И. Л. Гуревич, О существовании и единственности одного течения тяжелой жидкости,
Изв. вузов. Матем., 1978, номер 5, 39–45

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1978 МАТЕМАТИКА 5 (192)

УДК 517.958

И. Л. Гуревич

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОДНОГО ТЕЧЕНИЯ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Известно, что в большинстве задач о течениях тяжелой жидкости необходимым условием существования и единственности решения служит малость величины, обратной числу Фруда (см., напр., [1]). Задача, исследуемая в настоящей работе, характерна тем, что ее однозначная разрешимость не зависит от величины числа Фруда. При доказательстве этого основную роль играет тот факт, что свободная поверхность ограничивает жидкость снизу.

§ 1. Постановка задачи. Существование решения

Рассмотрим течение тяжелой жидкости в криволинейной верхней полуплоскости переменного $z = x + iy$, симметричное относительно оси Oy, ограниченное снизу полупрямыми AB и $B'A'$ и симметричными кривыми BC и $B'C'$, а также свободной поверхностью COC' с постоянным давлением (рис. 1). Сила тяжести действует в отрицательном направлении оси Oy.

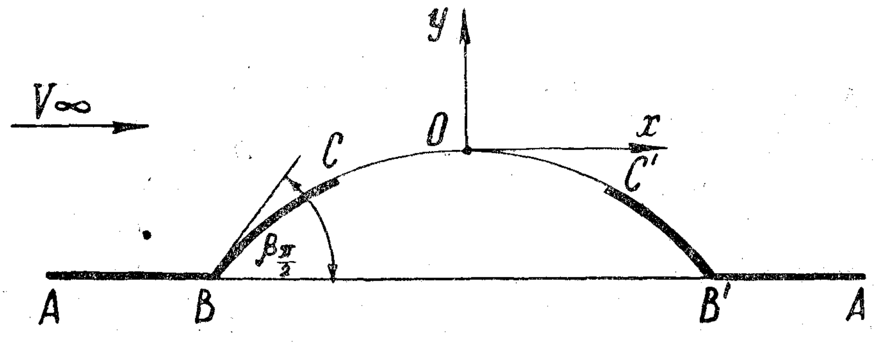

Рис. 1.

Пусть $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал, $w(O) = 0$, V и α — модуль вектора скорости и угол его наклона к оси Ox. Кривая BC задается естественным уравнением $\alpha = \alpha(l)$, $l(B) = 0$, $l(C) = L$. Функция $\alpha(l)$ считается непрерывно дифференцируемой, причем

$$0 \leqslant \alpha < \frac{\pi - \delta}{2}, \quad \delta > 0. \tag{1.1}$$

Задаются также $|x(C)| = X$ и $V(O) = V_0$.

Если ввести обозначения $m = -\varphi(C)$, $n = \varphi(C) - \varphi(B)$, то функция, отображающая область изменения w, соответствующую левой половине течения, на четверть единичного круга в параметрической плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 2), будет иметь вид

$$w = 2m(m+n)\left[4m^2 - n(2m+n)(\zeta - \zeta^{-1})^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Представим dw/dz в виде

$$\frac{dw}{dz} \equiv Ve^{-i\alpha} = V_0\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^{\beta} e^{-i\Omega(\zeta)}, \quad \Omega = \theta + i\tau, \tag{1.3}$$

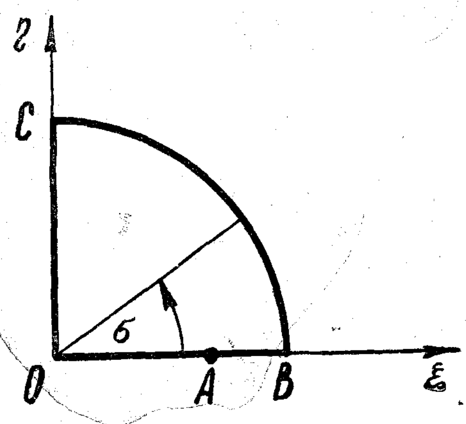

Рис. 2.

