

© И.Е. ПОЧАНИНА, академик АН УССР В.П. ШЕСТОПАЛОВ,
Н.П. ЯШИНА

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И ВЫРОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОТКРЫТЫХ ВОЛНОВОДНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

В различных закрытых резонаторах правильной геометрической формы с идеально проводящими стенками наблюдается вырождение собственных колебаний. Задача о спектре таких идеальных закрытых резонаторов сводится к определению собственных значений соответствующих самосопряженных операторов и имеет явное решение. Их спектр действителен, дискретен. Соответствующая система собственных функций полна.

Под вырождением собственных колебаний понимают существование нескольких взаимно ортогональных собственных функций и, соответственно, различных по структуре поля колебаний резонатора, отвечающих одному и тому же собственному значению спектрального параметра, которое называется точкой вырождения (ТВ) [1, 2].

На рис. 1 представлены настроечные кривые $\kappa_i(L)$ ($\kappa = b/\lambda$, λ — длина волны) для E_{0mn} колебаний идеального закрытого цилиндрического резонатора. При $L \rightarrow \infty$ зависимости $\kappa_{0mn}(L)$ стремятся к m -й критической частоте E_{0m} -волн круглого волновода; спектральные кривые E_{0mn} и E_{0pq} колебаний пересекаются в точках вырождения (κ_b, L_b) :

$$\kappa_b = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\nu_m^2 q^2 - n^2 \nu_p^2}{q^2 - n^2}}, \quad q \neq n, \quad L_b = \pi \sqrt{\frac{q^2 - n^2}{\nu_m^2 - \nu_p^2}}, \quad m \neq p,$$

где ν_m, ν_p — соответственно m -й и p -й корни уравнения $J_0(x) = 0$.

Принято считать [1, 3–5], что вследствие нарушения геометрической симметрии резонатора, внесения дифракционных потерь и т.д. возникает "связь" вырожденных собственных колебаний (в новом деформированном резонаторе), что приводит к снятию их вырождения и разрежению спектра. Снятие вырождения собственных колебаний сопровождается возникновением качественно более сложного явления — "взаимодействия" собственных колебаний. Как и в [1], где впервые описано это явление, под термином "взаимодействие" будем понимать взаимное влияние собственных колебаний, вызывающее изменение их собственных частот и добротностей, которое может сопровождаться появлением в резонаторе сложных "междугиповых" пространственных распределений поля. В этих случаях спектральные кривые собственных колебаний в области параметров резонатора, где происходит их взаимодействие, расталкиваются и образуют графики Вина [1]. Значение спектрального параметра, принадлежащее одной и той же кривой, вне области взаимодействия соответствует различным типам собственных колебаний резонатора.

Теоретическая модель явления взаимодействия колебаний [7, 8] позволила на строгом математическом уровне изучить его природу, причины возникновения и обеспечила возможность его предсказания. Эта модель получила дальнейшее развитие [9, 10] и дала информацию, необходимую для переосмысления традиционных

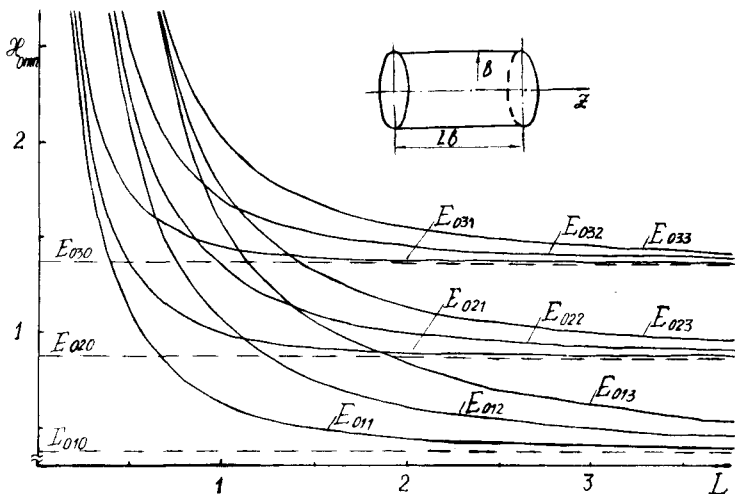


Рис. 1. Настраечные кривые $k_{0mn}(L)$ для идеального закрытого цилиндрического резонатора

представлений о взаимодействии и вырождении собственных колебаний, и, что особенно важно, впервые позволила описать эти явления в рамках одной модели.

