РЖМат, 1982, 4В691)
184. *Nuffelen C. van,* On adjacency matrices for hypergraphs. Combinatorics'79. Part 2. Amsterdam e. a., 1980, 181 (РЖМат, 1981, 4В424)
185. *Odlyzko A. M.,* On the ranks of some (0, 1)-matrices with constant row sums. J. Austral. Math. Soc., 1981, *A31*, № 2, 193—201 (РЖМат, 1982, 5В451)
186. *Ohtsuki T.,* The two disjoint path problem and wire routing design. Lect. Notes Comput. Sci., 1981, *108*, 207—216 (РЖМат, 1982, 1В871)
187. *Overton M. L., Proskurowski A.,* Canonical incidence matrices of graphs. BIT (Sver.), 1979, *19*, № 2, 271—273 (РЖМат, 1980, 4В340)
188. *Pan V. Ya,* Field extension and trilinear aggregating, uniting and canceling for the acceleration of matrix multiplication. 20th Annu. Symp. Found. Comput. Sci., San Juan, 1979. New York, N. Y., 1979, 28—38 (РЖМат, 1980, 11В850)
189. —, Trilinear aggregating with implicit canceling for a new acceleration of matrix multiplication. Comput. and Math., 1982, *8*, № 1, 23—34 (РЖМат, 1982, 5А318)
190. *Papadimitriou C. H., Yannakakis M.,* The clique problem for planar graphs. Inf. Process. Lett., 1981, *13*, № 4—5, 131—133 (РЖМат, 1982, 7В600)
191. *Perl Y., Zaks S.,* On the complexity of edge labelings for trees. Theor. Comput. Sci., 1982, *19*, № 1, 1—16 (РЖМат, 1982, 11В703)
192. *Phuong V. A.,* Behavior of the permanent of a special class of doubly stochastic matrices. Linear and Multilinear Algebra, 1980, *9*, № 3, 227—229 (РЖМат, 1981, 7А358)
193. *Piehler J.,* Einige Betrachtungen über 0-1-Determinanten. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Leuna — Merseburg, 1981, *23*, № 3—4, 445—451 (РЖМат, 1982, 8В519)
194. *Plesnik J.,* The complexity of designing a network with minimum diameter. Networks, 1981, *11*, № 1, 77—85 (РЖМат, 1981, 11В560)
195. —, Complexity of decomposing graphs into factors with given diameters or radii. Math. slov. (ČSSR), 1982, *32*, № 4, 379—388 (РЖМат, 1983, 3В566)
196. *Poljak S., Turzik D.,* A polynomial algorithm for constructing a large bipartite subgraph, with an application to a satisfiability problem. Can. J. Math., 1982, *34*, № 3, 519—524 (РЖМат, 1983, 1В710)
197. *Proskurowski A., Syslo M. M.,* Minimum dominating cycles in outerplanar graphs. Int. J. Comput. and Inform. Sci., 1981, *10*, № 2, 127—139 (РЖМат, 1982, 6В683)
198. *Reif J. H.,* Minimum *s—t* cut of a planar undirected network in $O(n\log_n^2)$ time. Lect Notes Comput. Sci., 1981, № 115, 56—67 (РЖМат, 1982, 6В712)