где $\beta\pi/2$ — скачок аргумента скорости при переходе через B (рис. 1). Легко видеть, что $\Omega(O) = 0$ и $\theta = 0$ на AB. Величины V, α и τ, θ на остальных участках границы области изменения ζ связаны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &\theta = \alpha - \frac{\beta\pi}{2} \quad \text{на } BC,\\ &\theta(\eta) = \alpha - 2\beta \operatorname{arctg}\eta \quad \text{на } OC,\\ &V = V_0\left(\frac{\sin\sigma}{1+\cos\sigma}\right)^{\beta} e^{\tau} \quad \text{на } BC,\\ &V = V_0 e^{\tau} \quad \text{на } OC. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

На свободной границе выполняется уравнение Бернулли, которое мы запишем в двух формах (g — ускорение силы тяжести):

$$V^2 + 2gy = V_0^2, \quad V^2\frac{dV}{d\varphi} = -g\sin\alpha. \tag{1.5}$$

Введем функции $F(t)$ и $\Phi(t)$ условиями: $F(t) = \sin t$, $\Phi(t) = \cos t$ при $|t| < (\pi - \delta)/2$; $F(t) = \operatorname{sign} t \cdot \sin[(\pi - \delta)/2]$, $\Phi(t) = \cos[(\pi - \delta)/2]$ при $|t| \geqslant (\pi - \delta)/2$. Заменим второе из уравнений (1.5) на

$$V^2\frac{dV}{d\varphi} = -gF(\alpha), \tag{1.5'}$$

а известное равенство $\partial x(\varphi, \psi)/\partial\varphi = \cos\alpha/V$ — на $\partial x(\varphi, \psi)/\partial\varphi = \Phi(\alpha)/V$ (мы в дальнейшем докажем существование такого решения этой видоизмененной задачи, в котором $|\alpha| < (\pi - \delta)/2$, поэтому наши замены оправданы).

Используя (1.2) — (1.5′), получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dl}{d\sigma} = \frac{mn}{V_0}\nu(m, n, \sigma)e^{-\tau} \quad \text{на } BC,\\ &\frac{d\tau}{d\eta} = \frac{gmn}{V_0^3}\mu(m, n, \eta)e^{-3\tau}F(\theta + 2\beta\operatorname{arctg}\eta) \quad \text{на } OC,\\ &\frac{mn}{V_0}\int_0^{\pi/2}\nu(m, n, \sigma)e^{-\tau(\sigma)}d\sigma = L, \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

$$\frac{mn}{V_0}\int_0^1 \mu(m, n, \eta) e^{-\tau(\eta)} \Phi(\theta + 2\beta \operatorname{arctg}\eta)\, d\eta = X,$$

где

$$\nu = \frac{(m+n)(2m+n)\cos\sigma (\sin\sigma)^{1-\beta}(1+\cos\sigma)^{\beta}}{[m^2 + n(2m+n)\sin^2\sigma]^{3/2}},$$

$$M = \frac{2(m+n)(2m+n)(\eta - \eta^{-3})}{[4m^2 + n(2m+n)(\eta+\eta^{-1})^2]^{3/2}}.$$

Естественное уравнение кривой BC и соотношения (1.6) дают возможность прийти к системе уравнений относительно параметров m, n и функций $l(\sigma)$, $\tau(\eta)$.

Представим $\Omega(\zeta)$ в виде суммы функций $\Omega_1(\zeta) = \theta_1 + i\tau_1$ и $\Omega_2(\zeta) = \theta_2 + i\tau_2$, предполагая, что на BC $\theta_1 = \theta$, $\theta_2 = 0$, на OC $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \tau$, на OB $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Решая краевые задачи для $\Omega_1(\zeta)$ и $\Omega_2(\zeta)$ (см., напр., [2]), получим представления

$$\begin{aligned} &\tau_1(\sigma) = S_1[\theta(\sigma)], \quad \tau_2(\sigma) = S_2[\tau(\eta)], \\ &\theta_1(\eta) = S_3[\theta(\sigma)], \quad \theta_2(\eta) = S_4[\tau(\eta)], \end{aligned} \qquad (1.7)$$

где $S_k (k = \overline{1, 4})$ — интегральные операторы, непрерывные в пространствах Гёльдера с любым показателем γ, $0 < \gamma < 1$.

