В. П. Важдаев, Область значений одного функционала в классе функций с ограниченным средним модулем, *Изв. вузов. Матем.*, 1985, номер 4, 19–27

https://www.mathnet.ru/ivm7328

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсланов М. М. О некоторых обобщениях теоремы о неподвижной точке.— Изв. вузов. Матем., 1981, № 5, с. 9—16.
2. Шенфилд Дж. Степени неразрешимости.— М., 1977.— 285 с.
3. Арсланов М. М. Слабо рекурсивно перечислимые степени.— IV Всесоюзн. конф. по матем. логике. Тезисы докл. Кишинев, 1976, с. 6.
4. Арсланов М. М. Критерий полноты рекурсивно перечислимых множеств.— II Всесоюзн. конф. по матем. логике. Тезисы докл. М., 1972, с. 8.
5. Соловьев В. Д. Структурные свойства рекурсивно перечислимых множеств и полнота относительно сводимостей.— Автореф. кандид. диссерт., Новосибирск, 1979.
6. Rice H. G. Classes of recursively enumerable sets and their decision problem.— Trans. Amer. Math. Soc., 1953, v. 74, № 1, p. 358—366.
7. Welch L. A hierarchy of families of recursively enumerable degrees and a theorem of founding of minimal pairs.— Ph. Diss. University of Illinois, Urbana, 1980.
8. Арсланов М. М. Иерархия семейств рекурсивно перечислимых степеней.— IV Всесоюзн. конф. по матем. логике. Тезисы докл. Тбилиси, 1982, с. 9.
9. Sacks G. E. On the degrees less than $0'$.— Ann. Math., 1963, v. 77, № 2, p. 211—231.
10. Post E. L. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems.— Bull. Amer. Math. Soc., 1944, v. 50, № 1, p. 284—316.
11. Jockush C. G., Soare R. I. Post's problem and his hypersimple set.— J. Symbolic Logic, 1973, v. 38, № 3, p. 446—452.
12. Кинбер Е. Б. О тьюринговых степенях гиперпростых множеств.— Латв. матем. ежегодник, 1977, № 21, с. 164—170.
13. Jates C. E. M. On the degrees of index sets, II.— Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v. 135, № 1, p. 249—266.
14. Stob M. Index sets and degrees of unsolvability.— J. Symbolic Logic, 1982, v. 47, № 2, p. 241—248.

г. Казань

Поступила
19.11.1984

*В. П. Важдаев* УДК 517.547

# ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ СРЕДНИМ МОДУЛЕМ

## § 1. Введение

Обозначим через $H_\delta$ ($\delta > 0$) класс функций $f(z)$, регулярных в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\delta d\theta \leqslant 1, \quad r = |z|. \tag{1}$$

Известно (см., напр., [1], с. 539), что функции класса $H_\delta$ допускают представление $f(z) = B(z)F(z)$, где $B(z)$ — так называемая функция Бляшке, содержащая все нули функции $f(z)$, а $F(z)$ не имеет нулей и снова принадлежит тому же классу, т. е. регулярна в единичном круге и удовлетворяет условию (1). Через $H_\delta^m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, далее обозначим подкласс функций из $H_\delta$, для которых функция Бляшке имеет вид $B(z) = z^m$, а через $H_\delta^m(c_m)$ — совокупность функций из $H_\delta^m$, в разложении которых $f(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \ldots$ коэффициент $c_m$ фиксирован.

При $\delta \to \infty$ эти классы переходят в соответствующие подклассы $B^m$ и $B^m(c_m)$ класса $B$ — функций, ограниченных по модулю единицей.

Для функций класса $H_\delta^m(c_m)$ из известного параметрического представления В. И. Смирнова [2] функций с ограниченным средним модулем получаем представление

$$f(z) = e^{i\mu} z^m \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z, \varphi) \ln p(\varphi)\, d\varphi \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z, \varphi)\, dq(\varphi), \tag{2}$$

где $\mu = \arg c_m$, $g(z, \varphi) = (e^{i\varphi} + z)/(e^{i\varphi} - z)$, $p(\varphi)$ — неотрицательная функция такая, что $\ln p(\varphi)$ и $p(\varphi)^\delta$ суммируемы, а $q(\varphi)$ — невозрастающая функция с производной, почти всюду равной нулю. При этом функции $p(\varphi)$ и $q(\varphi)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\varphi)^\delta d\varphi \leqslant 1, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln p(\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dq(\varphi) = \ln|c_m|. \tag{4}$$

В работе [3] к решению экстремальных задач в классе $H_\delta$ на основе представления (2) вместе с известным вариационным методом Г. М. Голузина для функций, представимых интегралом Стильтьеса, была применена теория оптимального управления, в частности, принцип максимума Л. С. Понтрягина. Как метод Г. М. Голузина, так и принцип максимума дают вид экстремальных функций с точностью до некоторых числовых параметров и доведение конкретной задачи до конца сопряжено с определенными трудностями аналитического характера.

