

АСИМПТОТИКА УРАВНЕНИЯ КОЛМОГорова — Феллера для системы БОльшого ЧИсла Частиц

В. П. Маслов, С. Э. Таривердиев

В этом обзоре мы рассмотрим ряд работ, посвященных описанию динамики системы бесконечного числа взаимодействующих частиц. Такую систему можно получить предельным переходом из большого статистического ансамбля случайного числа частиц, в котором среднее число частиц неограниченно возрастает.

В квантовой механике для описания систем с переменным числом частиц употребляется метод вторичного квантования. Было бы естественно попытаться применить удобный формализм вторичного квантования для описания классических систем случайного числа частиц.

Динамику системы бесконечного числа частиц часто бывает удобно описывать с помощью кинетических уравнений для одночастичной функции плотности. В последнее время появилась новая точка зрения на кинетические уравнения, согласно которой эти уравнения получаются из систем зацепленных уравнений типа цепочки уравнений Боголюбова. Такие цепочки уравнений можно легко получить, применяя операторный метод, основанный на использовании операторов рождения и уничтожения формализма вторичного квантования. Определение операторов рождения и уничтожения для классических систем изложено в первом параграфе обзора, а операторный метод построения цепочек уравнений — во втором. Для вывода необратимых кинетических уравнений типа уравнения Больцмана соответствующую цепочку уравнений можно строить из необратимых линейных незацепленных уравнений, определяющих «вероятностную» марковскую динамику систем конечного числа частиц, — уравнений Колмогорова—Феллера специального вида. Этот способ вывода необратимых кинетических уравнений рассмотрен в третьем параграфе обзора.

Библиография содержит в основном математические работы, а также некоторые принципиально важные для рассматриваемых вопросов работы, выполненные на физическом уровне строгости.

ВВЕДЕНИЕ

0.1. Рассмотрим классическую систему случайного числа частиц, состояния ρ которой описываются набором n -частичных плотностей $\rho^{(n)} = \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$; $x_i = (p_i, q_i)$; $p_i, q_i \in \mathbb{R}^3$; $i = 1, \dots, n$, симметричных по всем своим аргументам x_1, \dots, x_n :

$$\rho = (\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \dots, \rho^{(n)}, \dots).$$

Без ограничения общности можно полагать, что n -частичная плотность $\rho^{(n)}$ нормирована на вероятность π_n того, что система случайного числа частиц состоит ровно из n частиц, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}^{6n}} \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \pi_n. \quad (0.1)$$

Предположим, что эволюция n -частичной системы описывается уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^{(n)}(t) = \{\rho^{(n)}(t), H^{(n)}\}, \quad (0.2)$$

где функция Гамильтона $H^{(n)}$ имеет вид

$$H^{(0)} = 0, \quad H^{(1)}(p, q) = \frac{p^2}{2m},$$

$$H^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Phi(|q_i - q_j|) \quad (0.3)$$

$(n \geq 2).$

Тогда эволюцию системы случайного числа частиц можно описать бесконечной системой уравнений Лиувилля (0.2). Однако часто бывает удобно описывать эволюцию такой системы случайного числа частиц не уравнениями (0.2), а цепочкой уравнений Боголюбова [4], которая эквивалентна системе уравнений (0.2). Формальный переход от системы уравнений (0.2) к цепочке уравнений Боголюбова производится следующим образом. Сопоставим набору n -частичных плотностей $\rho^{(n)}(t)$, $n=0, 1, 2, \dots$, набор функций $f^{(n)}(t)$, $n=0, 1, 2, \dots$, по формуле

$$f^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{m!} \int_{\mathbb{R}^{6m}} \rho^{(n+m)}(t; x_1, \dots, x_{n+m}) dx_{n+1} \dots dx_{n+m}, \quad (0.4)$$

если ряд в правой части сходится. Дифференцируя по t тождество (0.4), получим, что набор функций $f^{(n)}(t)$, $n=0, 1, 2, \dots$, является решением цепочки уравнений Боголюбова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(0)}(t)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial f^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)}{\partial t} &= \\ &= \{f^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n), H^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)\} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{R^s} \frac{\partial f^{(n+1)}(t; p_1, q_1, \dots, p_{n+1}, q_{n+1})}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi(|q_i - q_{n+1}|)}{\partial q_i} dp_{n+1} dq_{n+1}, \\ &(n \geq 1). \end{aligned} \quad (0.5)$$

Функции $f^{(n)}$ мы будем в дальнейшем называть моментными функциями.

Формулу (0.4), позволяющую из решений уравнений Лиувилля получать решения цепочки уравнений Боголюбова, можно записать в более компактном виде с помощью операторного метода построения моментных функций. Впервые такой подход применен в работе Д. Я. Петрины и А. К. Выходяиной [13]. Введем оператор \mathbf{b} , формально определяемый равенством

$$\mathbf{b} \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (n+1) \int_{R^s} \rho^{(n+1)}(x_1, \dots, x_{n+1}) dx_{n+1}. \quad (0.6)$$

Теперь формулу (0.4) можно записать в виде

$$f^{(n)}(t) = n! e^{\mathbf{b}t} \rho^{(n)}(t). \quad (0.7)$$

Обоснование возможности определения оператора \mathbf{b} и его связь с операторами типа операторов рождения и уничтожения формализма вторичного квантования подробно изложены в первом параграфе обзора.

Использование оператора \mathbf{b} для записи формулы (0.4) позволяет сразу заметить, что существует обратное преобразование, сопоставляющее решению цепочки уравнений Боголюбова решение системы незацепленных уравнений (0.2):

$$\rho^{(n)}(t) = e^{-\mathbf{b}t} \frac{1}{n!} f^{(n)}(t). \quad (0.8)$$

Отметим, что в формуле (0.8) нельзя выносить $\frac{1}{n!}$ за оператор $e^{-\mathbf{b}t}$, так как по определению оператора \mathbf{b}

$$\mathbf{b} \frac{1}{n!} f^{(n)}(t) = (n+1) \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t),$$

в то время как

$$\frac{1}{n!} \mathbf{b} f^{(n)}(t) = \frac{1}{n!} (n+1) f^{(n+1)}(t).$$

Если, используя обозначения работы Н. Н. Боголюбова [4], через $S^n(t)$ обозначить оператор, определяемый равенством

$$\rho^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) = S^{(n)}(-t) \rho^{(n)}(0; x_1, \dots, x_n),$$

то формулу (0.7) можно записать в виде

$$f^{(n)}(t) = n! e^{\mathbf{b}} S^{(n)}(-t) e^{-\mathbf{b}} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0). \quad (0.9)$$

Решение задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова в виде аналогичном (0.9) получено в работе Д. Я. Петриной и А. К. Видьбиды [13]. Если при построении моментных функций в формуле (0.7) вместо оператора $e^{\mathbf{b}}$ применить оператор $\chi(\mathbf{b})$, где $\chi(y)$ — некоторая целая функция, то получим цепочку уравнений несколько иного вида. Например, при $\chi(\mathbf{b}) = e^{\mathbf{b}^2}$ моментные функции будут решениями следующей цепочки уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)}{\partial t} = & \{f^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n), \\ & H^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)\} + \\ + 2 \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} & \frac{\partial f^{(n+2)}(t; p_1, q_1, \dots, p_{n+2}, q_{n+2})}{\partial p_i} \times \frac{\partial \Phi(|q_i - q_{n+1}|)}{\partial q_i} \times \\ & \times dp_{n+1} dq_{n+1} dp_{n+2} dq_{n+2}. \end{aligned}$$

Другой пример цепочки уравнений, получаемой при помощи функции $\chi(\mathbf{b})$ отличной от $e^{\mathbf{b}}$, содержится в работе В. И. Герасименко [5].

0.2. Для приближенного нахождения первых моментных функций применяется метод обрыва цепочки уравнений Боголюбова: на основе некоторых физических соображений N -я моментная функция $f^{(N)}$ выражается через моментные функции $f^{(n)}(t)$, $n < N$. Тогда для первых N моментных функций $f^{(0)}$, $f^{(1)}$, ..., $f^{(N-1)}$ из цепочки уравнений Боголюбова получается замкнутая система N уравнений, из которой и находятся функции $f^{(0)}$, $f^{(1)}$, ..., $f^{(N-1)}$. Однако для решения некоторых задач статистической механики более естественным является обрыв двойственной к цепочке Боголюбова системы зацепленных уравнений — этот метод применен, например, в работах Б. М. Гуревича и Ю. М. Сухова [18, 19]. Для определения двойственной цепочки введем следующие обозначения. Через $(\gamma^{(n)}, \rho^{(n)})$ будем обозначать билинейную форму

$$(\gamma^{(n)}, \rho^{(n)}) = \int_{\mathbb{R}^{6n}} \gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (0.10)$$

Заметим, что

$$(1, \rho^{(n)}) = \int_{R_0^{2n}} \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \pi_n.$$

Будем полагать, что функции $\gamma^{(n)}$ описывают наблюдаемые n -частичной системы. В этом случае величина

$$\langle \gamma^{(n)} \rangle_{\rho^{(n)}} = \frac{(\gamma^{(n)}, \rho^{(n)})}{\pi_n}$$

является средним значением наблюдаемой $\gamma^{(n)}$ в состоянии $\rho^{(n)}$. Мы будем считать, что функции $\gamma^{(n)}$ симметричны по всем своим аргументам x_1, \dots, x_n . Эволюцию среднего значения наблюдаемой $\gamma^{(n)}$ в состоянии $\rho^{(n)}$ можно задавать как уравнением Лиувилля (0.2), так и сопряженным ему относительно формы (0.10) уравнением

$$\frac{\partial \gamma^{(n)}(t)}{\partial t} = \{H^{(n)}, \gamma^{(n)}(t)\}. \quad (0.11)$$

Через b^+ будем обозначать оператор, действие которого на элементы набора n -частичных наблюдаемых $\gamma = (\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}, \dots)$ определяется равенством

$$b^+ \gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \gamma^{(n-1)}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}). \quad (0.12)$$

Тогда если набор функций $\gamma^{(n)}(t)$, $n=0, 1, 2, \dots$, является решением системы незацепленных уравнений (0.11), то система функций

$$g^{(n)}(t) = e^{-bt} \gamma^{(n)}(t) \quad (0.13)$$

является решением цепочки уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) &= \{H^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n), \\ g^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)\} - \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \frac{\partial \Phi(|q_i - q_j|)}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \times \\ \times g^{(n-1)}(t; p_1, q_1, \dots, p_{j-1}, q_{j-1}, p_{j+1}, q_{j+1}, \dots, p_n, q_n). \end{aligned} \quad (0.14)$$

Цепочка уравнений (0.14) называется двойственной цепочкой к цепочке уравнений Боголюбова. Метод построения двойственных цепочек подробно рассматривается в первом параграфе обзора.

Из определения операторов b , b^+ и вида билинейной формы (0.10) следует, что имеет место равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma^{(n)}, b \rho^{(n)}) = \sum_{n=0}^{\infty} (b^+ \gamma^{(n)}, \rho^{(n)}). \quad (0.15)$$

Используя равенство (0.15), легко установить взаимосвязь решений двойственных цепочек уравнений (0.5) и (0.14). Как известно, для решений сопряженных уравнений (0.3) и (0.11) справедливо соотношение

$$(\gamma^{(n)}(t), \rho^{(n)}(0)) = (\gamma^{(n)}(0), \rho^{(n)}(t)). \quad (0.16)$$

Отсюда и из формул (0.7), (0.13), (0.15) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (g^{(n)}(t), f^{(n)}(0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (g^{(n)}(0), f^{(n)}(t)). \quad (0.17)$$

Рассмотренным двойственным цепочкам уравнений можно взаимно однозначно сопоставить уравнения в функциональных производных для производящих функционалов решений цепочек уравнений. Такие уравнения в функциональных производных, соответствующие цепочке уравнений Боголюбова, рассмотрены в работе Н. Н. Боголюбова [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\delta f(t; \gamma)}{\delta t} = & \int_{R^s} \frac{p_1}{m} \frac{\partial \gamma(p_1, q_1)}{\partial q_1} \frac{\delta f(t; \gamma)}{\delta \gamma(p_2, q_2)} dp_1 dq_1 + \\ & + \frac{1}{2} \int_{R^s} \int_{R^s} \{ \Phi(|q_1 - q_2|), (\gamma(p_1, q_1) \gamma(p_2, q_2) + \gamma(p_1, q_1) + \\ & + \gamma(p_2, q_2)) \} \frac{\delta^2 f(t; \gamma)}{\delta \gamma(p_1, q_1) \delta \gamma(p_2, q_2)} dp_1 dq_1 dp_2 dq_2. \end{aligned} \quad (0.18)$$

Уравнение для производящего функционала решения двойственной цепочки впервые, по-видимому, получено в работе [1] и имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta g(t; \rho)}{\delta t} = & - \int_{R^s} \frac{p_1}{m} \frac{\partial \rho(p_1, q_1)}{\partial q_1} \frac{\delta g(t; \rho)}{\delta \rho(p_2, q_2)} dp_1 dq_1 - \\ & - \frac{1}{2} \int_{R^s} \int_{R^s} \{ \Phi(|q_1 - q_2|), \rho(p_1, q_1) \rho(p_2, q_2) \} \times \\ & \times \left(\frac{\delta^2}{\delta \rho(p_1, q_1) \delta \rho(p_2, q_2)} + \frac{\delta}{\delta \rho(p_1, q_1)} + \frac{\delta}{\delta \rho(p_2, q_2)} \right) \times \\ & \times g(t; \rho) dp_1 dq_1 dp_2 dq_2. \end{aligned} \quad (0.19)$$