Из уравнения кривой BC можно найти функцию $\theta(l)$, поэтому (1.6) и (1.7) позволяют получить систему уравнений

$$l(\sigma) = \frac{mn}{V_0}\int_0^{\alpha} \nu(m, n, \sigma) \exp\{-S_1[\theta(l(\sigma))] - S_2[\tau(\eta)]\}\, d\sigma, \qquad (1.8)$$

$$\tau(\eta) = \frac{mng}{V_0^3}\int_0^{\eta} \mu(m, n, \eta) \exp\{-3\tau(\eta)\} F\{S_3[\theta(l(\sigma)) + S_4[\tau(\eta)] + 2\beta \operatorname{arctg}\eta\}\, d\eta, \qquad (1.9)$$

$$m = \frac{XV_0}{n}\left[\int_0^1 \mu(m, n, \eta) \exp\{-3\tau(\eta)\} \Phi\{S_3[\theta(l(\sigma))] + S_4[\tau(\eta)] + 2\beta \operatorname{arctg}\eta\}\, d\eta\right]^{-1}, \qquad (1.10)$$

$$n = \frac{LV_0}{m}\left[\int_0^{\pi/2} \nu(m, n, \sigma) \exp\{-S_1[\theta(l(\sigma))] - S_2[\tau(\eta)]\}\, d\sigma\right]^{-1}. \qquad (1.11)$$

Система (1.8)—(1.11) эквивалентна операторному уравнению $u = Au$ с оператором A, вполне непрерывным в пространстве $H_\gamma \times H'_\gamma \times R \times R$, где H_γ и H'_γ — пространства функций, непрерывных по Гёльдеру на $[0, \pi/2]$ и $[0, 1]$ соответственно, а R — числовая ось.

Преобразование A можно включить в семейство преобразований A_λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$, заменяя в (1.8)—(1.11) β, $\theta(l)$, g соответственно, на $\lambda\beta$, $\lambda\theta(l)$, λg. Переход от $\lambda = 1$ к $\lambda = 0$ соответствует переходу от исследуемого течения к течению невесомой жидкости, у которого известная часть границы прямолинейна. Нетрудно проверить гладкость A_λ по λ и u, достаточную для применения принципа Лере — Шаудера, а также то, что A_0 переводит любой вектор $\{l(\sigma), \tau(\eta), m, n\}$ в фиксированный вектор $\{l_0(\sigma), 0, V_0 X, V_0 L\}$, где $l_0(\sigma) = X(X+L)[X^2 + L(2X + L\sin^2\sigma)]^{-1/2}$.

Займемся получением априорных оценок решения.

Так как σ и $\ln V$ — сопряженные гармонические функции, то в силу (1.5′) на CO $V^3 \partial\alpha/\partial\psi = g[F(\alpha)/\alpha]\alpha$ при $\alpha \neq 0$. Поскольку $F(\alpha)/\alpha > 0$, из принципа максимума ($\partial/\partial\psi$ — производная по внутренней нормали к границе в плоскости w) вытекает, что $|\alpha|$ не достигает абсолютного положительного экстремума на свободной границе, так что (1.1) выполняется во всей левой половине течения. Учитывая, что (1.1) требует выполнения неравенств $0 \leqslant \beta < 1 - \delta/\pi$, и сравнивая (1.1) и (1.4), получим, что всюду при $x \leqslant 0$

$$|\theta| < \frac{\pi - \delta}{2}. \tag{1.12}$$

Отметим, что принцип максимума ничего не дает, если свободная граница находится „над жидкостью“.

Далее, из выполнения (1.1) на CO следует, что здесь $0 \geqslant y > -X\operatorname{tg}\frac{\pi-\delta}{2}$. Теперь первое из уравнений (1.5) позволяет оценить скорость на свободной границе:

$$V_0 \leqslant V < \sqrt{V_0^2 + 2gX\operatorname{tg}\frac{\pi-\delta}{2}} = a_1, \tag{1.13}$$

или с учетом (1.4),

$$1 \leqslant e^{\tau(\eta)} < a_1. \tag{1.14}$$

Учитывая краевые условия для $\Omega_2(\zeta)$ и используя принцип максимума, найдем из (1.14) и (1.7):

$$a_1^{-1} < \exp\{-S_2[\tau(\eta)]\} \leqslant 1. \tag{1.15}$$

С помощью (1.1) и (1.13) можно оценить также $m = -\varphi(C)$:

$$a_2 = V_0 X \leqslant m < \frac{V_0 a_1 X}{\cos\frac{\pi-\delta}{2}} = a_3. \tag{1.16}$$