В указанной работе была поставлена задача о нахождении области $D$ значений функционала

$$J(f) = \ln(f(z)/z^m) = \xi + i\eta, \tag{5}$$

когда $z$ фиксировано в круге $|z| < 1$, а $f(z)$ пробегает класс $H_\delta^m(c_m)$. Заметим, что для функции $f(z)$ класса $H_\delta^m(c_m)$ функция Бляшке имеет вид $B(z) = z^m$, поэтому функция $f(z)/z^m$ регулярна в единичном круге и не имеет нулей. Под $\ln(f(z)/z^m)$ будем понимать значение той однозначной ветви этой функции, которая при $z = 0$ равна главному значению $\ln c_m$.

Область $D$ может быть найдена как огибающая семейства опорных прямых $\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha = d(\alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Поэтому нужно найти точную оценку $d(\alpha) = \operatorname{Re}\{e^{-i\alpha} J(f)\}$ как функцию параметров $r$, $|c_m|$, $\arg c_m$ и $\alpha$, т. е. опорную функцию области $D$. Здесь выбор класса $H_\delta^m(c_m)$ связан с существом дела, т. к. во всем классе $H_\delta$ или его подклассе $H_\delta^m$ функционал $\operatorname{Re}\{e^{-i\alpha} J(f)\}$ не при всех $\alpha$ оказывается ограниченным. Что касается класса $H_\delta^m(c_m)$, то в работе [3] было показано, что область $D$ выпуклая, ограниченная и был найден вид функций, соответствующих граничным точкам области $D$, с точностью до двух вещественных параметров. Полученные далее оценки реальной и мнимой частей функционала $J(f)$ привели к точным оценкам модуля и аргумента функции в этом классе. В данной работе удалось снизить число параметров до одного, что дало возможность решить задачу до конца, т. е. найти в явном виде уравнения границы области $D$. Решение этой задачи позволило найти область значений функционала (5) и в более общем классе $H_\delta^{lm}$. Ясно, что областью значений функционала $f(z)/z^m = u + iv$ будет образ области $D$ при отображении $u + iv = \exp(\xi + i\eta)$.

Следует отметить, что качественное решение задачи о строении областей значений функционалов и устройстве функций, соответствующих граничным точкам, для функционалов более общих, чем в нашем случае, было проведено в работе [4] В. М. Терпигоревой. Более простое решение таких задач предложил С. Я. Хавинсон (см. [5], гл. II, § 2).

## § 2. Граничные функции области $D$

Для простоты дальнейшего анализа сделаем несколько замечаний относительно строения области $D$ значений функционала (5). Будем предполагать, что $c_m > 0$. Это не ограничивает общности задачи, ибо приводит только к сдвигу области $D$ на вектор $-i \arg c_m$. В этом случае область $D$ будет симметрична относительно действительной оси $\eta = 0$, поэтому можно ограничиться для $\alpha$ значениями из промежутка $[0, \pi]$. Действительно, функция $f(z)$ принадлежит классу $H_\delta^m(c_m)$ вместе с $\overline{f(\bar{z})}$ и из интегрального представления (2) следует, что точки $f(z)/z^m$ и $\overline{f(z)/\bar{z}^m}$ симметричны относительно действительной оси. Учитывая, что $\ln \bar{w} = \ln \bar{w}$ (для $\arg w$ берется ветвь $-\pi < \arg w \leqslant \pi$), получаем симметрию области $D$ относительно оси $\eta = 0$.

Получим функции, соответствующие граничным точкам области $D$. С помощью вариационных формул Г. М. Голузина можно показать, что граничным функциям в их представлении (2) будет соответствовать ступенчатая функция-параметр $q^0(\varphi)$, имеющая одну точку роста $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$, где $\varphi_0$ является корнем уравнения

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\alpha} g'_\varphi(z, \varphi)\} = 0. \tag{6}$$

Функция-параметр $p^0(\varphi)$, соответствующая граничной функции $f(z)$, как было показано в работе [3], определяется с точностью до двух вещественных параметров $a_0$ и $a_1 p^0(\varphi)^\delta = a_0 + a_1 \operatorname{Re}\{e^{-i\alpha} g(z, \varphi)\}$, т. е. граничные функции имеют вид

$$f(z) = e^{i\gamma} z^m \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z, \varphi) \ln p^0(\varphi)\, d\varphi \exp\{-Vg(z, \varphi_0)\}.$$