199. *Rice B.*, The 0—1 integer programming problem in a finite ring with identity. Comput. and Math., 1981, *7*, № 6, 497—502 (РЖМат, 1982, 2B900)
200. *Rivest R. L.*, *Vuillemin J.*, On recognizing graph properties from adjacency matrices. Theor. Comput. Sci., 1976, *3*, № 3, 371—384 (РЖМат, 1978, 1B780)
201. *Romani F.*, Some properties of disjoint sums of tensors related to matrix multiplication. SIAM J. Comput., 1982, *11*, № 2, 263—267 (РЖМат, 1982, 11A274)
202. *Rose D. J.*, *Tarjan R. E.*, Algorithmic aspects of vertex elimination on directed graphs. SIAM J. Appl. Math., 1978, *34*, № 1, 176—197 (РЖМат, 1978, 8B545)
203. *Ryser H. J.*, A theorem in combinatorial matrix theory. Linear Algebra and Appl., 1980, *29*, 451—458 (РЖМат, 1980, 12B458)
204. —, Matrices and set intersections. Linear Algebra and Appl., 1981, *37*, 267—275 (РЖМат, 1982, 1B758)
205. *Říha G.*, Booleovské matice jako incidenční matice grafů binárních relací. Sb. pr. Ped. fak. UJEP Brně Ř. mat.-techn. věd., 1977, *7*, 33—49 (РЖМат, 1980, 4B319)
206. *Sachar H.*, The $F_p$ span of the incidence matrix of a finite projective plane. Geom. dedic., 1979, *8*, № 4, 407—415 (РЖМат, 1980, 6B423)
207. *Savage C.*, *Ja'Ja' J.*, Fast, efficient parallel algorithms for some graph problems. SIAM J. Comput., 1981, *10*, № 4, 682—691 (РЖМат, 1982, 5B548)
208. *Schaefer Th. J.*, The complexity of satisfiability problems. Conf. Rec. 10 Annu. ACM Symp. Theory Comput., San Diego, Calif., 1978. New York, N. Y., 1978, 216—226
209. *Schmieder R.*, Bemerkungen zu einem Isomorphie-Problem für Graphen, die speziellen Matrizen zugeordnet sind. Math. Nachr., 1979, **90**, 213—224 (РЖМат, 1980, 6B455)
210. *Schneider H.*, *Saunders B. D.*, Applications of the Gordan-Stiemke theorem in combinatorial matrix theory. Combinatorics '79. Part 2. Amsterdam e. a., 1980, 247, (РЖМат, 1981, 5B426)
211. *Schrijver A.*, *Valiant W. G.*, On lower bounds for permanents. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1980, *A83*, № 4, 425—427 (РЖМат, 1981, 4A318)
212. *Schroeppel R.*, *Shamir A.*, A $T=O(2^{n/2})$, $S=O(2^{n/4})$ algorithm for certain NP-complete problems. SIAM J. Comput., 1981, *10*, № 3, 456—464 (РЖМат, 1982, 2B1078)
213. *Shiloach Y.*, *Vishkin U.*, *Zaks S.*, Golden ratios in a pairs covering problem. Discrete Math., 1982, *41*, № 1, 57—65 (РЖМат, 1982, 11B550)
214. *Sinkhorn R.*, Concerning the question of monotonicity of the permanent on the doubly stochastic matrices. Linear and Multilinear Algebra, 1980, *8*, № 4, 323—328 (РЖМат, 1980, 12A379)
215. —, Concerning the magnitude of the entries in a doubly stochastic matrix. Linear and Multilinear Algebra, 1981, *10*, № 2, 107—112 (РЖМат, 1981, 11A347)
216. —, Power symmetric stochastic matrices. Linear Algebra and Appl., 1981, *40*, 225—228 (РЖМат, 1982, 3A439)
217. *Skillicorn D. B.*, Directed packings of pairs into quadruples. J. Austral. Math. Soc., 1982, *A33*, № 2, 179—184 (РЖМат, 1983, 4B584)
218. —, Directed coverings. J. Combinatorics, Inform. and Syst. Sci., 1982, *7*, № 1, 48—53 (РЖМат, 1983, 7B478)
219. *Smeds P. A.*, Line digraphs and the Moore-Penrose inverse. Linear Algebra and Appl., 1981, *36*, 165—172 (РЖМат, 1982, 1A439)
220. *Smetaniuk B.*, A new construction on latin squares—I: a proof of the Evans conjecture. Ars Comb., 1981, June, 155—172 (РЖМат, 1982, 2B555)
221. *Stanton R. G.*, *Bate J. A.*, A computer search for *B*-coverings. Lect Notes Math., 1980, № 829, 37—50 (РЖМат, 1981, 6B527)
222. —, *Eades P. D.*, *Rees G. H. J. van*, *Cowan D. D.*, Computation of some exact *g*-coverings. Util. Math., 1980, *18*, 269—282 (РЖМат, 1981, 6B528)