Оценим теперь $n = \varphi(C) - \varphi(B)$ сверху. Минимальное значение α в левой половине течения, равное нулю ввиду (1.1), достигается на всей полупрямой $x = 0$, $y \geqslant 0$. Так как здесь $\partial/\partial x$ совпадает с производной по внешней нормали, то из принципа максимума следует, что $\partial \ln V/\partial y = \partial\alpha/\partial x < 0$, так что $V_\infty < V_0$. Заменим дугу COC' прямолинейным отрезком CC' и рассмотрим в образовавшейся области течение, у которого скорость на бесконечности равна V_0. Область этого течения охватывает область исследуемого течения. Учитывая, что $V_\infty < V_0$, и применяя вариационный принцип М. А. Лаврентьева [3], найдем верхнюю оценку V в каждой внутренней точке дуги BC, откуда и вытекает требуемая оценка $n < a_4$.

Для оценки n снизу рассмотрим уравнение (1.11). С учетом найденных уже оценок $\nu(m, n, \sigma) < 2(a_3 + a_4)(2a_3 + a_4)/a_2^3 = a_5$. Используя еще (1.15) и (1.16), правую часть в (1.11) можно оценить снизу величиной

$$\frac{LV_0}{a_2 a_5}\left[\int\limits_0^{\pi/2} \exp\{-S_1[\theta(l(\sigma))]\}\, d\sigma\right]^{-1}.$$

Интеграл в квадратных скобках оценивается сверху с помощью теоремы Зигмунда (см., напр., [5], с. 110), которая применима ввиду (1.12).

Теперь, используя (1.12), (1.15), (1.16), двусторонние оценки n и m и теорему Зигмунда, можно оценить норму $l(\sigma)$ в пространстве H_γ, $0 < \gamma < \delta/\pi$. Показывается это точно так же, как в [4] (лемма 2, гл. VII). Наконец, двусторонние оценки n и m, а также (1.14) позволяют мажорировать $d\tau/d\eta$ из уравнения (1.9).

Мы получили оценки решений уравнения $\boldsymbol{u} = A_\lambda \boldsymbol{u}$ лишь при $\lambda = 1$. Неравенства (1.1), (1.12)—(1.16) остаются в силе и при $0 \leqslant \lambda < 1$. Нетрудно показать также, что верхнюю оценку n можно сделать равномерной по λ. Последующие оценки также будут равномерными.

Из проведенных рассуждений и принципа Лере—Шаудера вытекает существование хотя бы одного решения задачи, в котором $|\alpha| < (\pi - \delta)/2$.

§ 2. Единственность решения

Для доказательства единственности течения с $|\alpha| < (\pi - \delta)/2$ мы рассмотрим краевую задачу для функции $y(x, \psi)$. Область изменения переменного $\omega = x + i\psi$ — верхняя полуплоскость. Образы точек A, B, C, O, C', B' в плоскости ω будем обозначать теми же буквами.

Частные производные y_x и y_ψ функции $y(x, \psi)$ связаны с составляющими скорости V_x и V_y соотношениями [5]

$$y_x = \frac{V_y}{V_x}, \quad y_\psi = \frac{1}{V_x}, \quad V^2 = \frac{1 + y_x^2}{y_\psi^2}. \tag{2.1}$$

В плоскости ω функция $y(x, \psi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению [5]

$$y_{xx} - 2\frac{y_x}{y_\psi}\, y_{\psi x} + \frac{1 + y_x^2}{y_\psi^2}\, y_{\psi\psi} = 0,$$

а разность двух решений $u(x, \psi) = y_1 - y_2$ — уравнению

$$u_{xx} - 2\frac{y_{1x}}{y_{1\psi}}\, u_{x\psi} + \frac{1 + y_{1x}^2}{y_{1\psi}^2}\, u_{\psi\psi} + Pu_x + Qu_\psi = 0, \tag{2.2}$$