1. Рассмотрим области сгущения спектров цилиндрических открытых волноводных резонаторов (ОВР), образованных в результате внесения в идеальный закрытый цилиндрический резонатор (ЗЦР) дифракционных потерь через полубесконечные в направлениях $z \rightarrow \pm\infty$ регулярные аксиально-симметричные волноводы. ОВР описывается следующими геометрическими параметрами: Θ_1, Θ_2 — относительные радиусы подводющих волноводов, $L = l/b$ — относительная длина ОВР, и спектральным параметром κ , имеющим смысл приведенной частоты.

Постановка несамосопряженных краевых задач о спектре рассматриваемых ОВР подробно описана нами в [9, 10]. Их решение проведено на строгом математическом уровне с помощью одного из вариантов [6] метода полуобращения, который предполагает аналитическое продолжение краевой задачи в область комплексных значений $\kappa = \kappa' + i\kappa''$. В результате применения этого метода удается построить аналитическую, ядерную оператор-функцию $\mathcal{G}(\kappa)$, эквивалентно описывающую исходную краевую спектральную задачу. Исследование свойств $\mathcal{G}(\kappa)$ позволяет получать исчерпывающую информацию о спектре ОВР. Высокоэффективный численный алгоритм поиска собственных значений $\mathcal{G}(\kappa)$ обеспечивает исследование общих свойств спектра. Новые методы исследования $\mathcal{G}(\kappa)$ и характеристического определителя $F(\kappa) = \det \mathcal{G}(\kappa)$ основаны на применении теории аналитических функций двух комплексных переменных [12], поэтому необходимо аналитически продолжить $F(\kappa)$ в область комплексных значений одного из геометрических параметров ОВР, например $L = L' + iL''$. Изучение особых точек $F(\kappa, L)$ в C_2 позволяет целенаправленно исследовать области сгущения спектра ОВР.

Рассмотрим сначала точки вырождения.

Для нахождения координат ТВ (κ_b, L_b) функции $F(\kappa, L)$ в C_2 необходимо решить систему уравнений

$$(1) \quad \begin{aligned} F(\kappa, L) &= 0, \quad \kappa = \kappa' + i\kappa'', \\ F'_\kappa(\kappa, L) &= 0, \quad L = L' + iL''. \end{aligned}$$

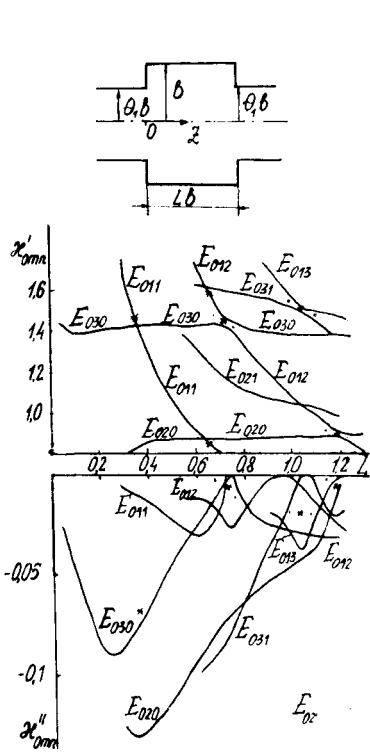


Рис. 2. Спектральные зависимости $\kappa_{0mn}(L)$ для E_{0mn} колебаний ОВР, нагруженного на круглые волноводы равных радиусов $\Theta_1 = \Theta_2 = 0,5$

Рис. 3. Спектральные зависимости $\kappa_{0mn}(L)$ для E_{0mn} колебаний ОВР, нагруженного на круглый и коаксиальный волноводы $\Theta_1 = 0,5, \Theta_2 = 0,8$

В локальной окрестности ТВ $F(\kappa, L)$ представима в виде ряда

$$(2) \quad F(\kappa, L) = F'_L(L - L_b) + \frac{1}{2} \{ F'_{\kappa\kappa}(\kappa - \kappa_b)^2 + 2F''_{\kappa L}(\kappa - \kappa_b)(L - L_b) + F''_{LL}(L - L_b)^2 \} + \dots$$

(ТВ на рис. 1–4 обозначены точками.) Разложение (2) позволяет описать спектральные зависимости $\kappa_j(L)$, $j = 1, 2$, вырожденных колебаний в окрестности ТВ.

Традиционно предполагалось [1, 3, 4], что для снятия вырождения собственных колебаний и осуществления их взаимодействия необходимо при $\kappa = \kappa_b$, $L = L_b$ дополнительно изменить один из параметров ОВР, регулирующий "степень связи" собственных колебаний. Однако такой путь исследования взаимодействия колебаний малоэффективен, так как нельзя достоверно предсказать, приведет ли изменение параметра, и какого именно, к снятию вырождения.