Условие (3), эквивалентное условию (1), и условие (4) накладывают следующие ограничения на параметры $a_0$ и $a_1$ и величину $V (V \geqslant 0)$ скачка функции $q^0(\varphi)$, равную ее полному изменению в промежутке $[0, 2\pi]$:

$$a_0 + a_1 \cos\alpha \leqslant 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln p^0(\varphi)\, d\varphi - V = \ln c_m.$$

Покажем, что в первом неравенстве для граничной функции имеет место знак равенства. Допустим, что для граничной функции $f(z)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p^0(\varphi)^\delta d\varphi = \frac{1}{k} < 1.$$

Рассмотрим функцию $f_*(z)$, для которой $p_*^0(\varphi) = k^{1/\delta} p^0(\varphi)$, $V_* = V + (1/\delta) \ln k$. Легко проверяется, что $f_*(z)$ принадлежит классу $H_\delta^m(c_m)$. Вычислим $d_* = \operatorname{Re}\{e^{-i\alpha} \ln (f_*(z)/z^m)\}$. Уравнение (6) сводится к следующему уравнению: $(1 - r^2)\cos\alpha \sin(\varphi - \theta) + (1 + r^2)\sin\alpha \cos(\varphi - \theta) = 2r \sin\alpha$, а последнее имеет два корня

$$\varphi_{1,2} = \theta + \arccos \frac{(1 + r^2)\sin\alpha}{\sqrt{1 + r^4 - 2r^2 \cos 2\alpha}} \pm \arccos \frac{2r \sin\alpha}{\sqrt{1 + r^4 - 2r^2 \cos 2\alpha}}; \tag{7}$$

причем $\operatorname{Re}\{e^{-i\alpha} g(z, \varphi_{1,2})\} = ((1 + r^2)\cos\alpha \mp 2r)/(1 - r^2)$. Так как $\operatorname{Re}\{e^{-i\alpha} g(z, \varphi_1)\} < \operatorname{Re}\{e^{-i\alpha} g(z, \varphi_2)\}$, а $V_* \geqslant 0$, то наибольшему значению $d_*(\alpha)$ соответствует корень $\varphi_1$. После несложных преобразований $d_*(\alpha)$ примет вид

$$d_* = d + \frac{1}{\delta} \ln k \operatorname{Re}\{e^{-i\alpha}(1 - g(z, \varphi_1))\} = d + \frac{1}{\delta} \ln k \frac{2r}{1 - r^2}(1 - r\cos\alpha), \text{ т. е. } d_* > d.$$

Это противоречит тому, что $f(z)$ — граничная функция.

Итак, для граничной функции $f(z)$ параметры $a_0$ и $a_1$ удовлетворяют равенству $a_0 + a_1 \cos\alpha = 1$. Это позволяет исключить один параметр и получаем $p^0(\varphi)^\delta = 1 + a_1 \operatorname{Re}\{e^{-i\alpha}(g(z, \varphi) - 1)\}$.

После замены переменной $e^{i\varphi} = (e^{i\gamma} + z)/(1 + \bar{z}e^{i\gamma})$, $\gamma \in [0, 2\pi]$, будем иметь $p_1^0(\gamma)^\delta = 1 + ar\cos\alpha + a\cos(\gamma + \alpha - \theta)$, где $a = a_1 2r/(1 - r^2)$.

Функция $p_1^0(\gamma)$ должна быть неотрицательна, что имеет место тогда и только тогда, когда $(1 + ar\cos\alpha)^2 - a^2 \geqslant 0$, т. е. на параметр $a$ накладываются следующие ограничения: $-1/(1 + r\cos\alpha) \leqslant a \leqslant 1/(1 - r\cos\alpha)$.

Для дальнейшего анализа удобнее перейти к параметру $t$, изменяющемуся в промежутке $[-1, 1]$, по формуле $a = 2t/(1 - 2rt\cos\alpha + t^2)$. Тогда функция $p_1^0(\gamma)$ принимает вид

$$p_1^0(\gamma)^\delta = \frac{1 + 2t\cos(\gamma + \alpha - \theta) + t^2}{1 - 2rt\cos\alpha + t^2} = \frac{|1 + te^{i(\alpha-\theta)}e^{i\gamma}|^2}{1 - 2rt\cos\alpha + t^2}.$$

Это дает возможность вычислить интеграл Шварца в представлении (2) и получить следующее выражение для граничных функций:

$$f(\zeta) = \frac{e^{i\mu}\zeta^m}{(1 - 2rt\cos\alpha + t^2)^{1/\delta}} \left(1 + te^{i(\alpha-\theta)}\frac{\zeta - z}{1 - \bar{z}\zeta}\right)^{2/\delta} \exp\{-Vg(\zeta, \varphi_0)\}, \tag{8}$$