0.3. Для описания предельной динамики физической системы, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром часто бывает удобно перейти к новой системе уравнений, эквивалентной исходной, но такой, что в этой новой системе уравнений легко совершить формальный предельный переход по малому параметру. Под эквивалентностью систем уравнений понимается существование взаимно-однозначного соответствия между решениями этих систем. Однако эквивалентные в этом смысле системы уравнений совершенно не эквивалентны с точки зрения совершения формально-

го предельного перехода по малому параметру — в некоторых из этих систем уравнений, вообще, невозможно совершить формальный предельный переход и получить предельную систему уравнений. Следуя этому подходу, вывод кинетического уравнения Власова может быть формально проведен по следующей схеме. Будем предполагать, что в отличие от формул (0.3), гамильтониан $H_\varepsilon^{(n)}$ n -частичной системы ($n \geq 2$) имеет вид:

$$H_\varepsilon^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + \varepsilon \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Phi(|q_i - q_j|), \quad (0.20)$$

где $\varepsilon \geq 0$ — параметр, характеризующий интенсивность парного взаимодействия. Будем также предполагать, что вероятности π_n нахождения системы случайного числа частиц в n -частичном состоянии зависят от ε : $\pi_n = \pi_n(\varepsilon)$. Несколько видоизменим также и формулу (0.7) для построения моментных функций:

$$f_\varepsilon^{(n)}(t) = \varepsilon^n n! e^{b \rho_\varepsilon^{(n)}(t)}, \quad (0.21)$$

где $\rho_\varepsilon^{(n)}(t)$ — решение уравнения Лиувилля с гамильтонианом $H_\varepsilon^{(n)}$, определяемым формулой (0.20). В этом случае моментные функции $f_\varepsilon^{(n)}(t)$ являются решением цепочки уравнений Боголюбова (0.5), где вместо $H^{(n)}$ в скобках Пуассона будет стоять $H_\varepsilon^{(n)}$. Совершая в этой цепочке Боголюбова формальный предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим цепочку уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{m} \frac{\partial f^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)}{\partial q_i} + \\ & + \sum_{n=1}^n \int_{\mathbb{R}^e} \frac{\partial f^{(n+1)}(t; p_1, q_1, \dots, p_{n+1}, q_{n+1})}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi(|q_i - q_{n+1}|)}{\partial q_i} \times \\ & \times dp_{n+1} dq_{n+1}. \end{aligned} \quad (0.22)$$

Эта цепочка уравнений называется цепочкой уравнений Власова — такая цепочка рассматривалась, например, в работе Брауна и Хелпа [16]. Цепочка уравнений Власова, в отличие от цепочки уравнений Боголюбова имеет решение вида:

$$f^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = f(t; p_1, q_1) \dots f(t; p_n, q_n). \quad (0.23)$$

Легко проверить, что справедливо следующее утверждение: решение цепочки уравнений Власова имеет вид (0.23) тогда и только тогда, когда функция $f(t; p, q)$ является решением уравнения Власова

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t; p, q)}{\partial t} = & - \frac{p}{m} \frac{\partial f(t; p, q)}{\partial q} + \\ & + \frac{\partial f(t; p, q)}{\partial p} \int_{\mathbb{R}^e} f(t; p', q') \frac{\partial \Phi(|q - q'|)}{\partial q} dp' dq'. \end{aligned}$$

Уравнение (0.19) для производящего функционала решения двойственной цепочки уравнений в случае гамильтониана (0.20) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}(t; \rho)}{\partial t} = & - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{p_1}{m} \frac{\partial \rho(p_1, q_1)}{\partial q_1} \frac{\delta \mathbf{g}(t; \rho)}{\delta \rho(p_1, q_1)} dp_1 dq_1 - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \{ \Phi(|q_1 - q_2|), \rho(p_1, q_1) \rho(p_2, q_2) \} \times \\ & \times \left(\varepsilon \frac{\delta^2}{\delta \rho(p_1, q_1) \delta \rho(p_2, q_2)} + \frac{\delta}{\delta \rho(p_1, q_1)} + \frac{\delta}{\delta \rho(p_2, q_2)} \right) \times \\ & \times \mathbf{g}(t; \rho) dp_1 dq_1 dp_2 dq_2. \end{aligned}$$

Это уравнение можно записать в виде псевдодифференциального уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{g}(t; \rho)}{\partial t} = - \left(\left\{ \rho, H \left(t; \rho \left(I + \varepsilon \frac{\delta}{\delta \rho} \right) \right) \right\}, \frac{\delta}{\delta \rho} \right) \mathbf{g}(t; \rho), \quad (0.24)$$

где

$$H(t; \rho) = \frac{p_1^2}{2m} + \int_{\mathbb{R}^n} \rho(p_2, q_2) \Phi(|q_1 - q_2|) dp_2 dq_2,$$

а верхние индексы указывают порядок действия операторов умножения на ρ и дифференцирования по ρ . Уравнение (0.24) для гамильтонианов $H(t; \rho)$ вида

$$\begin{aligned} H(t; \rho) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \rho(p_1, q_1) \dots \rho(p_n, q_n) \times \\ & \times \omega^{(n+1)}(p_1, q_1, \dots, p_{n+1}, q_{n+1}) dp_1 dq_1 \dots dp_n dq_n, \end{aligned}$$

где $\omega^{(n)}$ — функции от n переменных, получено в работе [1]. Предельный переход в уравнении (0.24) совершенно аналогичен квазиклассическому предельному переходу для уравнения фон Неймана в представлении упорядоченных операторов.

Действуя по изложенной схеме, легко построить и другие кинетические уравнения, отвечающие иным, чем цепочка уравнений Боголюбова, системам зацепленных уравнений.

0.4. Предположим, что состояние n -частичной системы описывается плотностью $\rho^{(n)}(t) = \rho^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n)$, $v_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, n$, являющейся решением уравнения Колмогорова — Феллера специального вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_g^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n)}{\partial t} = & \varepsilon \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_{\mathbb{R}^3} (\rho_g^{(n)}(t; v_1, \dots, v_i + h, \dots, v_j - \\ & - h, \dots, v_n) - \rho_g^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n)) \mu(v_j - v_i; dh), \quad (0.25) \end{aligned}$$

где параметр ε характеризует интенсивность парного взаимодвижения, а условная мера $\mu(v; dh)$ удовлетворяет ряду тре-

бований—подробное обсуждение этого уравнения проводится в третьем параграфе обзора. В этом случае моментные функции $f_\varepsilon^{(n)}(t)$, получаемые из системы плотностей $\rho_\varepsilon^{(n)}(t)$ по формуле (0.21), являются решением следующей системы зацепленных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\varepsilon^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n)}{\partial t} = & \varepsilon \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_{\mathbb{R}^3} (f_\varepsilon^{(n)}(t; v_1, \dots, v_i + h, \dots, v_j - \\ & - h, \dots, v_n) - f_\varepsilon^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n)) \mu(v_j - v_i; dh) + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (f_\varepsilon^{(n+1)}(t; v_1, \dots, v_i + h, \dots, v_{n+1} - h) - \\ & - f_\varepsilon^{(n+1)}(t; v_1, \dots, v_{n+1})) \mu(v_{n+1} - v_i; dh) dv_{n+1}. \quad (0.26) \end{aligned}$$

Совершая формальный предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что система уравнений (0.26) перейдет в следующую систему зацепленных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n)}{\partial t} = & \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (f^{(n+1)}(t; v_1, \dots, v_i + h, \dots, v_{n+1} - h) - \\ & - f^{(n+1)}(t; v_1, \dots, v_{n+1})) \mu(v_{n+1} - v_i; dh) dv_{n+1}. \quad (0.27) \end{aligned}$$

Полученная предельная цепочка уравнений имеет решение вида:

$$f^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n) = f(t; v_1) \dots f(t; v_n)$$

тогда и только тогда, когда функция $f(t; v)$ является решением обобщенного уравнения Больцмана

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(t; v) = & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (f(t; v + h) f(t; v' - h) - \\ & - f(t; v) f(t; v')) \mu(v' - v; dh) dv'. \quad (0.28) \end{aligned}$$

Это уравнение при специальном выборе меры $\mu(v; dh)$ принимает общеизвестный вид уравнения Больцмана

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(t; v_1) = & \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (f(t; v_1') f(t; v_2') - f(t; v_1) f(t; v_2)) \times \\ & \times |v| \sin \theta S(\theta, |v|) d\theta d\varphi dv_2, \quad (0.29) \end{aligned}$$

где $S(\theta|v|)$ — дифференциальное сечение рассеяния, v_1, v_2 — скорости частиц до столкновения, v_1', v_2' — скорости частиц после столкновения, а $v = v_1 - v_2$ — относительная скорость.

Цепочке уравнений (0.27) можно сопоставить уравнение в функциональных производных и двойственную цепочку уравнений аналогично тому, как это делалось для цепочки уравнений Боголюбова.

§ 1. МЕТОД ОПЕРАТОРОВ РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

1.1. Одним из основных принципов квантовой механики является положение о том, что состояние квантовой системы описывается вектором сепарабельного гильбертова пространства. Состояние квантовой системы переменного числа частиц принято описывать векторами гильбертова пространства \mathcal{H} , являющегося прямой суммой гильбертовых пространств $\mathcal{H}^{(n)}$ — пространств состояний n -частичных систем: $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(n)}$. Пространство \mathcal{H} называется пространством Фока.

Покажем, каким образом основные моменты этой конструкции переносятся на классический случай.

Мы будем считать, что состояния классической n -частичной системы, $n=1, 2, \dots$, описываются положительными элементами пространства $\mathcal{L}^{(n)} = L_1(\mathbb{R}^{\nu n})$: $\rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^{\nu}$, $i=1, \dots, n$, где ν — некоторое целое положительное число. Пространство $L_1(\mathbb{R}^{\nu n})$ не является гильбертовым, тем не менее, состояние рассматриваемой n -частичной системы можно задать комплекснозначной функцией $\theta^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ — элементом гильбертова пространства $\mathcal{H}^{(n)} = L_2(\mathbb{R}^{\nu n})$, такой, что имеет место соотношение

$$|\theta^{(n)}(x_1, \dots, x_n)|^2 = \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (1.1)$$

В этом случае будем говорить, что функции $\{\theta^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}\}$ и $\rho^{(n)} \in \mathcal{L}^{(n)}$ задают одно и то же состояние. Заметим, что задание состояний n -частичных систем элементами пространств $\mathcal{H}^{(n)}$ не является однозначным: например, если функции $\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}$ связаны соотношением

$$\theta_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = e^{i\varphi(x_1, \dots, x_n)} \theta_2^{(n)}(x_1, \dots, x_n),$$

где φ — некоторая вещественная функция, то они определяют одно и то же состояние, так как $|\theta_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n)|^2 = |\theta_2^{(n)}(x_1, \dots, x_n)|^2$.

Шенбергом [23, 24] было предложено описывать состояние классической системы случайного числа частиц векторами гильбертова пространства $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(n)}$, ($\mathcal{H}^{(0)} = \mathbb{C}^1$), совершенно аналогично тому, как это принято для квантовых систем переменного числа частиц. Элементы гильбертова пространства будем обозначать жирными буквами и записывать в виде вектор-

столбцов

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta^{(0)} \\ \theta^{(1)}(x_1) \\ \vdots \\ \theta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \theta^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Скалярное произведение элементов θ и ζ пространства \mathcal{H} определяется равенством

$$\langle \theta, \zeta \rangle = \theta^{(0)}\zeta^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^{vn}} \bar{\theta}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \zeta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Однако для описания состояний классической системы случайного числа частиц совершенно необязательно переходить от описания состояний n -частичных систем элементами пространств $L_1(\mathbf{R}^{vn})$ к описанию этих состояний элементами гильбертовых пространств $L_2(\mathbf{R}^{vn})$. Состояние классической системы случайного числа частиц можно описывать положительными элементами пространства $\mathcal{L} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^{(n)}$, ($\mathcal{L}^{(0)} = \mathbf{R}^1$), т. е. ненулевыми векторами этого пространства, все компоненты которых являются неотрицательными функциями. Элементы пространства \mathcal{L} также будем обозначать жирными буквами и записывать в виде вектор-столбцов:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho^{(0)} \\ \rho^{(1)}(x_1) \\ \vdots \\ \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \rho^{(n)} \in \mathcal{L}^{(n)}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Норму в пространстве \mathcal{L} определим равенством

$$\|\rho\|_{\mathcal{L}} = |\rho^{(0)}| + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^{vn}} |\rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n.$$

Будем говорить, что векторы $\theta \in \mathcal{H}$ и $\rho \in \mathcal{L}$ задают одно и то же состояние системы случайного числа частиц, если их n -е компоненты удовлетворяют соотношению (1.1).

Заметим, что соответствие между векторами $\theta \in \mathcal{H}$ и $\rho \in \mathcal{L}$, задающими одно и то же состояние, не является взаимно однозначным.