При исследовании явления взаимодействия колебаний в [7–10] показано, что оно наблюдается в ОВР в локальной окрестности изолированных морсовских критических точек (МКТ) функции $F(\kappa, L)$, которые будем далее называть спектральными (СМКТ). Для нахождения их координат (κ_M, L_M) в C_2 необходимо решить систему уравнений

$$(3) \quad F'_\kappa(\kappa, L) = 0, \quad F'_L(\kappa, L) = 0, \quad F''_{\kappa\kappa}F''_{LL} - (F''_{\kappa L})^2 \neq 0.$$

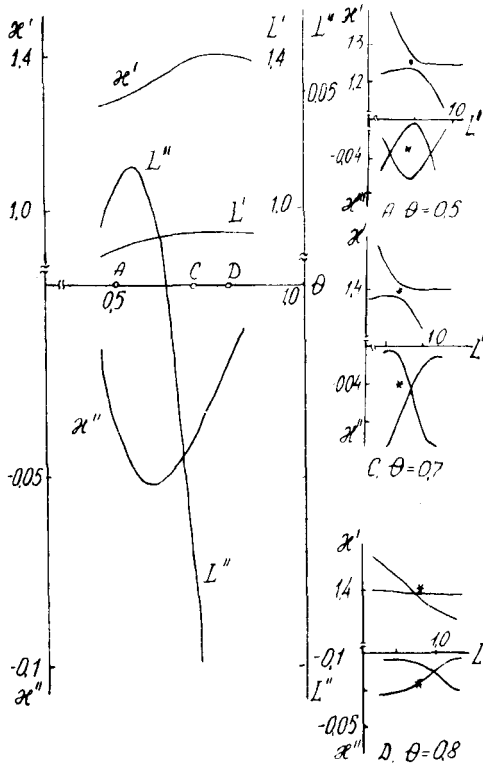


Рис. 4. Зависимость координат СМКТ, вызывающей взаимодействие $E_{0,30}$ и $E_{0,12}$ колебаний ОВР, нагруженного на круглые волноводы равных радиусов $\Theta_1 = \Theta_2$, от параметра Θ . Спектральные кривые $\kappa_{0mn}(L')$ в окрестности СМКТ

В локальной окрестности изолированной СМКТ зависимости $\kappa_j(L)$, $j = 1, 2$, взаимодействующих колебаний описываются квадратичной формой [12]:

$$(4) \quad F(\kappa_M, L_M) + \frac{1}{2} \{ F''_{\kappa\kappa} (\kappa - \kappa_M)^2 + 2F''_{\kappa L} (\kappa - \kappa_M) (L - L_M) + F''_{LL} (L - L_M)^2 \} = 0.$$

(СМКТ на рис. 1–4 обозначены звездочками.)

Если $F(\kappa_M, L_M) = 0$, будем называть СМКТ вырожденной (ВСМКТ), если $F(\kappa_M, L_M) \neq 0$ – невырожденной (НСМКТ).

Можно убедиться, что у $F(\kappa, L)$ ЗЦР существует набор изолированных ВСМКТ, совпадающих с точками вырождения. Сопоставляя разложение (4) и системы уравнений (3) и (1), можно показать, что в окрестности НСМКТ существуют две несовпадающие ТВ функции $F(\kappa, L)$, а координаты ВСМКТ и обеих ТВ совпадают между собой.

2. Внесение дифракционных потерь в ОВР (существенное открытие каналов излучения рис. 2, 3) приводит к качественному изменению спектральных свойств резонатора (ср. с рис. 1). Обширный численный материал, накопленный нами, позволяет выделить три основные формы локального сгущения спектральных кривых ОВР.

а) В открытом резонаторе (рис. 2, 3) сохраняются формы взаиморасположения спектральных кривых, подобные пересечению настроечных кривых ЗЦР (рис. 1). Однако теперь совпадение реальных и мнимых составляющих спектрального пара-

метра происходит при различных L (см. колебания E_{011} и E_{030} , E_{012} и E_{031} , рис. 2, и колебания E_{020} и E_{011} , E_{030} и E_{011} , E_{030} и E_{021} , рис. 3). Таким образом, вырождение этих собственных колебаний в ОВР снимается. Точки вырождения и совпадающие с ними ВСМКТ, существовавшие в ЗЦР для этих колебаний, уходят в область комплексных значений $(\kappa, L) \in C_2$. Совпадение ТВ и ВСМКТ сохраняется. Наличие ВСМКТ позволяет рассматривать такой вид локального сгущения спектральных кривых, при котором зависимости $\kappa'_j(L)$, $j = 1, 2$, пересекаются, а $\kappa''_j(L)$, $j = 1, 2$, имеют резонансный вид как одну из форм явления взаимодействия, не сопровождающуюся обменом типами колебаний. Аппроксимация спектральных кривых в окрестности ВСМКТ может быть произведена по (2) или (4). Нетрудно понять, что эти разложения в данном случае совпадают.