где $\mu = -(2/\delta)\arg(1 - rte^{i\alpha})$, а $\varphi_0$ — корень уравнения (6). Поскольку значение $c_m$ фиксировано, то этим определяется полное изменение $-V$ ($V \geqslant 0$) функции-параметра $q(\varphi)$:

$$-V = \frac{1}{\delta}\ln\left(c_m^\delta \frac{1 - 2rt\cos\alpha + t^2}{1 - 2rt\cos\alpha + r^2t^2}\right), \tag{9}$$

причем на параметр $t$ в силу того, что $V \geqslant 0$, накладывается дополнительное ограничение

$$c_m^\delta \leqslant (1 - 2rt\cos\alpha + r^2t^2)/(1 - 2rt\cos\alpha + t^2). \tag{10}$$

Очевидно, что функция (8) не имеет других нулей в единичном круге, кроме нуля кратности $m$ в начале координат.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Экстремальными для функционала* $\operatorname{Re}\{e^{-i\alpha}\ln(f(z)/z^m)\}$ *в классе* $H_\delta^m(c_m)$, $c_m > 0$, *являются только функции вида* (8), *где* $\varphi_0$ *— корень уравнения* (6), $V$ *определяется формулой* (9), *а параметр* $t \in [-1, 1]$ *удовлетворяет условию* (10).

Эта теорема уточняет теорему 1 работы [3] в том смысле, что семейство экстремальных функций содержит меньшее число параметров.

## § 3. Опорная функция области $D$

Оценим сверху величину $d(\alpha) = \operatorname{Re}\{e^{-i\alpha}\ln(f(z)/z^m)\}$ в классе $H_\delta^m(c_m)$. Для экстремальной функции (8) имеем

$$d(\alpha) = \mu\sin\alpha - (1/\delta)\cos\alpha\ln(1 - 2rt\cos\alpha + t^2) - V\operatorname{Re}\{e^{-i\alpha}g(z, \varphi_0)\}.$$

Выше показано, что наибольшему значению $d(\alpha)$ соответствует корень $\varphi_1$ уравнения (6), определяемый формулой (7). Поэтому после несложных преобразований $d(\alpha)$ примет вид

$$d(\alpha) \leqslant ((1 + r^2)\cos\alpha - 2r)\ln c_m/(1 - r^2) + (2/\delta)F(t),$$

где через $F(t)$ обозначена функция

$$\frac{r(1 - r\cos\alpha)}{1 - r^2}\ln\frac{1 - 2r\cos\alpha + r^2t^2}{1 - 2r\cos\alpha + t^2} - \operatorname{Re}\{e^{-i\alpha}\ln(1 - tre^{i\alpha})\}.$$

Задача нахождения опорной функции к области $D$ свелась к нахождению наибольшего значения функции $F(t)$ относительно параметра $t$, удовлетворяющего в промежутке $[-1, 1]$ дополнительному условию (10). Вычисления приводят к следующему значению для производной:

$$F'(t) = \frac{r(1-rt\cos\alpha)}{1-2rt\cos\alpha+r^2t^2} \quad \frac{(1-t)^2}{1-2rt\cos\alpha+t^2} \geqslant 0.$$

Это означает, что наибольшее значение функции $F(t)$ будет при $t=1$, если

$$c_m \leqslant \psi(r) = \left(\frac{1-2r\cos\alpha+r^2}{2(1-r\cos\alpha)}\right)^{1/\delta}. \tag{11}$$

В случае противоположного неравенства наибольшее значение функции $F(t)$ достигается при $t=t_0$, где $t_0$ — положительный корень уравнения (10) в промежутке $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Таким образом, опорная функция $d(\alpha)$ будет различной в зависимости от того, в какой части квадрата $E \equiv \{(r, c_m): 0 \leqslant r < 1, \ 0 < c_m \leqslant 1\}$ находится точка $(r, c_m)$. Кривая $c_m = \psi(r)$, заданная уравнением (11), разделяет квадрат $E$ на две части. Верхнюю часть обозначим через $D_1(\alpha)$, а нижнюю — через $D_2(\alpha)$. Тогда для опорной функции получаем оценки $d(\alpha) \leqslant d_k(\alpha)$, если $(r, c_m) \in D_k(\alpha)$, $k=1, 2$, где

$$d_1(\alpha) = \cos\alpha \ln c_m - (2/\delta)\,\mathrm{Re}\{e^{-i\alpha}\ln(1-t_0 re^{i\alpha})\},$$

а

$$d_2(\alpha) = ((1+r^2)\cos\alpha - 2r)\ln c_m/(1-r^2) + (2/\delta)F(1).$$

Отметим два крайних положения кривой $c_m = \psi(r)$ в зависимости от параметра $\alpha$. Если $\alpha = 0$, то $2c_m^\delta = 1-r$ и $D_1(\alpha)$ имеет наибольшую площадь, а $D_2(\alpha)$ — наименьшую.