223. —, *Mullin R. C.,* Some new results on the covering numbers $N(t, k, v)$. Lect. Notes Math., 1980, № 829, 51—58 (РЖМат, 1981, 5В410)
224. *Stockmeyer L. J., Vazirani V. V.,* NP-completeness of some generalizations of the maximum matching problem. Inf. Process. Lett., 1982, *15*, № 1, 14—19 (РЖМат, 1983, 1В708)
225. —, *Wong C. K.,* On the number of comparisons to find the intersection of two relations. SIAM J. Comput., 1979, *8*, № 3, 388—404 (РЖМат, 1980, 4В306)
226. *Suchan G. E.,* Concerning the minimum of permanents on doubly stochastic circulants. Pacif J. Math., 1981, *95,* № 1, 213—217 (РЖМат, 1982, 2А378)
227. *Systo M. M.,* An efficient cycle vector space algorithm for listing all cycles of a planar graph. Alg. Methods in Graph Theory. Vol. 2. Amsterdam; Budapest, 1981, 749—762 (РЖМат, 1982, 6В711)
228. —, An efficient cycle vector space algorithm for listing all cycles of a planar graph. SIAM J. Comput., 1981, *10*, № 4, 797—808 (РЖМат, 1982, 7В609)
229. *Tarjan R. E.,* Finding edge-disjoint spanning trees. Proc. 8th Haw. Int. Conf. Syst. Sci., Honolulu, Haw., 1975. S. l., 1975, 251—252 (РЖМат, 1978, 4В373)
230. —, *Trojanowski A. E.,* Finding a maximum independent set. SIAM J. Comput., 1977, *6*, № 3, 537—546 (РЖМат, 1978, 5В1056)
231. *Terno J.,* Complexity des Minimalgerüstes. 24. Int. Wiss. Kolloq., Ilmenau, 22 Okt. — 26 Okt., 1979. Heft 5. Vortragsreihe B2, B3. Ilmenau, s. a., 23—25 (РЖМат, 1982, 11В622)
232. *Todorov D. T., Tonchev V. D.,* On some coverings of triples. Докл. Болг. АН, 1982, 35, № 9, 1209—1211 (РЖМат, 1983, 4В581)
233. *Trotter W. T., Jr, Monroe T. R.,* A combinatorial problem involving graphs and matrices. Discrete Math., 1982, *39*, № 1, 87—101 (РЖМат, 1982, 7В479)
234. *Truemper K.,* Complement total unimodularity. Linear Algebra and Appl., 1980, *30*, 77—92 (РЖМат, 1980, 12А402)
235. *Truszczyński M.,* A simple algorithm of finding a cycle of length greater than three and without diagonals. Computing, 1981, *27*, № 1, 89—91 (РЖМат, 1982, 2В674)
236. *Tsukiyama Shuji, Ariyoshi Hiromu, Shirakawa Isao,* Algorithm to enumerate all the cutsets in $O(|V|+|E|)$ time per cutset. Int. Symp., Circuits and Syst. Proc., Tokyo, 1979. New York, N. Y., s. a., 645—648 (РЖМат, 1980, 10В529)
237. —, *Shirakawa Isao, Ozaki Hiroshi,* On the algorithm to enumerate all the cutsets in a graph. Дэнси цусин гаккай ромбунси. Trans. Inst. Electron. and Commun. Eng. Jap., 1978, *61*, № 7, 641—648 (РЖМат, 1979, 3В585)
238. —, —, —, *Ariyoshi Hiromu,* An algorithm to enumerate all cutsets of a graph in linear time per cutset. J. Assoc. Comput. Mach., 1980, *27,* № 4, 619—632 (РЖМат, 1981, 11В563)
239. *Verheiden E.,* Integral and rational completions of combinatorial matrices. J. Combin. Theory, 1978, *A25*, № 3, 267—276 (РЖМат, 1979, 8В350)
240. —, Integral and rational completions of combinatorial matrices. II. J. Combin. Theory, 1979, *A27,* № 2, 198—212 (РЖМат, 1980, 3В548)
241. *Vuillemin J.,* Comment verifier l'associative d'une table de groupe. Theor. Comput. Sci., 1977, *4*, № 1, 77—82 (РЖМат, 1978, 6В1184)
242. *Wang K.,* On the matrix equation $A^m = \lambda J$. J. Combin. Theory, 1980, *A29*, № 2, 134—141 (РЖМат, 1981, 3В471)
243. *Wei Wan-Di,* The class $\mathfrak{A}(R, S)$ of (0, 1)-matrices. Discrete Math., 1982, *39*, № 3, 301—305 (РЖМат, 1982, 10В466)
244. *Wiedermann J.,* The complexity of lexicographic sorting and searching. Lect. Notes Comput. Sci., 1979, *74*, 517—522 (РЖМат, 1980, 3В1001)
245. —, The complexity of lexicographic sorting and searching. Apl. mat., 1981, 26, № 6, 432—436 (РЖМат, 1982, 5В941)