1.2. Наблюдаемые классической n -частичной системы будем описывать существенно ограниченными относительно меры Лебега функциями на \mathbf{R}^{vn} , т. е. элементами пространства

$\mathcal{M}^{(n)} = L_\infty(\mathbf{R}^{v^n})$. Пространство $L_\infty(\mathbf{R}^{v^n})$ изометрически изоморфно пространству $L_1^*(\mathbf{R}^{v^n})$ и все непрерывные линейные функционалы на $L_1(\mathbf{R}^{v^n})$ можно определить с помощью билинейной формы

$$(\gamma^{(n)}, \rho^{(n)}) = \int_{\mathbf{R}^{v^n}} \gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

$$\gamma^{(n)} \in L_\infty(\mathbf{R}^{v^n}), \quad \rho^{(n)} \in L_1(\mathbf{R}^{v^n}).$$

Если $\rho^{(n)}$ — положительный элемент пространства $L_1(\mathbf{R}^{v^n})$, а $\gamma^{(n)}$ — элемент пространства $L_\infty(\mathbf{R}^{v^n})$, то величина

$$\langle \gamma^{(n)} \rangle_{\rho^{(n)}} = \frac{(\gamma^{(n)}, \rho^{(n)})}{\|\rho^{(n)}\|_{1, n}},$$

где через $\|\cdot\|_{1, n}$ обозначена норма в пространстве $L_1(\mathbf{R}^{v^n})$, называется средним значением наблюдаемой $\gamma^{(n)}$ в состоянии $\rho^{(n)}$. В подходе, предложенном Шенбергом [23], наблюдаемой классической n -частичной системы, описываемой функцией $\gamma^{(n)} \in L_\infty(\mathbf{R}^{v^n})$, сопоставляется оператор $\hat{\gamma}^{(n)}$ умножения на функцию $\gamma^{(n)}$ в пространстве $L_2(\mathbf{R}^{v^n})$. При этом среднее значение наблюдаемой, задаваемой оператором $\hat{\gamma}^{(n)}$, в состоянии, задаваемом функцией $\theta^{(n)} \in L_2(\mathbf{R}^{v^n})$, вычисляется точно так же, как и в квантовой механике:

$$\langle \hat{\gamma}^{(n)} \rangle_{\theta^{(n)}} = \frac{\langle \theta^{(n)}, \hat{\gamma}^{(n)} \theta^{(n)} \rangle}{\|\theta^{(n)}\|_{2, n}} = \frac{\langle \theta^{(n)}, \gamma^{(n)} \theta^{(n)} \rangle}{\|\theta^{(n)}\|_{2, n}},$$

где через $\|\cdot\|_{2, n}$ обозначена норма пространства $L_2(\mathbf{R}^{v^n})$. Очевидно, что если функции $\theta^{(n)} \in L_2(\mathbf{R}^{v^n})$ и $\rho^{(n)} \in L_1(\mathbf{R}^{v^n})$ задают одно и то же состояние, то справедливо равенство

$$\langle \gamma^{(n)} \rangle_{\rho^{(n)}} = \langle \hat{\gamma}^{(n)} \rangle_{\theta^{(n)}}.$$

Пространством наблюдаемых \mathcal{M} системы случайного числа частиц будем называть пространство $\mathcal{M} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}^{(n)}$, ($\mathcal{M}^{(0)} = \mathbf{R}^1$). Элементы пространства \mathcal{M} будем обозначать жирными буквами и записывать их в виде векторов-строк

$$\gamma = (\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}, \dots), \quad \gamma^{(n)} \in \mathcal{M}^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В пространстве \mathcal{M} можно ввести норму

$$\|\gamma\|_{\mathcal{M}} = \sup_{n=0, 1, 2, \dots} \|\gamma^{(n)}\|_n$$

(через $\|\cdot\|_n$ обозначена норма пространства $L_\infty(\mathbb{R}^{vn})$), порожденную билинейной формой на $\mathcal{M} \times \mathcal{L}$.

$$(\gamma, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma^{(n)}, \rho^{(n)}) \quad (1.2)$$

и нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ пространства \mathcal{L} .

1.3. В дальнейшем будем рассматривать только системы неразличимых частиц: классическую n -частичную систему будем называть системой n неразличимых частиц, если состояния этой системы могут быть описаны неотрицательными, симметричными функциями из $L_1(\mathbb{R}^{vn})$. При описании состояний системы неразличимых частиц с помощью функций $\theta^{(n)} \in L_2(\mathbb{R}^{vn})$ необходимо, чтобы эти функции были либо симметричными, либо антисимметричными. Подпространство симметричных функций из $L_1(\mathbb{R}^{vn})$ будем обозначать через $\mathcal{L}_+^{(n)}$, а подпространства симметричных или антисимметричных функций из $L_2(\mathbb{R}^{vn})$ будем обозначать, соответственно, через $\mathcal{H}_+^{(n)}$ и $\mathcal{H}_-^{(n)}$.

Систему случайного числа частиц будем называть системой случайного числа неразличимых частиц, если состояния этой системы можно описать элементами множества

$$S = \left\{ \rho: \rho \in \mathcal{L}_+, \mathcal{L}_+ = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_+^{(n)}, \rho > 0, \|\rho\|_{\mathcal{L}} < \infty \right\},$$

называемого пространством состояний системы случайного числа неразличимых частиц. При описании состояний n -частичной системы элементами пространств $\mathcal{H}_+^{(n)}$ или $\mathcal{H}_-^{(n)}$ состояния системы случайного числа частиц можно описывать элементами пространств $\mathcal{H}_+ = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_+^{(n)}$ или $\mathcal{H}_- = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_-^{(n)}$.

Для достижения однозначности соответствия между наблюдаемыми и средними значениями наблюдаемых систем n неразличимых частиц достаточно потребовать, чтобы наблюдаемые $\gamma^{(n)} \in \mathcal{M}^{(n)}$ были симметричными функциями по всем аргументам $x_i \in \mathbb{R}^v$, $i = 1, 2, \dots, n$. Подпространство симметричных функций из $L_\infty(\mathbb{R}^{vn})$ будем обозначать через $\mathcal{M}_+^{(n)}$. Для системы случайного числа неразличимых частиц естественно потребовать, чтобы ее пространством наблюдаемых было пространство

$$\mathcal{M}_+ = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_+^{(n)}.$$

Векторам $\rho \in \mathcal{L}_+$ и $\gamma \in \mathcal{M}_+$ можно взаимно однозначно сопоставить функционалы на пространствах $\mathcal{M}^{(1)}$ и $\mathcal{L}^{(1)}$, соответственно:

$$\rho(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma^n, \rho^{(n)}) =$$

$$= \rho^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^{vn}} \gamma(x_1) \dots \gamma(x_n) \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

$$\gamma(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\gamma^{(n)}, \rho^n) =$$

$$= \gamma^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{R^{vn}} \gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \rho(x_1) \dots \rho(x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

где $\{\rho^{(n)}, \gamma^{(n)}\}$ — n -компоненты векторов ρ и γ , $\rho(x)$ и $\gamma(x)$ — элементы пространств $\mathcal{L}^{(1)}$ и $\mathcal{M}^{(1)}$, а $\rho^n(x_1, \dots, x_n) = \rho(x_1) \dots \rho(x_n)$, $\gamma^n(x_1, \dots, x_n) = \gamma(x_1) \dots \gamma(x_n)$ — элементы пространств $\mathcal{L}_+^{(n)}$, $\mathcal{M}_+^{(n)}$, соответственно.

Функционалы $\rho(\gamma)$, $\gamma(\rho)$ называются производящими функционалами состояния ρ и наблюдаемой γ , соответственно.

1.4. Так как состояния классической системы случайного числа частиц можно описывать векторами θ гильбертова пространства \mathcal{H}_+ или \mathcal{H}_- , то можно определить операторы рождения и уничтожения частиц, действующие в этих пространствах, в точности так же, как это делается в методе вторичного квантования, строгое математическое изложение которого можно найти в книге Ф. А. Березина [3].

Векторы пространств \mathcal{H} и \mathcal{L} , у которых все компоненты, начиная с некоторой, равны нулю, называются финитными. Финитные векторы образуют всюду плотные множества в пространствах \mathcal{H} и \mathcal{L} . Векторы пространств \mathcal{H} и \mathcal{L} , у которых все компоненты, кроме n -ой, равны нулю, образуют подпространства $\mathcal{H}^{(n)}$ и $\mathcal{L}^{(n)}$. Оператор A , действующий в пространстве \mathcal{H} или \mathcal{L} и определенный на всюду плотных множествах $\tilde{\mathcal{H}}^{(n)} \subset \mathcal{H}^{(n)}$, ($\tilde{\mathcal{L}}^{(n)} \subset \mathcal{L}^{(n)}$), допускает матричное представление

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \dots \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \dots \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где через A_{nk} обозначены операторы, отображающие $\tilde{\mathcal{H}}^{(k)}$ в $\mathcal{H}^{(n)}$ ($\tilde{\mathcal{L}}^{(k)}$ в $\mathcal{L}^{(n)}$). Так как пространства $\mathcal{H}^{(n)}$, ($\mathcal{L}^{(n)}$) есть подпространства пространств функций $L_2(\mathbb{R}^{vn})$, ($L_1(\mathbb{R}^{vn})$), то операторы A_{nk} можно задавать ядрами

$$A_{nk} = A_{nk}(x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_k).$$

В дальнейшем мы ограничимся описанием состояний системы случайного числа частиц элементами пространства \mathcal{H}_+ , так как

случай описания состояний элементами пространства \mathcal{H} — совершенно аналогичен.

Рассмотрим матрицы

$$a(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & a_{01}(\xi) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_{12}(\xi) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{23}(\xi) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$a^*(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{10}^*(\xi) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{21}^*(\xi) & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где $\xi \in \mathbb{R}^v$, с помощью которых определим операторы рождения и уничтожения, действующие в пространствах \mathcal{H}_+ и \mathcal{L}_+ .

Через $a_{\mathcal{H}}(\xi)$, $a_{\mathcal{H}}^*(\xi)$ будем обозначать матрицы $a(\xi)$ и $a^*(\xi)$, соответственно, у которых элементы $a_{n-1n}(\xi)$ и $a_{nn-1}^*(\xi)$ имеют вид

$$a_{n-1n}(\xi) = \sqrt{n} \delta(x_1 - x_1') \dots \delta(x_{n-1} - x_{n-1}') \delta(x_n' - \xi),$$

$$a_{nn-1}^*(\xi) = \sqrt{n} \delta(x_1 - x_1') \dots \delta(x_{n-1} - x_{n-1}') \delta(x_n - \xi).$$

Если $\theta(\xi)$ — функция из $L_2(\mathbb{R}^v)$, то

$$\hat{a}(\theta) = \int_{\mathbb{R}^v} a_{\mathcal{H}}(\xi) \theta(\xi) d\xi, \quad \hat{a}^*(\theta) = \int_{\mathbb{R}^v} a_{\mathcal{H}}^*(\xi) \theta(\xi) d\xi$$

являются операторами в пространстве \mathcal{H} , причем в область их определения входит всюду плотное в пространстве \mathcal{H} множество финитных векторов. Операторы $\hat{a}(\theta)$, $\hat{a}^*(\theta)$ называются, соответственно, операторами уничтожения и рождения частиц. Операторы уничтожения и рождения частиц для классических систем неразличимых частиц действуют в пространстве \mathcal{H}_+ (или \mathcal{H}_-) и определяются равенствами

$$\hat{a}_+(\theta) = P_+ \hat{a}(\theta) P_+, \quad \hat{a}_+^*(\theta) = P_+ \hat{a}^*(\theta) P_+,$$

где через P_+ обозначен оператор проектирования из пространства \mathcal{H} на подпространство \mathcal{H}_+ . Операторы $\hat{a}_+(\theta)$ и $\hat{a}_+^*(\theta)$ сопряжены друг другу.

Через $a_+(\xi)$, $a_+^*(\xi)$ будем обозначать операторные функции, действие которых в пространстве \mathcal{L}_+ определяется соотношениями

$$(a_{n-1n}(\xi) \rho^{(n)})(x_1, \dots, x_{n-1}) = n \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi),$$

$$(a_{n+1n}^*(\xi) \rho^{(n)})(x_1, \dots, x_{n+1}) = (\rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \delta(x_{n+1} - \xi))_+,$$

где $\rho^{(n)} \in \mathcal{L}_+^{(n)}$, знак $(\cdot)_+$ обозначает операцию симметризации, $a_{n-1n}(\xi)$, $a_{n+1n}^*(\xi)$ — элементы матриц $a(\xi)$ и $a^*(\xi)$, являющиеся операторными функциями. Если ρ — положительный элемент

пространства $L_1(\mathbf{R}^v)$, а γ — положительный элемент пространства $L_\infty(\mathbf{R}^v)$, то

$$a(\gamma) = \int_{\mathbf{R}^v} a_+(\xi) \gamma(\xi) d\xi, \quad a^*(\rho) = \int_{\mathbf{R}^v} a_+^*(\xi) \rho(\xi) d\xi$$

являются операторами в пространстве \mathcal{L}_+ , отображающими множество состояний S в себя. Операторы $a(\gamma)$, $a^*(\rho)$ мы также будем называть операторами уничтожения и рождения частиц, соответственно.

Операторы

$$N = \int_{\mathbf{R}^v} a^*(\xi) a(\xi) d\xi \quad \text{и} \quad \hat{N} = \int_{\mathbf{R}^v} \hat{a}_+^*(\xi) \hat{a}_+(\xi) d\xi,$$

действующие в пространствах \mathcal{L}_+ и \mathcal{H}_+ , соответственно, называются операторами числа частиц.