При возрастании $\alpha$ область $D_2(\alpha)$ расширяется; при $\alpha = \pi$ имеем $2c_m^\delta = 1+r$ и площадь $D_2(\alpha)$ самая большая. Поэтому при фиксированном $r$: 1) если $0 < 2c_m^\delta \leqslant 1-r$, то для $d(\alpha)$ будет единая оценка $d_2(\alpha)$; 2) если $1-r \leqslant 2c_m^\delta \leqslant 1+r$, то при малых значениях $\alpha$ действует оценка $d_2(\alpha)$, а начиная с некоторого $\alpha_0$ — оценка $d_1(\alpha)$; 3) если $1+r \leqslant 2c_m^\delta \leqslant 1$, то для $d(\alpha)$ опять будет единая оценка $d_1(\alpha)$. Значение $\alpha_0$ определяется из уравнения (11) при заданных $r$ и $c_m$.

## § 4. Область $D$ в классе $H_\delta^m(c_m)$

Обычная процедура нахождения огибающей семейства прямых $\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha = d_1(\alpha)$ (см., напр., [6]) приводит к следующим уравнениям огибающей в параметрической форме:

$$\begin{cases} \xi = d_1(\alpha)\cos\alpha - d_1'(\alpha)\sin\alpha; \\ \eta = d_1'(\alpha)\cos\alpha + d_1(\alpha)\sin\alpha. \end{cases} \tag{12}$$

Вычислим

$$d_1'(\alpha) = -\sin\alpha\ln c_m - \frac{2}{\delta}\,\mathrm{Im}\{e^{-i\alpha}\ln(1-t_0 re^{i\alpha})\} + \frac{2}{\delta}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{r(t_0'+it_0)}{1-t_0 re^{i\alpha}}\right\}.$$

Но последнее слагаемое обращается в нуль, что легко проверяется дифференцированием по $\alpha$ следующего тождества (следует помнить, что $t_0(\alpha)$ — корень уравнения (10)): $c_m^\delta = (1-2rt_0\cos\alpha + r^2t_0^2)/(1-2rt_0\cos\alpha + t_0^2)$. Вычисляя правые части в уравнениях (12), будем иметь $w(\alpha) = \ln c_m - (2/\delta)\ln(1-t_0(\alpha)re^{i\alpha})$.

С помощью монотонной замены параметра

$$\tau(\alpha)=\arccos\left(\sqrt{\frac{c_m^\delta}{1-c_m^\delta}\,\frac{1-r^2}{r^2}}\;\frac{rt_0(\cos\alpha-rt_0)}{1-2rt_0\cos\alpha+r^2t_0^2}\right)$$

удобнее дать другую параметризацию огибающей

$$w_1(\tau)=\frac{2}{\delta}\ln\left(\sqrt{c_m^\delta}+\sqrt{1-c_m^\delta}\,\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,e^{i\tau}\right), \tag{13}$$

где $\tau$ — независимый параметр, $\tau\in[0,\pi]$. В итоге получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Если* $1+r\leqslant 2c_m^\delta\leqslant 1$, *то область* $D$ *значений функционала* (5) *в классе* $H_\delta^m(c_m)$, $c_m>0$, *симметрична относительно оси* $\eta=0$ *и ограничена кривой* (13). *Точкам границы области* $D$ *соответствуют только функции*

$$f_1(\zeta)=\zeta^m\left(\sqrt{c_m^\delta}+e^{i(\tau-\theta)}\sqrt{1-c_m^\delta}\sqrt{1-r^2}\,\frac{\zeta}{1-\bar z\zeta}\right)^{2/\delta}.$$

Аналогичным образом, находя огибающую семейства прямых $\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha=d_2(\alpha)$, получим следующий результат.

Теорема 3. *Если* $0<2c_m^\delta\leqslant 1-r$, *то область* $D$ *значений функционала* (5) *в классе* $H_\delta^m(c_m)$, $c_m>0$, *симметрична относительно оси* $\eta=0$ *и ограничена кривой*

$$w_2(\alpha)=(1+r^2-2re^{i\alpha})\ln c_m/(1-r^2)-$$

$$-\frac{2}{\delta}\left\{\frac{r(e^{i\alpha}-r)}{1-r^2}\ln\frac{2(1-r\cos\alpha)}{1-2r\cos\alpha+r^2}+\ln(1-re^{i\alpha})\right\},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\pi. \tag{14}$$

*Точкам границы области* $D$ *соответствуют только функции*

$$f_2(\zeta)=\frac{e^{i\psi}\zeta^m}{(2(1-r\cos\alpha))^{1/\delta}}\left(1+e^{i(\alpha-\theta)}\,\frac{\zeta-z}{1-\bar z\zeta}\right)^{2/\delta}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{\delta}\ln\left(c_m^\delta\,\frac{2(1-r\cos\alpha)}{1-2r\cos\alpha+r^2}\right)\frac{e^{i\varphi_1}+\zeta}{e^{i\varphi_1}-\zeta}\right\},$$

*где* $\varphi_1$ *определяется формулой* (7), *а* $\mu=-(2/\delta)\arg(1-re^{i\alpha})$.