246. *Wilson T. C., Shortt J.,* An $O(\log n)$ algorithm for computing general order — $k$ Fibonacci numbers. Inform. Process. Lett., 1980, *10,* № 2, 68—75 (РЖМат, 1980, 10В449)

247. *Yannakakis M.,* Edge-deletion problems. SIAM J. Comput., 1981, *10,* № 2, 297—309 (РЖМат, 1982, 1В783)

248. *Yao A. C., Avis D. M., Rivest R. L.,* An $\Omega(n^2 \log n)$ lower bound to the shortest paths problem. Conf. Rec. 9th Annu. ACM Symp. Theory Comput., Boulder, Colo, 1977. New York, N. Y., 1977, 11—17 (РЖМат, 1979, 2В568)

---

## ВЫПУСКИ И ТОМА СЕРИИ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ

Алгебра. Топология. 1982, М., 1964
Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование, 1962, М., 1964
Геометрия. 1963, М., 1965
Математический анализ. 1963, М., 1965
Теория вероятностей, 1963, М., 1965
Алгебра. 1964, М., 1966
Математический анализ. 1964, М., 1966
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1964, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967
Математический анализ. 1965, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, М., 1968
Математический анализ. 1966, М., 1967
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1966, М., 1967
Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969
Математический анализ. 1967, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1967, М., 1969
Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970
Математический анализ. 1968, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1968, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970
Математический анализ. 1969, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1969, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 10. 1971
Математический анализ. 1970, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1970, М., 1971
Алгебра. Топология. Геометрия. 1970, М., 1972; Том 11, 1974; Том 12, 1974; Том 13, 1975; Том 14, 1977; Том 15, 1977; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1980; Том 18, 1981; Том 19, 1981; Том 20, 1982; Том 21, 1983
Математический анализ. Том 10, 1973; Том 11, 1973; Том 12, 1974; Том 13, 1975; Том 14, 1977; Том 15, 1977; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18. 1980; Том 19, 1981; Том 20, 1982
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 10, 1972; Том 11, 1974; Том 12, 1972; Том 13, 1976; Том 14, 1977; Том 15, 1978; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1981; Том 19, 1982; Том 20, 1983
Современные проблемы математики. Том 1, 1973; Том 2, 1973; Том 3, 1974; Том 4, 1975; Том 5, 1975; Том 6, 1976; Том 7, 1976; Том 8, 1977; Том 9, 1977; Том 10, 1978; Том 11, 1978; Том 12, 1979; Том 13, 1979; Том 14, 1979; Том 15, 1980; Том 16, 1980; Том 17, 1981; Том 18, 1981; Том 19, 1982; Том 20, 1982; Том 21, 1982; Том 22, 1983
Проблемы геометрии. Том 7, 1976; Том 8, 1977; Том 9, 1979; Том 10, 1978; Том 11, 1981; Том 12, 1981; Том 13, 1982; Том 14, 1983