1.5. Установим теперь взаимосвязь между операторами $a(\gamma)$, $a^*(\rho)$ и операторами $\hat{a}_+(\theta)$, $\hat{a}_+^*(\theta)$. Для этого отметим, что состояние n -частичных систем можно описывать не только векторами гильбертова пространства $L_2(\mathbf{R}^{vn})$, но и операторами $\hat{\theta}^{(n)}$, действующими в этом пространстве и задаваемыми ядрами

$$\hat{\theta}^{(n)} = \frac{1}{\|\theta^{(n)}\|_{2,n}} \theta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \bar{\theta}^{(n)}(x_1', \dots, x_n').$$

Эти операторы называются операторами плотности. Заметим, что соответствие между операторами плотности $\hat{\theta}^{(n)}$ и функциями плотности $\rho^{(n)}$, для которых выполняется соотношение (1.1), является взаимно однозначным.

Состояние классической системы случайного числа частиц, описываемых векторами $\theta \in \mathcal{H}$, можно задавать операторами плотности $\hat{\theta}$, имеющими диагональный вид

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}^{(0)} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \hat{\theta}^{(1)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \hat{\theta}^{(2)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что соответствие между операторами плотности $\hat{\theta}$, действующими в пространстве \mathcal{H} , и векторами ρ пространства \mathcal{L} , задающими одно и то же состояние, является взаимно однозначным, и мы будем обозначать его через T :

$$T(\rho) = \hat{\theta}, \quad T^{-1}(\hat{\theta}) = \rho.$$

Пусть γ — неотрицательная функция, принадлежащая пересечению пространств $L_\infty(\mathbf{R}^v) \cap L_1(\mathbf{R}^v)$, а ρ — неотрицательная функция пространства $L_1(\mathbf{R}^v)$, тогда существуют функции

$\theta_1, \theta_2 \in L_2(\mathbb{R}^v)$ такие, что:

$$|\theta_1|^2 = \gamma, \quad |\theta_2|^2 = \rho.$$

Из вида операторов $\hat{a}_+(\theta), \hat{a}_+^*(\theta), a(\gamma), a^*(\rho)$ следует, что имеют место соотношения

$$T(a(\gamma)\rho) = \hat{a}_+(\theta_1)\hat{\theta}\hat{a}_+^*(\theta_1),$$

$$\hat{N}T(a^*(\rho)\rho) = \hat{a}_+^*(\theta_2)\hat{\theta}\hat{a}_+(\theta_2),$$

где \hat{N} — оператор числа частиц, действующий в пространстве \mathcal{H} . Очевидно, что при соответствии T оператору числа частиц N сопоставляется оператор числа частиц \hat{N} .

§ 2. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЦЕПОЧЕК УРАВНЕНИЙ ТИПА ЦЕПОЧЕК УРАВНЕНИЙ БГККИ

2.1. Рассмотрим систему случайного числа неразличимых частиц, описываемую в момент времени $t \in \mathbb{R}^1$ состоянием $\theta(t) \in \mathcal{S}$. Пусть состояние $\rho(t)$ рассматриваемой системы является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = A\rho(t), \quad (2.1)$$

где A — диагональный оператор в пространстве \mathcal{L}_+ . Диагональность оператора A означает, что n -частичное состояние системы в момент времени $t \in \mathbb{R}^1$ описывается функцией плотности $\rho^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n)$, являющейся решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^{(n)}(t) = A^{(n)}\rho^{(n)}(t), \quad (2.2)$$

где через $A^{(n)}$ обозначены операторы A_{nn} , действующие в пространствах $\mathcal{L}_+^{(n)}$, $(n=0, 1, 2, \dots)$.

Через $A_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, $i_1 \neq \dots \neq i_k$; будем обозначать операторы, действие которых на элементах $\{\rho^{(n)}\}$ пространств $\mathcal{L}_+^{(n)}$, $n=k, k+1, \dots$, представимых в виде

$$\rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \rho^{(k)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \rho^{(n-k)}(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}),$$

$i_{k+1} \neq \dots \neq i_n$, $i_{k+1}, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$, определяется равенством

$$A_{i_1, \dots, i_k}^{(k)} \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (A^{(k)} \rho^{(k)})(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \rho^{(n-k)}(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}).$$

Динамическую систему случайного числа частиц, описываемую уравнением (2.1), будем называть динамической системой частиц с m -арным взаимодействием, если существуют операторы $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(m)}$, действующие в пространствах $\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}_+^{(2)}, \dots, \mathcal{L}_+^{(m)}$, соответственно, такие, что операторы $A^{(n)}$

ИМЕЮТ ВИД:

$$A^{(n)} = \sum_{k=1}^{\min(n,m)} \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \\ i_1 \neq \dots \neq i_k}} B_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}$$

и, кроме того, уравнения (2.2) сохраняют нормировки плотностей $\rho^{(n)}$. Без ограничения общности можно полагать, что n -е компоненты вектора $\rho(t)$, описывающие n -частичные состояния, нормированы на вероятности π_n нахождения системы в n -частичных состояниях:

$$\|\rho^{(n)}\|_{1,n} = \pi_n.$$

Требование сохранения нормировки означает неизменность во времени вероятностей нахождения рассматриваемой системы случайного числа частиц в n -частичных состояниях. Это требование накладывает следующие ограничения на операторы $A^{(k)}$, $k=1, 2, \dots$, операторы $A^{(k)}$ должны удовлетворять соотношениям

$$\int_{\mathbb{R}^{vk}} A^{(k)} \rho^{(k)}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = 0 \quad (2.3)$$

для всех плотностей $\rho^{(k)}$, принадлежащих области определения операторов $A^{(k)}$.

В дальнейшем будем рассматривать только динамические системы случайного числа частиц с парным взаимодействием. В этом случае уравнения (2.2) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) = \\ & = \left(\sum_{i=1}^n B_i^{(1)} + \varepsilon \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \right) \rho_\varepsilon^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где параметр $\varepsilon \geq 0$ характеризует интенсивность парного взаимодействия. Так как условие (2.3) для оператора

$A_\varepsilon^{(2)} = \sum_{i=1}^n B_i^{(1)} + \varepsilon \sum_{1 \leq i, j \leq n} B_{ij}^{(2)}$ должно выполняться и при $\varepsilon=0$, то каждый из операторов $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ также должен удовлетворять условию (2.3).

2.2. Рассмотрим оператор

$$a(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^v} a(x) \gamma(x) dx, \quad \gamma \in L_\infty(\mathbb{R}^v),$$

действие которого в пространстве \mathcal{L}_+ определяется соотношениями

$$(a(\gamma)\rho)^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (n+1) \int_{\mathbb{R}^v} \rho^{(n+1)}(x_1, \dots, x_{n+1}) \gamma(x_{n+1}) dx_{n+1}.$$

Оператор $a(\gamma)$ — неограниченный оператор в пространстве \mathcal{L}_+ , определенный на множестве финитных векторов. Собственными векторами оператора $a(\gamma)$, отвечающими собственному значению λ , являются векторы ρ , компоненты которых связаны между собой соотношениями:

$$\rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n+1}{\lambda} \int_{R^V} \rho^{(n+1)}(x_1, \dots, x_{n+1}) \gamma(x_{n+1}) dx_{n+1}.$$

Таковыми векторами являются, например, пуассоновские векторы. Пуассоновским вектором с индексом ρ , или кратко: пуассоновским вектором, называется вектор ρ_ρ , n -ые компоненты которого имеют вид

$$\rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \rho(x_1) \dots \rho(x_n).$$

Определим, формально, оператор $b(\gamma)$, действующий на компоненты произвольного вектора $\rho \in \mathcal{L}_+$ по формуле

$$b(\gamma) \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (n+1) \int_{R^V} \rho^{(n+1)}(x_1, \dots, x_{n+1}) \gamma(x_{n+1}) dx_{n+1}.$$

Очевидно соотношение

$$b(\gamma) \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (a(\gamma) \rho)^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

Оператор $b(1)$ будем обозначать просто b .

Пусть $\chi(y)$ — некоторая целая функция

$$\chi(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \chi_m y^m$$

и пусть $\mathcal{D}_{\chi, \gamma}$ — множество состояний ρ таких, что для всех $n=0, 1, 2, \dots$ сходятся ряды

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \chi_m (n+m)! \|\rho^{(n+m)}\|_{1, n+m}.$$

Тогда можно определить оператор $\chi(b(\gamma))$, действующий на компоненты состояний $\rho \in \mathcal{D}_{\chi, \gamma}$ по формуле (понимаемой в слабом смысле)

$$\begin{aligned} & \chi(b(\gamma)) \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \chi_m (n+m)! \int_{R^{V_m}} \gamma(x_{n+1}) \dots \\ & \dots \gamma(x_{n+m}) \rho^{(n+m)}(x_1, \dots, x_{n+m}) dx_{n+1} \dots dx_{n+m}, \end{aligned}$$

причем, очевидно, что

$$\chi(b(\gamma)) \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (\chi(a(\gamma)) \rho)^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

Для динамической системы случайного числа частиц с парным взаимодействием из условий (2.3), используя оператор \mathbf{b} , получим соотношения

$$\mathbf{b} \sum_{i=1}^n B_i^{(1)} \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n B_i^{(1)} \mathbf{b} \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

$$\mathbf{b}^m \sum_{i=1}^n B_i^{(1)} \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n B_i^{(1)} \mathbf{b}^m \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$

и

$$\mathbf{b} \sum_{\substack{1 \leq i, j < n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{1 \leq i, j < n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \mathbf{b} \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) + \\ + \mathbf{b} \sum_{i=1}^{n-1} (B_{in}^{(2)} + B_{ni}^{(2)}) \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n),$$

$$\mathbf{b}^m \sum_{\substack{1 \leq i, j < n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{1 \leq i, j < n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \mathbf{b}^m \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) + \\ + m \mathbf{b} \sum_{i=1}^{n-1} (B_{in}^{(2)} + B_{ni}^{(2)}) \mathbf{b}^{m-1} \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n),$$

если операторы $B_{ij}^{(1)}$ ($i < n$) и $B_{ij}^{(2)}$ ($i, j < n$) коммутируют с оператором \mathbf{b} . Если $\chi(y)$ — целая функция, плотности $\rho^{(n)}$ являются компонентами состояния $\rho \in \mathcal{P}_{\chi,1}$ и выполняются предыдущие соотношения, то справедливы равенства

$$\chi(\mathbf{b}) \sum_{i=1}^n B_i^{(1)} \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n B_i^{(1)} \chi(\mathbf{b}) \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \quad (2.5)$$

$$\chi(\mathbf{b}) \sum_{\substack{1 \leq i, j < n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{1 \leq i, j < n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \chi(\mathbf{b}) \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) + \\ + \mathbf{b} \sum_{i=1}^{n-1} (B_{in}^{(2)} + B_{ni}^{(2)}) \chi'(\mathbf{b}) \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (2.6)$$

Пусть решение системы уравнений (2.4) $\rho(t; \varepsilon)$ принадлежит множеству $\mathcal{P}_{\chi,1}$. Тогда сопоставим состоянию $\rho(t; \varepsilon)$ вектор $\mathbf{f}(t; \varepsilon)$ по формулам (понимаемым в слабом смысле)

$$\mathbf{f}_\varepsilon^{(n)}(t) = n! \varepsilon^n \chi(\mathbf{b}) \rho_\varepsilon^{(n)}(t).$$

Если соответствие между состояниями $\rho(t; \varepsilon) \in \mathcal{P}_{\chi,1}$ и векторами $\mathbf{f}(t; \varepsilon)$ является взаимно однозначным и χ^{-1} — целая функция, то существует обратный оператор $\chi^{-1}(\mathbf{b})$, определенный на линейном пространстве $\{\chi(\mathbf{b}) \mathcal{P}_{\chi,1}\}$ — области значений оператора $\chi(\mathbf{b})$, и обратное преобразование имеет вид

$$\rho_{\varepsilon}^{(n)}(t) = \varepsilon^{-n} \chi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{b} \right) \frac{1}{n!} f_{\varepsilon}^{(n)}(t).$$

Действительно, это соотношение следует из равенства

$$\mathbf{b} \varepsilon^{-n} \frac{1}{n!} f_{\varepsilon}^{(n)}(t) = \varepsilon^{-n} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{b} \frac{1}{n!} f_{\varepsilon}^{(n)}(t).$$

Функции $f_{\varepsilon}^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n)$ будем называть моментными функциями, отвечающими системе плотностей $\rho_{\varepsilon}^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n)$, $n=0, 1, 2, \dots$, и оператору $\chi(\mathbf{b})$ или просто: моментными функциями, а вектор $\mathbf{f}(t; \varepsilon)$ будем называть моментным вектором. Моментному вектору \mathbf{f} отвечающему некоторому состоянию ρ , сопоставляется функционал

$$\mathbf{f}(\gamma) = f^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbf{R}^{vn}} \gamma(x_1) \dots \gamma(x_n) f^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

называемый производящим функционалом моментного вектора.

Теорема 2.1. Пусть состояние $\rho(t; \varepsilon)$ — решение системы уравнений (2.4)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\varepsilon}^{(n)}(t) = \left(\sum_{i=1}^n B_i^{(1)} + \varepsilon \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \right) \rho_{\varepsilon}^{(n)}(t),$$

где операторы $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ удовлетворяют соотношениям (2.3), (2.5), (2.6) и пусть равномерно по t сходятся ряды

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi_m}{m!} (n+m)! \left\| \frac{\partial \rho^{(n+m)}(t)}{\partial t} \right\|_{1, n+m}, \quad (2.7)$$

где χ_m — коэффициенты разложения некоторой целой функции такой, что $\chi^{-1}(y)$ — также целая функция.