Следствие 1. Областью значений функционала (5) в классе $B^m(c_m)$, $c_m>0$, является круг

$$\left(\xi+\frac{1+r^2}{1-r^2}\ln\frac{1}{c_m}\right)^2+\eta^2\leqslant\left(\frac{2r}{1-r^2}\ln\frac{1}{c_m}\right)^2. \tag{15}$$

Действительно, при $\delta\to\infty$ класс $H_\delta^m(c_m)$ переходит в соответствующий подкласс $B^m(c_m)$ — функций, ограниченных по модулю единицей, а условие $0<c_m\leqslant((1-r)/2)^{1/\delta}$ переходит в $0<c_m\leqslant 1$. Поэтому границу круга (15) получаем из (14) при $\delta\to\infty$ и исключая затем параметр $\alpha$. Из неравенства (15) легко следуют точные оценки модуля функции в классе $B^m(c_m)$, полученные ранее И. М. Гальпериным [7], и оценка Р. Неванлинны [8] для аргумента функции в этом классе.

Следствие 2. Областью значений функционала (5) в классе $B^m$, $c_m>0$, является часть плоскости $\xi o\eta$, содержащая отрицательную часть действительной оси и ограниченная прямыми

$$\eta=\pm\frac{2r}{1-r^2}\,\xi. \tag{16}$$

Этот результат получится, если найти область, заполняемую семейством кругов (15), зависящих от параметра $0 < c_m \leqslant 1$, при фиксированном значении $r$. Прямые (16) получаются как огибающие семейства окружностей, заданных уравнением (15).

Теорема 4. *Если* $1 - r \leqslant 2c_m^\delta \leqslant 1 + r$, *то область* $D$ *значений функционала* (5) *в классе* $H_\delta^m(c_m)$, $c_m > 0$, *симметрична относительно оси* $\eta = 0$ *и ограничена кривой* (14) *при* $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$ *и кривой* (13) *при* $\tau(\alpha_0) \leqslant \tau \leqslant \pi$, *где* $\alpha_0 = \arccos\left((1 + r^2 - 2c_m^\delta)/2r(1 - c_m^\delta)\right)$. *При этом кривые* $w_1(\tau)$ *и* $w_2(\alpha)$ *в точке* $w_1(\tau(\alpha_0)) = w_2(\alpha_0)$ *соединяются гладким образом. Точкам границы области* $D$ *соответствуют только функции* $f_1(\zeta)$ *и* $f_2(\zeta)$, *указанные выше.*

Зная область значений функционала $\ln(f(z)/z^m)$, легко получить точные оценки модуля и аргумента функции в классе $H_\delta^m(c_m)$. Например, оценка сверху модуля функции сводится к нахождению наибольшего значения $\operatorname{Re}\ln(f(z)/z^m)$. Оно будет различным, в зависимости от того, в какой части квадрата $E$ находится точка $(r, c_m)$. Очевидно, что наибольшее значение $\operatorname{Re} w(\alpha) = \operatorname{Re} w_1(\tau)$ достигается при $\tau = 0$ $(\alpha = 0)$, т. е. $\operatorname{Re}\ln(f(z)/z^m) \leqslant \operatorname{Re} w_1(0)$ и эта оценка действует в области $D_1(0)$.

Найдем наибольшее значение $\operatorname{Re} w_2(\alpha)$ в промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Вычисления приводят к следующему выражению для производной:

$$\operatorname{Re} w_2'(\alpha) = \frac{2r\sin\alpha}{\delta(1 - r^2)}\left(\ln\left(c_m^\delta \frac{2(1 - r\cos\alpha)}{1 - 2r\cos\alpha + r^2}\right) - \frac{1 - r^2}{1 - r\cos\alpha}\right).$$

Величина, стоящая под знаком логарифма, в силу неравенства (11) меньше единицы, поэтому производная отрицательна и наибольшее значение $\operatorname{Re} w_2(\alpha)$ будет при $\alpha = 0$. Значит, $\operatorname{Re}\ln(f(z)/z^m) \leqslant \operatorname{Re} w_2(0)$ и эта оценка действует в области $D_2(0)$. В итоге получаем теорему 2 работы [3].