б) Формы взаиморасположения спектральных кривых, которые мы относим ко второй группе, имеют вид традиционных графиков Вина (рис. 2 — колебания E_{012} и E_{030} , E_{031} и E_{013} , рис. 3 — колебания E_{020} и E_{021} , E_{023} и E_{030} и др.). Взаимодействие колебаний сопровождается обменом типами и возникновением в области сближения спектральных кривых качественно новых по структуре поля "междутиповых" собственных колебаний, подробно описанных нами в [9, 10]. Точки вырождения, существовавшие в ЗЦР для этих пар колебаний, также сохраняются в ОВР в области комплексных значений параметров $(\kappa, L) \in C_2$, однако, в отличие от случая а), ТВ расщепляются и располагаются парами в окрестностях НСМКТ, описывающих такой вид взаимодействия. Кривые $\kappa_j(L)$, $j = 1, 2$, в окрестности НСМКТ с достаточной точностью описываются разложением (4) [9]. Так как в данном случае ТВ не являются изолированными, в окрестности НСМКТ область действия представления (2) существенно локализуется, что не позволяет аппроксимировать $\kappa_j(L)$, $j = 1, 2$, во всей области взаимодействия. Точность представления (2) снижает также тот факт, что $|L''_B| \gg |L''_M|$.

Суммируя приведенные факты по двум группам взаимодействия, следует подчеркнуть, что определение координат ТВ ОВР не дает информацию о типе взаимодействия колебаний, в отличие от СМКТ, координаты которых однозначно определяют этот тип. Наиболее целесообразно использовать значения координат ТВ (ЗЦР или ОВР) в качестве начальных приближений при численном определении координат СМКТ ОВР.

в) В ОВР возникает особая группа взаимодействующих колебаний, не имеющая аналогов в ЗЦР (в закрытом резонаторе нет соответствующих ТВ). Во взаимодействие вступают собственные колебания ОВР, принадлежащие одному семейству (см., например, E_{020} и E_{021} на рис. 3). Очевидно, что для обнаружения и описания этого типа взаимодействия пригоден лишь аппарат СМКТ.

Как видно, СМКТ являются однозначным критерием существования различных форм взаимодействия колебаний в широком диапазоне параметров ОВР. Исследование координат СМКТ, соответствующей взаимодействию колебаний E_{020} и E_{012} , в зависимости от параметра Θ (т.е. от величины дифракционных потерь) иллюстрирует рис. 4, где также приведены зависимости $\kappa_i(L)$ в окрестности СМКТ при различных Θ . Видно, что этот подход позволяет описать различные формы взаимодействия. Отметим, что при $\Theta = 0,8$ НСМКТ становится вырожденной.

Таким образом, с помощью аппарата СМКТ удастся осуществить наиболее общий подход к исследованию электродинамических процессов, наблюдающихся в резонаторах в областях сгущения их спектра. Этот подход позволяет на строгом математическом уровне предсказать и описать все разнообразие форм "сосуществования" собственных колебаний при их вырождении и взаимодействии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штейншлейгер В.Б.* Явление взаимодействия волн в электромагнитных резонаторах. Москва: Оборонгиз, 1955. 114 с.
2. *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение волн. М.: Наука, 1973. 606 с.
3. *Краснушкин П.Е.* — РЭ, 1977, т. 19, № 7, с. 1345–1358.
4. *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во МГУ, 1983. 232 с.
5. *Крейн М.Г., Любарский Г.Я.* — ПММ, 1961, т. 25, с. 24–37.
6. *Поединчук А.Е., Шестопалов В.П., Яшина Н.П.* — ЖВМ и МФ, 1986, т. 26, № 4, с. 552–562.
7. *Мележик Н.П., Поединчук А.Е., Тучкин Ю.А., Шестопалов В.П.* — ДАН, 1988, т. 300, № 6, с. 1356–1359.
8. *Мележик П.Н., Поединчук А.Е., Тучкин Ю.А., Шестопалов В.П.* — Докл. АН УССР. Сер. А, 1987, № 8, с. 53–56.
9. *Почанина И.Е., Шестопалов В.П., Яшина Н.П.* — Изв. вузов. Радиофизика, 1989, т. 32, № 8, с. 1000–1008.
10. *Почанина И.Е., Тучкин Ю.А., Шестопалов В.П., Яшина Н.П.* Препринт ИРЭ АН УССР, № 381, Харьков, 1989, 39 с.
11. *Шестопалов В.П.* — ДАН, 1990, т. 314, № 6, с. 1396–1401.
12. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969. 576 с.