Тогда моментный вектор $\mathbf{f}(t; \varepsilon)$, является слабым решением системы зацепленных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_{\varepsilon}^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) &= \left(\sum_{i=1}^n B_i^{(1)} + \varepsilon \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \right) f_{\varepsilon}^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{R}^{v}} (B_{in+1}^{(2)} + B_{n+1i}^{(2)}) (n+1)! \chi' \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{b} \right) \chi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{b} \right) \frac{1}{(n+1)!} \times \\ &\times f_{\varepsilon}^{(n+1)}(t; x_1, \dots, x_{n+1}) dx_{n+1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Доказательство. Так как по предположению ряды (2.7) сходятся равномерно по t , то моментные функции $f_{\varepsilon}^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n)$ дифференцируемы по t и

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{\varepsilon}^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) = n! \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial t} \chi(\mathbf{b}) \rho_{\varepsilon}^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) =$$

$$= n! \varepsilon^n \chi(\mathbf{b}) \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\varepsilon}^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n).$$

Из условий теоремы следует, что в силу соотношений (2.3), (2.5), (2.6) имеют место равенства

$$\begin{aligned} n! \varepsilon^n \chi(\mathbf{b}) \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\varepsilon}^{(n)}(t) &= n! \varepsilon^n \chi(\mathbf{b}) \left(\sum_{i=1}^n B_{\varepsilon}^{(1)} + \varepsilon \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \right) \rho_{\varepsilon}^{(n)}(t) = \\ &= n! \varepsilon^n \left(\sum_{i=1}^n B_i^{(1)} + \varepsilon \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \right) \chi(\mathbf{b}) \rho_{\varepsilon}^{(n)}(t) + \\ &+ n! \varepsilon^{n+1} \mathbf{b} \sum_{i=1}^{n-1} (B_{in}^{(2)} + B_{ni}^{(2)}) \chi'(\mathbf{b}) \rho_{\varepsilon}^{(n)}(t) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n B_i^{(1)} + \varepsilon \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \right) f_{\varepsilon}^{(n)}(t) + \\ &+ n! \mathbf{b} \sum_{i=1}^{n-1} (B_{in}^{(2)} + B_{ni}^{(2)}) \chi' \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{b} \right) \chi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{b} \right) \frac{1}{(n+1)!} f_{\varepsilon}^{(n)}(t), \end{aligned}$$

что и требуется.

Если решение системы уравнений (2.4) допускает оценки

$$\rho_{\varepsilon}^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) \leq \| \rho_{\varepsilon}^{(n)} \|_{1,n} \rho(t; x_1) \dots \rho(t; x_n), \quad (2.9)$$

где $\rho(t; x)$ — функция плотности, такая, что $\int_{\mathbb{R}^V} \rho(t; x) dx = 1$ то теорема 2.1 справедлива и в сильном смысле.

В зависимости от того, каким оператором является оператор $\chi' \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{b} \right) \chi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{b} \right)$ в уравнениях (2.8) будем получать различные виды зацеплений. Если известно, что

$$\chi' \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{b} \right) \chi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{b} \right) = \zeta(\mathbf{b}),$$

где $\zeta(y)$, $y \in \mathbb{R}^1$, — некоторая целая функция, то решая уравнение

$$\chi'(y) \chi^{-1}(y) = \zeta(\varepsilon y),$$

получим, что символ оператора $\chi(\mathbf{b})$ имеет вид

$$\chi(y) = C e^{\int \zeta(\varepsilon y) dy}, \quad C — константа.$$

В простейшем случае, когда $\zeta(y) \equiv 1$, получим, что

$$\chi(y) = C e^y.$$

Вероятности нахождения системы случайного числа частиц в n -частичном состоянии могут зависеть от параметра ε : $\pi_n =$

$= \pi_n(\varepsilon)$. Если при $\varepsilon \rightarrow 0$ среднее число частиц $N(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n(\varepsilon)$ стремится к ∞ , причем $\varepsilon \cdot N(\varepsilon) \rightarrow 1$, то

$$\int_{\mathbb{R}^v} f_\varepsilon^{(1)}(t; x) dx \rightarrow 1.$$

Цепочка уравнений (2.8) при $\varepsilon \rightarrow 0$ формально переходит в предельную цепочку уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) &= \sum_{l=1}^n B_l^{(1)} f^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) + \\ &+ \sum_{l=1}^n \int_{\mathbb{R}^v} (B_{ln+1}^{(2)} + B_{n+1l}^{(2)}) (n+1)! \zeta(b) \times \\ &\times \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t; x_1, \dots, x_{n+1}) dx_{n+1}, \end{aligned}$$

где $\zeta(y)$ — некоторая целая функция. Эта цепочка уравнений имеет решение вида

$$f^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) = f(t; x_1) \dots f(t; x_n),$$

если функция $f(t; x)$ является решением нелинейного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(t; x_1) &= B^{(1)} f(t; x_1) + \\ &+ \zeta(\|f\|_{[1,1]}) \int_{\mathbb{R}^v} (B_{12}^{(2)} + B_{21}^{(2)}) f(t; x_1) f(t; x_2) dx_2, \end{aligned}$$

называемого кинетическим уравнением.

2.3. Рассмотрим систему случайного числа частиц в пространстве \mathbb{R}^v , n -частичные состояния которой описываются плотностями

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \in \mathcal{L}_+^{(n)}; \quad \mathcal{L}^{(n)} = L_1(\mathbb{R}^{2vn}); \\ p_i, q_i \in \mathbb{R}^v; \quad i = 1, \dots, n; \quad t \in \mathbb{R}^1, \end{aligned}$$

нормированными на вероятности π_n нахождения системы в n -частичном состоянии и являющимися решениями уравнений Лиувилля

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = \\ = \{ \rho_\varepsilon^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n), H_\varepsilon^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \}, \quad (2.10) \end{aligned}$$

где функции Гамильтона $H_\varepsilon^{(n)}$ имеют вид

$$H_\varepsilon^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + \varepsilon \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Phi(|q_i - q_j|),$$

а функция $\Phi(q) \in C^1(\mathbb{R}^N)$. В этом случае операторы $B_i^{(1)}$ и $B_{ij}^{(2)}$ задаются соотношениями

$$\begin{aligned} B_i^{(1)} \rho^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) &= -\frac{p_i}{m} \frac{\partial}{\partial q_i} \rho^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n), \\ B_{ij}^{(2)} \rho^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) &= \\ &= \frac{\partial \rho^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi(|q_i - q_j|)}{\partial q_i}, \quad (i < j), \\ B_{ij}^{(2)} \rho^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) &= \\ &= -\frac{\partial \rho^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi(|q_j - q_i|)}{\partial q_i}, \quad (i > j). \end{aligned}$$

Легко проверить, что эти операторы удовлетворяют условию (2.3) и соотношениям (2.5) и (2.6). Система случайного числа частиц, динамика которой определяется уравнениями Лиувилля (2.10), называется гамильтоновой системой случайного числа частиц.

Сопоставим системе функций плотности $\{\rho_\varepsilon^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)\}$, являющейся решением системы уравнений Лиувилля (2.10), систему моментных функций $\{f_\varepsilon^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)\}$, построенную при помощи оператора e^b . Тогда, в силу теоремы 2.1, получим, что система моментных функций $\{f_\varepsilon^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)\}$ является слабым решением цепочки уравнений Боголюбова:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} f_\varepsilon^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = \\ &= \{f_\varepsilon^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n), H_\varepsilon^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)\} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^{2V}} \frac{\partial \Phi(|q_i - q_{n+1}|)}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \times \\ &\quad \times f_\varepsilon^{(n+1)}(t; p_1, q_1, \dots, p_{n+1}, q_{n+1}) dp_{n+1} dq_{n+1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Можно показать, что при выполнении условия (2.9) система моментных функций $\{f_\varepsilon^{(n)}(t)\}$ является и сильным решением цепочки уравнений (2.11).

Формально, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что система уравнений Боголюбова переходит в предельную систему уравнений, — так называемую цепочку Власова (см. например [16]):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} f^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{m} \frac{\partial}{\partial q_i} f^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} \frac{\partial \Phi(|q_i - q_{n+1}|)}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \times \\
& \times f^{(n+1)}(t; p_1, q_1, \dots, p_{n+1}, q_{n+1}) dp_{n+1} dq_{n+1}. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Эта цепочка уравнений имеет решение вида

$$f^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = f(t; p_1, q_1) \dots f(t; p_n, q_n),$$

где функция $f(t; p, q)$ является решением уравнения Власова

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} f(t; p, q) = -\frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} f(t; p, q) + \\
& + \frac{\partial f(t; p, q)}{\partial p} \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} \frac{\partial \Phi(|q - q'|)}{\partial q} f(t; p', q') dp' dq'.
\end{aligned}$$

Для производящего функционала моментного вектора имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{f}(t; \varepsilon; \gamma)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{2\nu n}} f_{\varepsilon}^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \gamma(p_1, q_1) \dots \\
& \dots \gamma(p_n, q_n) dp_1 dq_1 \dots dp_n dq_n = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{2\nu n}} \frac{\partial}{\partial t} f_{\varepsilon}^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \gamma(p_1, q_1) \dots \\
& \dots \gamma(p_n, q_n) dp_1 dq_1 \dots dp_n dq_n
\end{aligned}$$

в предположении равномерной сходимости по t последнего ряда. Так как вектор $\mathbf{f}(t; \varepsilon)$ является решением цепочки уравнений Боголюбова, то

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{2\nu n}} \frac{\partial}{\partial t} f_{\varepsilon}^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \gamma(p_1, q_1) \dots \\
& \dots \gamma(p_n, q_n) dp_1 dq_1 \dots dp_n dq_n = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{2\nu n}} \left[\left\{ f_{\varepsilon}^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n), \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + \varepsilon \sum_{1 < i < j < n} \Phi(|q_i - q_j|) \right) \right\} + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} \frac{\partial \Phi(|q_i - q_{n+1}|)}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \times \right. \\
& \times f_{\varepsilon}^{(n+1)}(t; p_1, q_1, \dots, p_{n+1}, q_{n+1}) dp_{n+1} dq_{n+1} \left. \right] \times \\
& \times \gamma(p_1, q_1) \dots \gamma(p_n, q_n) dp_1 dq_1 \dots dp_n dq_n.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{2\nu n}} \left(- \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{m} \frac{\partial f_{\varepsilon}^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)}{\partial q_i} \right) \gamma(p_1, q_1) \dots \\
& \dots \gamma(p_n, q_n) dp_1 dq_1 \dots dp_n dq_n = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{2\nu n}} \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{m} \frac{\partial \gamma(p_i, q_i)}{\partial q_i} f_{\varepsilon}^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \gamma(p_1, q_1) \dots \\
& \dots \gamma(p_{i-1}, q_{i-1}) \gamma(p_{i+1}, q_{i+1}) \dots \gamma(p_n, q_n) dp_1 dq_1 \dots dp_n dq_n = \\
& = \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} \frac{p_1}{m} \frac{\partial \gamma(p_1, q_1)}{\partial q_1} \frac{\delta}{\delta \gamma(p_1, q_1)} f(t; \varepsilon; \gamma) dp_1 dq_1,
\end{aligned}$$

где $\frac{\delta}{\delta \gamma(p_1, q_1)}$ — производная Фреше.

Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{2\nu n}} \left\{ f_{\varepsilon}^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n), \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Phi(|q_i - q_j|) \right\} \gamma(p_1, q_1) \dots \\
& \dots \gamma(p_n, q_n) dp_1 dq_1 \dots dp_n dq_n =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{4\nu}} \{ \Phi(|q_1 - q_2|), \gamma(p_1, q_1) \gamma(p_2, q_2) \} \frac{\delta^2 f(t; \varepsilon; \gamma)}{\delta \gamma(p_1, q_1) \delta \gamma(p_2, q_2)} \times \\
& \quad \times dp_1 dq_1 dp_2 dq_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{2\nu n}} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} \frac{\partial \Phi(|q_i - q_{n+1}|)}{\partial q_i} \frac{\partial f_{\varepsilon}^{(n+1)}(t; p_1, q_1, \dots, p_{n+1}, q_{n+1})}{\partial p_i} \right) \times \\
& \quad \times dp_{n+1} dq_{n+1} \gamma(p_1, q_1) \dots \gamma(p_n, q_n) dp_1 dq_1 \dots dp_n dq_n = \\
& = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{4\nu}} \{ \Phi(|q_1 - q_2|), \gamma(p_1, q_1) + \gamma(p_2, q_2) \} \frac{\delta^2 f(t; \varepsilon; \gamma)}{\delta \gamma(p_1, q_1) \delta \gamma(p_2, q_2)} \times \\
& \quad \times dp_1 dq_1 dp_2 dq_2.
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение для производящего функционала $f(t; \varepsilon; \gamma)$ моментного вектора $\hat{f}(t; \varepsilon)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f(t; \varepsilon; \gamma)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} \frac{p_1}{m} \frac{\partial \gamma(p_1, q_1)}{\partial q_1} \frac{\delta f(t; \varepsilon; \gamma)}{\delta \gamma(p_1, q_1)} dp_1 dq_1 + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{4\nu}} \{ \Phi(|q_1 - q_2|), (\varepsilon \gamma(p_1, q_1) \gamma(p_2, q_2) + \gamma(p_1, q_1) + \gamma(p_2, q_2)) \} \times \\
& \quad \times \frac{\delta^2 f(t; \varepsilon; \gamma)}{\delta \gamma(p_1, q_1) \delta \gamma(p_2, q_2)} dp_1 dq_1 dp_2 dq_2.
\end{aligned}$$

При формальном предельном переходе $\varepsilon \rightarrow 0$ это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t; \gamma)}{\partial t} = & \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} \frac{p_1}{m} \frac{\partial \gamma(p_1, q_1)}{\partial q_1} \frac{\delta f(t; \gamma)}{\delta \gamma(p_1, q_1)} dp_1 dq_1 + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{4\nu}} (\Phi(|q_1 - q_2|), (\gamma(p_1, q_1) + \gamma(p_2, q_2))) \frac{\delta^2 f(t; \gamma)}{\delta \gamma(p_1, q_1) \delta \gamma(p_2, q_2)} \times \\ & \times dp_1 dq_1 dp_2 dq_2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.4. Пусть A — оператор, определенный на всюду плотном множестве $D(A)$ пространства \mathcal{L} . Тогда можно определить сопряженный ему оператор, действующий в пространстве \mathcal{M} , который мы будем обозначать той же буквой A , а результат его действия на вектор $\gamma \in \mathcal{M}$ будем обозначать через γA .