Аналогичным образом получается точная оценка модуля функции снизу (см. теорему 3 работы [3]). Находя наибольшее значение $\operatorname{Im}\ln(f(z)/z^m)$, получим (см. [3], теорема 4) точную оценку аргумента функции в классе $H_\delta^m(c_m)$, из которой при $\delta \to \infty$ следует соответствующая оценка Р. Неванлинны для ограниченных функций.

## § 5. Область $D$ в классе $H_\delta^m$

Если мы выясним, какую часть плоскости $\xi o \eta$ заполняют области $D$ значений функционала (5) при фиксированном $r$ и параметре $c_m$, изменяющемся в промежутке $0 < c_m \leqslant 1$, то получим область значений этого функционала в более широком классе $H_\delta^m$. Рассмотрим сначала, как ведет себя семейство кривых $w(\tau) = \sqrt{c_m^\delta} + \sqrt{1 - c_m^\delta}\,(r/\sqrt{1 - r^2})\,e^{i\tau}$, $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$. Это семейство окружностей

$$(u - c)^2 + v^2 = (1 - r^2)^{-1}(1 - c^2)\,r^2,\ c = c_m^{\delta/2}, \tag{17}$$

имеет своими диаметрами хорды эллипса $r^2u^2 + (1 - r^2)\,v^2 = r^2$, параллельные оси $v$ (см. [9], с. 547).

Проведенный в [9] анализ показывает, что с уменьшением параметра $c$ от 1 окружности (17) сначала вложены друг в друга, а затем круги, ограниченные этими окружностями, расширяясь, заполняют внутренность эллипса $r^2(1 - r^2)\,u^2 + (1 - r^2)\,v^2 = r^2$.

Таким образом, частью границы области $D$ значений функционала (5) в классе $H_\delta^m$ служит кривая

$$w_3(t) = \frac{2}{\delta}\ln\left(\frac{\cos t + ir\sin t}{\sqrt{1 - r^2}}\right),\ 0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{18}$$

Ее можно получить и непосредственно, как огибающую семейства кривых (13).

Найдем также этот участок границы области $D$ с помощью одного неравенства, полученного в работе С. Я. Хавинсона (см. [5], гл. II, § 2). Неравенство $\ln x \leqslant x-1$, $0<x<+\infty$, выражающее тот факт, что кривая $y=\ln x$ лежит под своей касательной $y=x-1$, равносильно следующему: $\ln(v/u) \leqslant v/u-1$, $u>0$, $v>0$, а последнее может быть записано в виде $u\ln v \leqslant u\ln u-(u-v)$. Ясно, что равенство имеет место только при $u=v$.

Положим в этом неравенстве $u=\beta(\varphi)/A$, $\beta(\varphi)>0$,

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\beta(\varphi)\,d\varphi,\quad v=p(\varphi)^{\delta},$$

и проинтегрируем. Будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\beta(\varphi)}{A}\ln p(\varphi)^{\delta}\,d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\beta(\varphi)}{A}\ln\frac{\beta(\varphi)}{A}\,d\varphi-\left(1-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(\varphi)^{\delta}\,d\varphi\right).$$

В силу условия (3) последнее слагаемое неотрицательно, поэтому получаем неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\beta(\varphi)\ln p(\varphi)\,d\varphi \leqslant \frac{1}{\delta}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\beta(\varphi)\ln\frac{\beta(\varphi)}{A}\,d\varphi,$$

обращающееся в равенство только при $p(\varphi)^{\delta}=\beta(\varphi)/A$.

Применим это неравенство к нашей задаче, которая в классе $H_{\delta}^{m}$ сводится к оценке величины

$$d(\alpha) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\{e^{-i\alpha}g(z,\ \varphi)\}\ln p(\varphi)\,d\varphi.$$

Нетрудно видеть, что функция $\beta(\varphi)=\operatorname{Re}\{e^{-i\alpha}g(z,\ \varphi)\}$ неотрицательна, если только $0\leqslant\alpha\leqslant\operatorname{arctg}((1-r^2)/2r)$. При этом $A=\cos\alpha$. Введем параметр $k=\operatorname{tg}\alpha$, $0\leqslant k\leqslant(1-r^2)/2r$, и найдем огибающую семейства прямых $\xi+k\eta=d(k)$, где

$$d(k)=\frac{1}{\delta}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\operatorname{Re}g(z,\ \varphi)+k\operatorname{Im}g(z,\ \varphi))\ln(\operatorname{Re}g+k\operatorname{Im}g)\,d\varphi.$$

Ее уравнение

$$w_3(k)=\frac{1}{\delta}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(z,\ \varphi)\ln(\operatorname{Re}g(z,\ \varphi)+k\operatorname{Im}g(z,\ \varphi))\,d\varphi,\quad 0\leqslant k\leqslant\frac{1-r^2}{2r}.$$