где

$$P = -2\,\frac{y_{1x\psi}}{y_{1\psi}} + \frac{y_{2\psi\psi}\,(y_{1x} + y_{2x})}{y_{1\psi}^2},$$

$$Q = 2\,\frac{y_{1x\psi}\,y_{2x}}{y_{1\psi}\,y_{2\psi}} - \frac{y_{2\psi\psi}\,(1 + y_{1x}^2)\,(y_{1\psi} + y_{2\psi})}{y_{1\psi}^2\,y_{2\psi}^2}.$$

Первые производные функций $y_1(x, \psi)$, $y_2(x, \psi)$, $u(x, \psi)$ непрерывны в области течения, исключая точки B, B', а вторые — исключая точки B, B', C, C'. Из (1.1) и (2.1) нетрудно заключить, что уравнение (2.2) эллиптично во всей области изменения ω, кроме последних четырех граничных точек. Так как в (2.2) не входит член вида Ru, то (см., напр., [6]) u не может иметь экстремумов внутри области. Кроме того, если в граничной точке достигается абсолютный экстремум и в ее окрестности уравнение равномерно эллиптично, то справедливо известное утверждение о знакоопределенности нормальной производной.

Выведем граничные условия для функции $u(\omega)$. Из сравнения (1.5) и (2.1) следует, что на COC'

$$2gy + \frac{1 + y_x^2}{y_\psi^2} = V_0^2;$$

из последнего равенства легко получить на COC'

$$2gu + cu_x - du_\psi = 0, \tag{2.3}$$

где

$$c = \frac{y_{1x} + y_{2x}}{y_{1\psi}^2}, \quad d = \frac{(1 + y_{1x}^2)\,(y_{1\psi} + y_{2\psi})}{y_{1\psi}^2\,y_{2\psi}^2}.$$

В силу (1.1) и (2.1) $d > 0$ во внутренних точках отрезка COC'. Используя (2.3) и принцип максимума, приходим к выводу, что в этих точках $u(\omega)$ не может достигать неотрицательного максимума и неположительного минимума (отметим, что аналогичного вывода нельзя сделать, если (2.3) выполняется на верхней границе течения).

Так как на ABC и $C'B'A$ с точностью до постоянного слагаемого можно найти $y(x)$, то выполняется условие

$$u = h \text{ на } ABC \text{ и } C'B'A, \tag{2.4}$$

где h — неизвестная постоянная (как и вводимое ниже k).

Из (2.4) и асимптотического представления на бесконечности $z(w) = wV_\infty + \text{const} + O(w^{-1})$ получается представление

$$u = h + k\psi + O(w^{-1}). \tag{2.5}$$

Если $h=k=0$, то на ABC, $C'B'A$ и на бесконечности $u=0$. Используя еще (2.3) и применяя принцип максимума, получим $u\equiv 0$.

Если $h\geqslant 0$, $k\geqslant 0$, то из (2.4) и (2.5) вытекает, что на ABC, $C'B'A$ и на бесконечности $u\geqslant 0$. Так как $u(O)=0$, то $\min u$ неположителен. Он должен достигаться во внутренней точке отрезка COC', что противоречит (2.3), если только $u(\omega)$ не равно тождественно нулю, а последнее возможно лишь при $h=k=0$.

Если $h\leqslant 0$, $k\leqslant 0$, то аналогичные рассуждения снова приводят к $u\equiv 0$.

Если $h>0$, $k\leqslant 0$, то $\max u=h$ принимается во всех точках полупрямой ABC. В окрестности любой внутренней точки этого участка границы, кроме точки B, уравнение (2.2) равномерно эллиптично, поэтому в этих точках $u_\psi<0$. В силу непрерывности в точке C будет $u_\psi\leqslant 0$, $u_x=0$, но это противоречит условию (2.3), выполняющемуся в точке C также ввиду непрерывности u_x, u_ψ.

Случай $h<0$, $k\geqslant 0$ рассматривается аналогично.

Итак, $h=k=0$, $u(\omega)\equiv 0$, т. е. единственность решения доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория поверхностных волн. Сб. переводов, М., ИИЛ, 1959.

2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., ГИФМЛ, 1962.

3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.

4. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., „Мир", 1964.

5. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, ч. II. Изд. Новосибирск. гос. ун-та, Новосибирск, 1969.

6. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., „Наука", 1966.

г. Казань

Поступила
8 VII 1975