Действие оператора $\mathbf{a}(1)$ в пространстве \mathcal{M}_+ в этом случае определяется соотношениями

$$(\gamma \mathbf{a}(1))^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \gamma^{(n-1)}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}).$$

Оператор $\mathbf{a}(1)$ определен на всюду плотном множестве финитных векторов в пространстве \mathcal{M}_+ .

Введем, формально, оператор \mathbf{b}^+ , действующий на компоненты произвольного вектора $\gamma \in \mathcal{M}_+$ по формуле

$$\mathbf{b}^+ \gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \gamma^{(n-1)}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}).$$

Очевидно, что если вектор $\gamma \in \mathcal{M}_+$ принадлежит области определения оператора $\mathbf{a}(1)$, то

$$\mathbf{b}^+ \gamma^{(n)} = (\gamma \mathbf{a}(1))^{(n)}.$$

Из определения операторов \mathbf{b} , \mathbf{b}^+ и вида билинейной формы (1.2) получим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma^{(n)}, \mathbf{b} \rho^{(n)}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{b}^+ \gamma^{(n)}, \rho^{(n)})$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma^{(n)}, \chi(\mathbf{b}) \rho^{(n)}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi(\mathbf{b}^+) \gamma^{(n)}, \rho^{(n)})$$

для всех векторов γ и ρ , принадлежащих области определения оператора $\chi(\mathbf{a}(1))$ в пространствах \mathcal{M}_+ и \mathcal{L}_+ соответственно.

Пусть плотности $\rho_\varepsilon^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n)$, $n=0, 1, 2, \dots$, являются решениями уравнений (2.7) с начальными данными $\rho_\varepsilon^{(n)}(0; x_1, \dots$

\dots, x_n), а функции $\gamma_{\varepsilon}^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n)$, $n=0, 1, 2, \dots$, являются решениями сопряженных уравнений

$$\frac{\partial \gamma_{\varepsilon}^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n)}{\partial t} = \left(\sum_{i=1}^n B_i^{(1)+} + \varepsilon \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)+} \right) \gamma_{\varepsilon}^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n),$$

где операторы $B^{(1)+}$, $B^{(2)+}$ — сопряженные к операторам $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, с начальными данными $\gamma^{(n)}(0; x_1, \dots, x_n)$. Тогда имеют место соотношения:

$$(\gamma_{\varepsilon}^{(n)}(t), \rho_{\varepsilon}^{(n)}(0)) = (\gamma_{\varepsilon}^{(n)}(0), \rho_{\varepsilon}^{(n)}(t)),$$

справедливость которых легко доказывается с помощью аналитической теории полугрупп [7]. Отсюда легко получить, что если $f_{\varepsilon}^{(n)}(t)$ — моментные функции, отвечающие системе плотностей $\rho_{\varepsilon}^{(n)}(t)$ и оператору $\chi(\mathbf{b})$, то справедливы соотношения.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_{\varepsilon}^{(n)}(t), \rho_{\varepsilon}^{(n)}(0)) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_{\varepsilon}^{(n)}(t), \chi^{-1}(\mathbf{b}) \frac{\varepsilon^{-n}}{n!} f_{\varepsilon}^{(n)}(0)) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^{-n}}{n!} \chi^{-1}(\mathbf{b}^+) \gamma_{\varepsilon}^{(n)}(t), f_{\varepsilon}^{(n)}(0) \right) \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_{\varepsilon}^{(n)}(0), \rho_{\varepsilon}^{(n)}(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^{-n}}{n!} \chi^{-1}(\mathbf{b}^+) \gamma_{\varepsilon}^{(n)}(0), f_{\varepsilon}^{(n)}(t) \right).$$

Обозначим через $g_{\varepsilon}^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n)$, $n=0, 1, 2, \dots$, функции, полученные из системы функций $\gamma_{\varepsilon}^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n)$ по формуле

$$g_{\varepsilon}^{(n)}(t) = \varepsilon^{-n} \chi^{-1}(\mathbf{b}^+) \gamma_{\varepsilon}^{(n)}(t). \quad (2.15)$$

Тогда предыдущие соотношения примут вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (g_{\varepsilon}^{(n)}(t), f_{\varepsilon}^{(n)}(0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (g_{\varepsilon}^{(n)}(0), f_{\varepsilon}^{(n)}(t)). \quad (2.16)$$

Соотношения (2.15) определяют взаимнооднозначное соответствие между системой функций $\gamma_{\varepsilon}^{(n)}(t)$ и системой функций $g_{\varepsilon}^{(n)}(t)$. Действительно, обратное преобразование к преобразованию (2.15) имеет вид

$$\gamma_{\varepsilon}^{(n)}(t) = \chi(\mathbf{b}^+) \varepsilon^n g_{\varepsilon}^{(n)}(t). \quad (2.17)$$

Теорема 2.2. Пусть система функций $\{\gamma_{\varepsilon}^{(n)}(t)\}$ является решением системы уравнений, сопряженных уравнениям (2.4).

Тогда система функций $\{g_\varepsilon^{(n)}(t)\}$, полученная из системы функций $\{\gamma_\varepsilon^{(n)}(t)\}$ по формулам (2.15), является решением системы зацепленных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} g_\varepsilon^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) = \\ & = \left(\sum_{i=1}^n B_i^{(1)+} + \varepsilon \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)+} \right) g_\varepsilon^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) + \\ & + \chi^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{b}^+ \right) \chi' \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{b}^+ \right) \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} (B_{ij}^{(2)+} + B_{ji}^{(2)+}) \times \\ & \times g_\varepsilon^{(n-1)}(t; x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Доказательство. Продифференцируем тождество (2.15) по t , учитывая, что функции $\gamma_\varepsilon^{(n)}(t)$ являются решениями уравнений, сопряженных уравнениям (2.4):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} g_\varepsilon^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) = \varepsilon^{-n} \chi^{-1}(\mathbf{b}^+) \frac{\partial}{\partial t} \gamma_\varepsilon^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n) = \\ & = \varepsilon^{-n} \chi^{-1}(\mathbf{b}^+) \left(\sum_{i=1}^n B_i^{(1)+} + \varepsilon \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)+} \right) \gamma_\varepsilon^{(n)}(t; x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Из определения операторов \mathbf{b} , \mathbf{b}^+ и свойств операторов $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ получим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n B_i^{(1)+} (\mathbf{b}^+)^k \gamma^{(n)}, \rho^{(n)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\gamma^{(n)}, \mathbf{b}^k \sum_{i=1}^n B_i^{(1)} \rho^{(n)} \right) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\gamma^{(n)}, \sum_{i=1}^n B_i^{(1)} \mathbf{b}^k \rho^{(n)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((\mathbf{b}^+)^k \sum_{i=1}^n B_i^{(1)+} \gamma^{(n)}, \rho^{(n)} \right) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$(\mathbf{b}^+)^k \sum_{i=1}^n B_i^{(1)+} \gamma^{(n)} = \sum_{i=1}^n B_i^{(1)+} (\mathbf{b}^+)^k \gamma^{(n)}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)+} (\mathbf{b}^+)^k \gamma^{(n)}, \rho^{(n)} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\gamma^{(n)}, \mathbf{b}^k \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \rho^{(n)} \right) = \\ & = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\gamma^{(n)}, \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \mathbf{b}^k \rho^{(n)} + k \mathbf{b} \sum_{i=1}^{n-1} (B_{in}^{(2)} + B_{ni}^{(2)}) \mathbf{b}^{k-1} \rho^{(n)} \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left((\mathbf{b}^+)^k \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)} \gamma^{(n)}, \rho^{(n)} \right) + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \left(k (\mathbf{b}^+)^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (B_{in}^{(2)+} + B_{ni}^{(2)}) \gamma^{(n-1)} \right), \rho^{(n)} \right),$$

т. е.

$$\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)+} (\mathbf{b}^+)^k \gamma^{(n)} = \\ = (\mathbf{b}^+)^k \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)+} \gamma^{(n)} + k (\mathbf{b}^+)^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (B_{in}^{(2)+} + B_{ni}^{(2)+}) \gamma^{(n-1)} \right)_+.$$

Таким образом, если $\chi(y)$ — целая функция, то имеют место соотношения:

$$\chi(\mathbf{b}^+) \sum_{i=1}^n B_i^{(1)+} \gamma^{(n)} = \sum_{i=1}^n B_i^{(1)+} \chi(\mathbf{b}^+) \gamma^{(n)}, \\ \chi(\mathbf{b}^+) \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)+} \gamma^{(n)} = \\ = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} B_{ij}^{(2)+} \chi(\mathbf{b}^+) \gamma^{(n)} - \chi'(\mathbf{b}^+) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (B_{in}^{(2)+} + B_{ni}^{(2)+}) \gamma^{(n-1)} \right)_+.$$

Используя полученные соотношения и формулу (2.18), получаем, что система функций $\{g_g^{(n)}(t)\}$ является решением зацепленной системы уравнений (2.18).

Система зацепленных уравнений (2.18) называется двойственной цепочкой уравнений к цепочке уравнений (2.7) или просто двойственной цепочкой.

В случае, когда уравнения (2.4) являются уравнениями Лиувилля (2.10), двойственная цепочка уравнений к цепочке уравнений Боголюбова имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_g^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = \\ = \{H_g^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n), g_g^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)\} - \\ - \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \frac{\partial \Phi(|q_i - q_j|)}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \times \\ \times g_g^{(n-1)}(t; p_1, q_1, \dots, p_{j-1}, q_{j-1}, p_{j+1}, q_{j+1}, \dots, p_n, q_n), \quad (2.19)$$

а уравнение для производящего функционала $g(t; \varepsilon; \rho)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} g(t; \varepsilon; \rho) = & - \int_{R^{2\nu}} \frac{p_1}{m} \frac{\partial \rho(p_1, q_1)}{\partial q_1} \frac{\delta g(t; \varepsilon; \rho)}{\delta \rho(p_1, q_1)} dp_1 dq_1 - \\ & - \frac{1}{2} \int_{R^{4\nu}} \{ \Phi(|q_1 - q_2|), \rho(p_1, q_1) \rho(p_2, q_2) \} \left(\varepsilon \frac{\delta^2}{\delta \rho(p_1, q_1) \delta \rho(p_2, q_2)} + \right. \\ & \left. + \frac{\delta}{\delta \rho(p_1, q_1)} + \frac{\delta}{\delta \rho(p_2, q_2)} \right) g(t; \varepsilon; \rho) dp_1 dq_1 dp_2 dq_2. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Предельное уравнение, получаемое формальным предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$, принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(t; \rho) = & - \int_{R^{2\nu}} \frac{p_1}{m} \frac{\partial \rho(p_1, q_1)}{\partial q_1} \frac{\delta g(t; \rho)}{\delta \rho(p_1, q_1)} dp_1 dq_1 - \\ & - \frac{1}{2} \int_{R^{4\nu}} \{ \Phi(|q_1 - q_2|), \rho(p_1, q_1) \rho(p_2, q_2) \} \times \\ & \times \left(\frac{\delta}{\delta \rho(p_1, q_1)} + \frac{\delta}{\delta \rho(p_2, q_2)} \right) g(t; \rho) dp_1 dq_1 dp_2 dq_2. \quad (2.21) \end{aligned}$$

2.5. Решения двойственных цепочек уравнений и двойственных уравнений для производящих функционалов тесно взаимосвязаны между собой — это, например, видно из соотношения (2.15). Для решения двойственных уравнений в функциональных производных справедливо следующее утверждение:

Лемма 2.1. Пусть $g(t; \varepsilon; \rho)$ — целый функционал, являющийся решением уравнения (2.19) и удовлетворяющий начальному условию

$$g(0; \varepsilon; \rho) = \int_{R^{2\nu k}} \rho(p_1, q_1) \dots \rho(p_k, q_k) g^{(k)}(p_1, q_1 \dots p_k, q_k) dp_1 dq_1 \dots \dots dp_k dq_k,$$