Для вычисления последнего интеграла представим функцию, стоящую под знаком логарифма, следующим образом:

$$\frac{1-r^2-k2r\sin(\varphi-\theta)}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}=\left|\frac{\rho_1+i\rho_2e^{-i\theta}e^{i\varphi}}{1-re^{-i\theta}e^{i\varphi}}\right|^2,$$

где $\rho_{1,2}=(1/2)(\sqrt{1-r^2+2rk}\pm\sqrt{1-r^2-2rk})$. Тогда

$$w_3(k)=\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\rho_1+i\rho_2r}{1-r^2}\right)^2,\quad 0\leqslant k\leqslant\frac{1-r^2}{2r}.$$

Перейдя к параметру $t=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2r}{1-r^2}k\right)$, $0\leqslant t\leqslant\pi/4$, получим кривую (18), где $t_1=\pi/4$.

Семейство кривых $w_2(\alpha)$, зависящих от параметра $c = \ln(1/c_m^\delta)$, также имеет огибающую. Достаточные условия ее существования (см. [6], теорема 3.6) в нашем случае выполняются. Параметрические уравнения огибающей получаются исключением параметра $\alpha$ из уравнений $w_2(\alpha) = \xi(\alpha) + i\eta(\alpha) = 0$ и $\xi'_\alpha \eta'_c - \xi'_c \eta'_\alpha = 0$. Последнее уравнение равносильно следующему: $\operatorname{Re}\{i\overline{w'_c} w'_\alpha\} = 0$. Вычисления дают

$$w'_\alpha = i \frac{1}{\delta} \frac{2r}{1-r^2} e^{i\alpha} \left( -\ln\left( c_m^\delta \frac{2(1-r\cos\alpha)}{1-2r\cos\alpha + r^2} \right) + \frac{1-r^2}{1-r\cos\alpha} \right),$$

причем множитель в скобках в силу неравенства (11) (а $w_2(\alpha)$ получено при этом условии) отличен от нуля. Поэтому уравнение $\operatorname{Re}\{i\overline{w'_c} w'_\alpha\} = 0$ дает значение $\alpha_1(r) = \arccos(2r/(1+r^2))$, подставляя которое в уравнение $w_2(\alpha) = 0$, получим огибающую

$$w(c) = \frac{1}{\delta} \left\{ -\frac{1+r^2-2re^{i\alpha_1}}{1-r^2} c - \frac{2r(e^{i\alpha_1} - r)}{1-r^2} \ln \frac{2}{1-r^2} - 2\ln(1-re^{i\alpha_1}) \right\}$$

или, исключая параметр $c$,

$$\eta = -\frac{2r}{1-r^2}\xi + \frac{1}{\delta}\frac{2r}{1-r^2} \ln \frac{1-r^2}{2(1+r^2)} + \frac{1}{\delta} \operatorname{arctg} \frac{2r}{1-r^2}. \tag{19}$$

Сформулируем окончательный результат.

Теорема 5. *Множество значений функционала* (5) *в классе* $H_\delta^m$ *представляет собой неограниченную часть плоскости* $\xi o \eta$, *симметричную относительно действительной оси и содержащую ее отрицательную часть. Граница этой области в верхней полуплоскости состоит из участка кривой* (18) *и части прямой* (19), *являющейся касательной к кривой* (18) *в точке* $w_3(\pi/4)$. *Точки границы вносят только функции* $f_1(\zeta)$ *и* $f_2(\zeta)$ *при соответствующих значениях параметра* $c_m$.

Замечание. При $\delta \to \infty$ получается область значений функционала (5) в классе $B^m$ (см. следствие 2 из теоремы 3).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды.— М., 1961.— 936 с.
2. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций.— 2-е изд.— М.—Л., 1950.— 336 с.
3. Важдаев В. П. Применение принципа максимума Л. С. Понтрягина к решению экстремальных задач в классе функций с ограниченным средним модулем.— Сиб. матем. журн., 1980, т. XXI, № 3, с. 42—55.
4. Терпигорева В. М. Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций с ограниченным средним модулем.— ДАН СССР, 1967, т. 176, № 5, с. 1027—1030.
5. Хавинсон С. Я. Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций с дополнительными условиями.— М., 1981.— 89 с.
6. Залгаллер В. А. Теория огибающих.— М., 1975.— 104 с.
7. Гальперин И. М. Некоторые оценки для ограниченных в единичном круге функций.— УМН, 1965, т. XX, вып. 1, с. 197—202.
8. Nevanlinna R. Über beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen.—Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, 1919, v. XIII, № 1.
9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1.— М., 1962.— 607 с.


г. Горький

Поступила
03.06.1983