где $g^{(k)}$ — элемент пространства $\mathcal{M}_+^{(k)}$, и пусть $f(t; \varepsilon; \gamma)$ — решение уравнения (2.13), являющееся производящим функционалом, соответствующим моментному вектору $f(t; \varepsilon)$ — решению уравнений Боголюбова. Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \int_{R^{2\nu k}} \frac{\delta^k f(t; \varepsilon; \gamma)}{\delta \gamma(p_1, q_1) \dots \delta \gamma(p_k, q_k)} \Big|_{\gamma=0} g^{(k)}(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k) dp_1 dq_1 \dots \\ \dots dp_k dq_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{R^{2\nu n}} f_\varepsilon^{(n)}(0; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \times \\ \times \frac{\delta^n g(t; \varepsilon; \rho)}{\delta \rho(p_1, q_1) \dots \delta \rho(p_n, q_n)} \Big|_{\rho=0} dp_1 dq_1 \dots dp_n dq_n. \quad (2.22) \end{aligned}$$

Доказательство. Функционалу $g(t; \varepsilon; \rho)$ соответствует вектор $g(t; \varepsilon)$, для которого этот функционал является производящим. В силу условий теоремы, компоненты вектора $g(0; \varepsilon)$ имеют вид

$$g_{\varepsilon}^{(n)}(0; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = k! \delta_{nk} g^{(k)}(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k)$$

и, в силу соотношения (2.15) получаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{R^{2\nu n}} f_{\varepsilon}^{(n)}(0; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \times \\ & \times \frac{\delta^n g(t; \varepsilon; \rho)}{\delta \rho(p_1, q_1) \dots \delta \rho(p_n, q_n)} \Big|_{\rho=0} dp_1 dq_1 \dots dp_n dq_n = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{R^{2\nu n}} f_{\varepsilon}^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) n! \delta_{nk} \times \\ & \times g^{(k)}(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k) dp_1 dq_1 \dots dp_n dq_n = \\ & = \int_{R^{2\nu k}} f_{\varepsilon}^{(k)}(t; p_1, q_1, \dots, p_k, q_k) g^{(k)}(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k) dp_1 dq_1 \dots \\ & \dots dp_k dq_k. \end{aligned}$$

Следствие 2.1. Пусть $f(t; \varepsilon; \gamma)$ — решение уравнения (2.13), удовлетворяющее начальному условию

$$f(0; \varepsilon; \gamma) = e^{(\gamma, f)}$$

и пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{R^{2\nu k}} \frac{\delta^{k f}(t; \varepsilon; \gamma)}{\delta \gamma(p_1, q_1) \dots \delta \gamma(p_k, q_k)} \Big|_{\gamma=0} g^{(k)}(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k) dp_1 dq_1 \dots \\ & \dots dp_k dq_k = g(t; \varepsilon; \rho) \Big|_{\rho=f}. \end{aligned}$$

Переходя формально к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в соотношении (2.17), получим предельное соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (g^{(n)}(t), f^{(n)}(0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (g^{(n)}(0), f^{(n)}(t)). \quad (2.23)$$

Решения предельных уравнений (2.14), (2.21) обладают рядом особых свойств, раскрываемых следующими утверждениями.

Лемма 2.2. Если $f(t; p, q)$ — решение уравнения Власова, то уравнение (2.14) имеет решение вида

$$f(t; \gamma) = e^{(\gamma, f(t))}.$$

Это легко проверить, используя следующие соотношения:

$$\frac{\delta f(t; \gamma)}{\delta \gamma(p, q)} = \frac{\delta}{\delta \gamma(p, q)} e^{(\gamma, f(t))} = f(t; p, q) e^{(\gamma, f(t))},$$

$$\frac{\delta^2 f(t; \gamma)}{\delta \gamma(p_1, q_1) \delta \gamma(p_2, q_2)} = f(t; p_1, q_1) f(t; p_2, q_2) e^{(\gamma, f(t))},$$

$$\frac{\partial f(t; \gamma)}{\partial t} = \left(\gamma, \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right) e^{(\gamma, f(t))}.$$

Установим теперь взаимосвязь между решениями предельного уравнения (2.21) и решениями уравнения Власова.

Лемма 2.3. Пусть $f(t; p, q)$ — решение уравнения Власова, удовлетворяющее начальному условию

$$f(0; p, q) = f_0(p, q).$$

Тогда решением уравнения (2.21), удовлетворяющим начальному условию

$$g(0; f_0) = \int_{\mathbb{R}^{2\nu k}} f_0(p_1, q_1) \dots f_0(p_k, q_k) g^{(k)}(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k) \times \\ \times dp_1 dq_1 \dots dp_k dq_k$$

будет функционал

$$g(t; f_0) = \int_{\mathbb{R}^{2\nu k}} f(t; p_1, q_1) \dots f(t; p_k, q_k) g^{(k)}(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k) \times \\ \times dp_1 dq_1 \dots dp_k dq_k.$$

Доказательство, в предположении справедливости предельного соотношения (2.23) следует из следствия 2.1.

Таким образом, решение уравнения Власова является характеристикой для уравнения (2.21).

2.6. Динамику системы случайного числа частиц, описываемую уравнением (2.1) для вектора $\rho(t) \in \mathcal{L}_+$, можно также описать, определив эволюцию вектора $\theta(t) \in \mathcal{H}_+$. Пусть вектор $\theta(t) \in \mathcal{H}_+$ и комплексно сопряженный ему вектор $\bar{\theta}(t)$ являются решениями систем уравнений

$$\frac{\partial \theta^{(n)}(t)}{\partial t} = A^{(n)} \theta^{(n)}(t); \quad \frac{\partial \bar{\theta}^{(n)}(t)}{\partial t} = A^{(n)} \bar{\theta}^{(n)}(t), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Тогда, если $A^{(n)}$ — операторы дифференцирования, то вектор $\rho(t) \in \mathcal{L}_+$, описывающий то же состояние, что и вектор $\theta(t) \in \mathcal{H}_+$, является решением системы уравнений

$$\frac{\partial \rho^{(n)}(t)}{\partial t} = A^{(n)} \rho^{(n)}(t), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Например, это справедливо для гамильтоновых систем.

Через e^{At} обозначим полугруппу эволюции вектора $\theta(t) \in \mathcal{H}_+$. С помощью этой полугруппы так же, как и в квантовой механике, можно определить временную эволюцию операторов

$$B(t) = e^{At} B e^{At},$$

где B — оператор в пространстве \mathcal{H} .

Рассмотрим обобщенный n -частичный оператор плотности

$$\hat{\Phi}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \hat{a}^*(x_1) \dots \hat{a}^*(x_n) \hat{a}(x_n) \dots \hat{a}(x_1).$$

В работе Шенберга [23] показано, что обобщенные n -частичные операторы плотности

$$\hat{\Phi}^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = e^{-At} \hat{\Phi}^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) e^{At},$$

где A — оператор, определяющий полугруппу эволюции гамильтоновой системы, описанной в пункте 2.3, является решением обобщенной цепочки уравнений Боголюбова

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Phi}^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = \\ & = \{\hat{\Phi}^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n), H^{(n)}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)\} + \\ & + \int_{\mathbb{R}^{2\nu}} \left\{ \hat{\Phi}^{(n+1)}(t; p_1, q_1, \dots, p_{n+1}, q_{n+1}), \sum_{i=1}^n \Phi(|q_i - q_{n+1}|) \right\} \times \\ & \quad \times dp_{n+1} dq_{n+1}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Цепочка уравнений Боголюбова получается из этой обобщенной цепочки вычислением средних значений левой и правой частей уравнений (2.24), то есть, если через $f^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ обозначить среднее значение оператора $\hat{\Phi}^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ в состоянии θ , то функция $f^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ будет являться решением цепочки уравнений Боголюбова. Заметим, что

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) &= \langle \theta, \hat{\Phi}^{(n)}(t) \theta \rangle = \langle \theta(t), \hat{\Phi}^{(n)} \theta(t) \rangle = \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!} \int_{\mathbb{R}^{2\nu m}} |\theta^{(m)}(t; p_1, q_1, \dots, p_m, q_m)|^2 dp_{n+1} dq_{n+1} \dots dp_m dq_m, \end{aligned}$$

а так как

$$|\theta^{(m)}(t; p_1, q_1, \dots, p_m, q_m)|^2 = \rho^{(m)}(t; p_1, q_1, \dots, p_m, q_m),$$

то полученную формулу можно записать в виде

$$f^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = n! e^{b \rho^{(n)}(t; p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)}.$$

Следовательно, среднее значение обобщенного n -частичного оператора плотности $\hat{\Phi}^{(n)}$ в состоянии $\theta(t)$ есть не что иное, как моментная функция $f^{(n)}(t)$, отвечающая оператору e^b и вектору $\rho(t) \in \mathcal{S}$, описывающему то же состояние, что и вектор $\theta(t) \in \mathcal{H}_+$.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ЧАСТИЦ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЯМИ КОЛМОГорова — ФЕЛЛЕРА

3.1. Вывод необратимых кинетических уравнений типа уравнения Больцмана из цепочки уравнений Боголюбова для частичных функций распределения методом функционального усреднения и разложения по степеням плотности частиц был впервые предложен Н. Н. Боголюбовым [4]. Несколько иной подход, позволяющий провести математически строгий вывод уравнения Больцмана из гамильтоновой механики при существенных ограничениях на потенциал взаимодействия был предложен в работе Лэнфорда (Lanford O. E.) «Lecture Notes from 1974 Battle Recontres in Seattle» и диссертации Кинга (King F.).

Вывод необратимых кинетических уравнений из системы необратимых линейных n -частичных уравнений ($n=1, 2, \dots$) аналогичен рассмотренной в [1] в задаче вывода обратимых кинетических уравнений типа уравнения Власова из n -частичных уравнений Лиувилля. Впервые вероятностная модель для вывода кинетических уравнений была предложена М. А. Леонтовичем [9] и для систем с дискретным пространством состояний им было выведено общее кинетическое уравнение. В дальнейшем этот подход был развит для частных случаев непрерывных систем. Кацем [8], Маккином [20, 21]. В работах Такахаши [25, 26], Танаки [27, 28], Уено [29] приведен вывод однородного уравнения Больцмана из «вероятностной» марковской динамики малого статистического ансамбля, причем в работе Танаки [28] рассматривается, в отличие от предыдущих работ, достаточно общее нелинейное кинетическое уравнение — аналог уравнения Больцмана для системы взаимодействующих частиц с взаимодействием произвольной арности.

В отличие от описанной в [1] канонической процедуры униформизации обратимых кинетических уравнений, сопоставляющей кинетическим уравнениям типа уравнения Власова систему n -частичных уравнений Лиувилля, для необратимых кинетических уравнений подобная процедура не является однозначной. Эта неоднозначность может приводить к неправильным с физической точки зрения вероятностным моделям.

Вывод однородного уравнения Больцмана из бесконечной системы уравнений Колмогорова — Феллера специального вида для плотностей систем конечного числа частиц проведен в работе [2], причем предложенная вероятностная модель системы взаимодействующих частиц является «правильной» в том смысле, что выполняется физический принцип сохранения импульса. Задача существования и единственности решения задачи Коши для построенных в работе цепочек уравнений легко решается с помощью аналитической теории полугрупп, так как в силу ограниченности инфинитезимальных операторов

ров полугруппы эволюции систем конечного числа частиц, описываемых уравнениями Колмогорова—Феллера, здесь не возникают трудности, указанные в [13] для решения аналогичной задачи в случае цепочки Боголюбова. Для цепочки Боголюбова эта задача рассматривалась также в работах [10, 12, 14, 15, 17].

3.2. Рассмотрим систему случайного числа частиц в \mathbb{R}^3 , находящуюся с вероятностью π_n в n -частичном состоянии, описываемом в момент времени $t \in \mathbb{R}^1$ плотностью $\rho_g^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n)$ — симметричной функцией скоростей частиц $v_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_{\mathbb{R}^{3n}} \rho_g^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n) dv_1 \dots dv_n = \pi_n.$$

Мы предполагаем, что плотности $\rho_g^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, являются решениями уравнений Колмогорова—Феллера

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_g^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n)}{\partial t} = \\ & = \varepsilon \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_{\mathbb{R}^3} (\rho_g^{(n)}(t; v_1, \dots, v_i + h, \dots, v_j - h, \dots, v_n) - \\ & \quad - \rho_g^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n)) \mu(v_j - v_i; dh), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где ε — положительный параметр, а $\mu(v; dh)$, $v \in \mathbb{R}^3$, — положительная мера на \mathbb{R}^3 , удовлетворяющая следующим условиям:

1) мера $\mu(v; dh)$ равномерно ограничена по v , то есть существует константа $c \geq 0$ такая, что для всех $v \in \mathbb{R}^3$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mu(v; dh) \leq C;$$

2) для любого фиксированного борелевского множества $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ $\mu(v; \Omega)$ является интегрируемой по Лебегу функцией,

3) $\int_{\mathbb{R}^3} v(h) \mu(v; dh) = \int_{\mathbb{R}^3} v(-h) \mu(-v; dh)$ для любой функции $v(h) \in L_1(\mu; \mathbb{R}^3)$, где $L_1(\mu; \mathbb{R}^3) = \bigcap_{v \in \mathbb{R}^3} L_1(\mu(v; \cdot); \mathbb{R}^3)$,

4) для любой функции $\psi(v) \in L_1(\mathbb{R}^3)$ имеет место соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(v - 2h) \mu(v; dh) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(v) \mu(v; dh) dv.$$

Уравнение (3.1) описывает случайный процесс скачкообразного изменения скоростей частиц, происходящий в результате их парных взаимодействий с учетом закона сохранения им-

пульса (скорости v_i, v_j пары взаимодействующих частиц переходят в скорости $v_i' = v_i + h, v_j' = v_j - h$ и, следовательно, $v_i' + v_j' = v_i + v_j$). Мера $\mu(v; dh)$ определяет вероятность перехода относительной скорости v пары взаимодействующих частиц в относительную скорость $v - 2h$. Параметр ε характеризует интенсивность парного взаимодействия. Условие 3), накладываемое на меру $\mu(v; dh)$, обеспечивает сохранение симметричности, а условие 4) — сохранение нормировки решения уравнения (3.1).

Сопоставим системе функций $\{\rho_\varepsilon^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n)\}$ систему моментных функций $\{f_\varepsilon^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n)\}$ при помощи формулы (понимаемой в слабом смысле)

$$f_\varepsilon^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n) = \varepsilon^n e^{b_\varepsilon} \rho_\varepsilon^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n), \quad (3.2)$$

если ряды $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{m!} \pi_{n+m}$ сходятся при всех $n=0, 1, 2, \dots$

Вообще говоря, вероятности π_n нахождения системы в n -частичном состоянии могут зависеть от параметра ε : $\pi_n = \pi_n(\varepsilon)$. Мы будем предполагать, что среднее число частиц $N(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n(\varepsilon)$ обратно пропорционально интенсивности парного взаимодействия.

Важным примером является распределение Пуассона

$$\pi_n(\varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon^{-n}}{n!}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

В этом случае среднее число частиц равно $\frac{1}{\varepsilon}$.

Если сходится ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{-(n+m)}}{m!} \int_{\mathbb{R}^{3(n+m)}} f^{(n+m)}(t; v_1, \dots, v_{n+m}) dv_1 \dots dv_{n+m}, \quad (3.3)$$

то соответствие между системой плотностей $\{\rho_\varepsilon^{(n)}\}$ и системой моментных функций $\{f_\varepsilon^{(n)}\}$ является взаимнооднозначным: обратное преобразование (также понимаемое в слабом смысле) имеет вид

$$\rho_\varepsilon^{(n)}(t) = e^{-b_\varepsilon} \varepsilon^{-n} f_\varepsilon^{(n)}(t). \quad (3.4)$$

Ряд (3.4) сходится, например, когда $\pi_n(\varepsilon)$ есть распределение Пуассона.

В работе [2] доказана следующая теорема:

Теорема 3.1. Пусть система плотностей $\{\rho_\varepsilon^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n)\}$ является решением системы уравнений (3.1) и при всех $n=0, 1, 2, \dots$ интегралы

$$\int_{\mathbb{R}^{3n}} \rho_{\varepsilon}^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n) dv_1 \dots dv_n$$

сходятся равномерно по $t \in \mathbb{R}^1$. Тогда система моментных функций $\{f_{\varepsilon}^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n)\}$ является слабым решением бесконечной системы зацепленных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} f_{\varepsilon}^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n) = \\ & = \varepsilon \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_{\mathbb{R}^3} (f_{\varepsilon}^{(n)}(t; v_1, \dots, v_i + h, \dots, v_j - h, \dots, v_n) - f_{\varepsilon}^{(n)}(t; \\ & \quad v_1, \dots, v_n)) \times \mu(v_j - v_i; dh) + \\ & \quad + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (f_{\varepsilon}^{(n+1)}(t; v_1, \dots, v_i + h, \dots, v_{n+1} - h) - \\ & \quad - f_{\varepsilon}^{(n+1)}(t; v_1, \dots, v_{n+1})) \mu(v_{n+1} - v_i; dh) dv_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Если система плотностей $\{\rho_{\varepsilon}^{(n)}\}$ такова, что имеют место оценки

$$\rho_{\varepsilon}^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n) \leq \pi_n(\varepsilon) \rho(t; v_1) \dots \rho(t; v_n),$$

где $\rho(t; v)$ — некоторая функция плотности, такая, что интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(t; v) dv = 1,$$

сходится равномерно по t , то сформулированное выше утверждение справедливо и в сильном смысле.

Динамика предельной системы, когда интенсивность парного взаимодействия $\varepsilon \rightarrow 0$, а среднее число частиц $N(\varepsilon) \rightarrow \infty$, причем $\varepsilon \cdot N(\varepsilon) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, описывается предельной цепочкой уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} f^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n) = \\ & = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (f^{(n+1)}(t; v_1, \dots, v_i + h, \dots, v_{n+1} - h) - \\ & \quad - f^{(n+1)}(t; v_1, \dots, v_{n+1})) \mu(v_{n+1} - v_i; dh) dv_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

которая получается из цепочки уравнений (3.5) формальным предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.3. Обобщенным уравнением Больцмана будем называть уравнение

$$\frac{\partial f(t; v)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (f(t; v + h) f(t; v' - h) -$$

$$-f(t; v) f(t; v') \mu(v' - v; dh) dv' \quad (3.7)$$

в пространстве плотностей.

Предельная цепочка уравнений (3.6) имеет решение вида

$$f^{(0)}(t) = 1, f^{(n)}(t; v_1, \dots, v_n) = f(t; v_1) \dots f(t; v_n), n = 1, 2, \dots,$$

тогда и только тогда, когда функция $f(t; v)$ является решением обобщенного уравнения Больцмана (3.7).

Уравнение (3.7) описывает динамику взаимодействующих частиц для широкого класса парных взаимодействий, в частности, важнейшим примером является описание систем с упругим парным взаимодействием, то есть взаимодействием, в результате которого сохраняется кинетическая энергия пары взаимодействующих частиц.

Пусть мера $\mu(v; dh)$ имеет вид

$$\mu(v; dh) = \theta((v, n)) \delta(r - (v, n)) B(v; dn) dr \quad (3.8)$$

где $h = r \cdot n$, n — единичный вектор в \mathbb{R}^3 , $r \in \mathbb{R}_+^4$, $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда, $B(v; dn)$ — некоторая положительная мера, удовлетворяющая условиям, аналогичным условиям 1)–4). для меры μ :

1) мера $B(v; dn)$ равномерно ограничена по v ;

2) для любого фиксированного борелевского множества $\Omega \in \mathcal{B}(S)$, где S — единичная сфера в \mathbb{R}^3 , функция $B(v, \Omega)$ интегрируема по Лебегу;

3) $\int_S v(n) B(v; dn) = \int_S v(-n) B(-v; dn)$ для любой функции $v(n) \in L_1(B; S)$, где $L_1(B, S) = \bigcap_{v \in \mathbb{R}^3} L_1(B(v; \cdot); S)$;

4) для любой функции $\psi(v) \in L_1(\mathbb{R}^3)$ имеет место соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S_+} \psi(v - 2(v, n)n) B(v; dn) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S_+} \psi(v) B(v; dn) dv,$$

где S_+ — единичная полусфера в \mathbb{R}^3 , такая, что при $n \in S_+$ $(v, n) \geq 0$. Из равенства (3.8) следует, что носитель меры $\mu(v; dh)$ сосредоточен на множестве

$$M = \{h: (v, h) \geq 0, |h|^2 = (v, h)\}.$$

Отсюда получаем, что при $h \in M$ справедливы следующие равенства

$$|v_1 + h|^2 + |v_2 - h|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 - 2(v, h) + 2|h|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2,$$

то есть кинетическая энергия при парных взаимодействиях сохраняется только тогда, когда мера $\mu(v; dh)$ имеет вид (3.8).

При условии сохранения кинетической энергии уравнение (3.7) совпадает с уравнением Больцмана

$$\frac{\partial f(t; v_1)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S_+} (f(t; v_1') f(t; v_2') - f(t; v_1) f(t; v_2)) B(v; dn) dv_2, \quad (3.9)$$

где v_1' , v_2' — скорости взаимодействующей пары частиц после взаимодействия: $v_1' = v_1 - (v, n)n$, $v_2' = v_2 - (v, n)n$.

Если меру $B(v; dn)$ в угловых координатах $dn = \sin \theta d\theta d\varphi$ можно записать в виде

$$B(v; dn) = |v| \cdot \sin \theta \cdot S(\theta, |v|) d\theta d\varphi$$

то уравнение Больцмана (3.9) принимает вид

$$\frac{\partial f(t; v_1)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (f(t; v_1') f(t; v_2') - f(t; v_1) f(t; v_2)) |v| \sin \theta \cdot S(\theta, |v|) d\theta d\varphi dv_2,$$

где $S(\theta, |v|)$ является дифференциальным сечением рассеяния.

Подробный обзор математических работ, в которых рассмотрены и другие задачи статистической механики бесконечного числа частиц, содержится в работе Б. М. Гуревича и В. И. Оселедца [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Белавкин В. П., Маслов В. П., Метод униформизации в теории нелинейных гамильтоновых систем типа Власова и Хартри. Теор. и мат. физ., 1977, 33, № 1, 17—31 (РЖМат, 1978, 2Б498)
2. —, —, Гаривердиев С. Э., Асимптотическая динамика системы большого числа частиц, описываемой уравнениями Колмогорова—Феллера. Теор. и мат. физ., 1981, 49, 3
3. Березин Ф. А., Метод вторичного квантования. М., Наука, 1965, 235 с. (РЖМат, 1966, 5Б517)
4. Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике. М., ГИТТЛ, 1946, с. 118
5. Герасименко В. И., Термодинамический предел в классической неравновесной системе. Случай взаимодействия частиц с ближайшими соседями. Препринт, ИТФ-80-58Р, 1980
6. Гуревич Б. М., Оселедец В. И., Некоторые математические задачи связанные с неравновесной статистической механикой бесконечного числа частиц. В сб. «Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика. Т. 14. Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР». М., 1977, 5—39 (РЖМат, 1977, 8В230)
7. Иосида К., Функциональный анализ. М., Мир, 1967, 624 с. (РЖМат, 1968, 1Б541К)
8. Кац М., Вероятность и смежные вопросы в физике., М., Мир, 1965, с. 406
9. Леонтович М. А., Основные уравнения кинетической теории с точки зрения случайных процессов. ЖЭТФ, 1935, 5, № 3-5, 211—231
10. Малышев П. В., Математическое описание эволюции классической бесконечной системы. Теор. и мат. физ., 1980, 44, № 1, 63—84
11. Маслов В. П., Операторные методы. М., Наука, 1973, с. 543

12. *Петрина Д. Я.*, Математическое описание эволюции бесконечных систем классической статистической физики. I. Теор. и мат. физ., 1979, 38, № 2, 230—250 (РЖМат, 1979, 10В173)
13. —, *Видыбида А. К.*, Задача Коши для кинетических уравнений Боголюбова. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1975, 136, 370—378 (РЖМат, 1976, 4В515)
14. *Синай Я. Г., Сухов Ю. М.*, К теореме существования решений для цепочки уравнений Боголюбова. Теор. и мат. физ., 1974, 19, № 3, 344—363 (РЖМат, 1974, 11В580)
15. *Сухов Ю. М.*, Сильное решение цепочки уравнений Боголюбова в одномерной классической статистической механике. Докл. АН СССР, 1979, 244, № 5, 1081—1084 (РЖМат, 1979, 7В536)
16. *Braun W., Hepp K.*, The Vlasov dynamics and its fluctuations in the $1/N$ limit of interacting classical particles. Commun. Math. Phys., 1977, 56, № 101—113 (РЖМат, 1978, 5В263)
17. *Gallavotti G., Lanford O. E. III, Lebowitz L.*, Thermodynamic limit of time-dependent correlation functions for onedimensional systems. J. Math. Phys., 1970, 11, № 9, 2898—2905 (РЖМат, 1971, 4В525)
18. *Gurevich B. M., Suhov Ju. M.*, Stationary solutions of the Bogoliubov hierarchy equations in classical statistical mechanics. I. Commun. Math. Phys., 1976, 49, № 1, 63—96 (РЖМат, 1977, 3В479)
19. —, Stationary solutions of the Bogoliubov hierarchy equations in classical statistical mechanics. II. Commun. Math. Phys., 1977, 54, № 1, 81—96
20. *McKean*, A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1966, 56, № 6, 1907—1911 (РЖМат, 1967, 10В38)
21. —, An exponential formula for solving Boltzmann's equation for a Maxwellian gas. J. Combin. Theory, 1967, 2, № 3, 358—382 (РЖМат, 1968, 5В525)
22. *Petrina D. Ya.*, Mathematical description of the evolution of infinite systems of classical statistical physics. Locally perturber one-dimensional systems. IIP-78-37E, March, 1978
23. *Schönberg M.*, Application of second quantization methods to the classical statistical mechanics. I. Nuovo cim., 1952, 9, № 12, 1139
24. —, Application of second quantization methods to the classical statistical mechanics. II. Nuovo cim., 1953, 10, № 4, 419
25. *Takahashi Yoichiro*, Markov semigroups with simplest interaction. II. Proc. Jap. Acad., 1971, 47, Suppl. № 2, 1019—1024
26. —, Markov processes with simple interaction-reversions of branching processes. Second Japan—USSR symposium on probability theory. Kyoto, 1972
27. *Tanaka Hiroshi*, Purely discontinuous Markov processes with nonlinear generators and their propagation of chaos. Теория вероятностей и ее приложения, 1970, 15, 599
28. —, On Markov process corresponding to Boltzmann's equation of Maxwellian gas. Lect. Notes Math., 1973, 330, 478—489
29. *Ueno T.*, A stochastic model associated with Boltzmann equation. Second Japan—USSR symposium on probability theory. Kyoto, 1972