

## МАТЕМАТИКА

УДК 514.763.637

А. А. Тужилин, А. Т. Фоменко

## МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И МЫЛЬНЫЕ ПЛЕНКИ

1. В статье рассматриваются двумерные минимальные поверхности в евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^3$ , которые затягивают замкнутые контуры, гомеоморфные окружности. При деформации контура поверхность изменяется; в частности, изменяется ее площадь. Таким образом, можно рассмотреть график площади минимальных поверхностей, определенный на пространстве всех граничных контуров в  $\mathbf{R}^3$ . Поскольку на одном и том же контуре может повисать, вообще говоря, несколько минимальных поверхностей, график площади является многозначной функцией контура. Выдвинута гипотеза, что этот график изображается поверхностью, имеющей классическую особенность типа «ласточкин хвост». Для качественного исследования графика площади поставлен эксперимент с реальными мыльными пленками, которые, как известно, моделируют двумерные минимальные поверхности.

Сначала сформулируем общую задачу, поставленную А. Т. Фоменко. Рассмотрим пространство  $C^\infty(M, N)$  гладких отображений  $f: M \rightarrow N$ , где  $N$  — фиксированное риманово многообразие, а  $M$  — всевозможные гладкие римановы многообразия с непустым краем  $\partial M$ . На пространстве  $C^\infty(M, N)$  рассмотрим какой-либо функционал  $F(f)$ , задаваемый так:  $F(f) = \int_M L(f) d\sigma$ , где  $L$  — лагранжиан, зависящий

от отображения  $f$  и его производных различных порядков, а  $d\sigma$  — форма риманова объема на многообразии  $M$ . В качестве примера можно рассмотреть функционал vol объема (площади) образа  $f(M)$  в  $N$ . Рассмотрим уравнение Эйлера—Лагранжа  $I(f) = 0$  для функционала  $F$ . Экстремали  $f_0$  функционала  $F$  — это решения уравнения Эйлера—Лагранжа  $I(f_0) = 0$ . Экстремалими функционала объема являются локально-минимальные поверхности. Двумерные минимальные поверхности моделируются мыльными пленками в  $\mathbf{R}^3$  (см. [1]). Для задания экстремали  $f_0$  нужно задать граничные (краевые) условия, то есть отображение  $\gamma: \partial M \rightarrow N$ . Например, для задания мыльной пленки нужно фиксировать в  $\mathbf{R}^3$  замкнутый контур  $\gamma$ , то есть отображение окружности  $S^1$  в  $\mathbf{R}^3$ .

Множество всех граничных условий естественно отождествляется с пространством  $C^\infty(\partial M, N)$  отображений  $\gamma: \partial M \rightarrow N$ . Задание того или иного граничного условия определяет, вообще говоря, несколько экстремалей  $f_0$  функционала  $F$ , то есть несколько решений уравнений Эйлера—Лагранжа, таких, что  $f_0|_{\partial M} = \gamma$ . Обозначим через  $K_\gamma$  множество всех экстремалей с данным граничным условием  $\gamma$ . Вычисляя для каждой из них значение функционала  $F$ , мы получаем некоторое множество чисел  $\{F(f_0)\}$ . В результате имеем многозначное отображение (функцию)  $\gamma \rightarrow \{F(f_0)\}$ , где  $f_0 \in K_\gamma$ . Эта функция определена на пространстве  $C^\infty(\partial M, N)$  и имеет, вообще говоря, точки ветвления и другие особенности. Разные функционалы (и их уравнения Эйлера—Лагранжа) будут характеризоваться, вообще говоря, разными типами

особенностей. Общая задача: какие типы особенностей характеризуют те или иные уравнения Эйлера—Лагранжа (и функционалы)? При конкретном исследовании многозначных функций вида  $\gamma \rightarrow \{F(f_0)\}$  полезно на первых этапах упрощать задачу, рассматривая не все пространство  $C^\infty(\partial M, N)$ , а лишь конечномерные подпространства в  $C^\infty(\partial M, N)$ , на которые нужно ограничить функцию  $\gamma \rightarrow \{F(f_0)\}$ . В настоящей работе мы изучим график этой многозначной функции, ограниченной на двумерное подмногообразие в  $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^3)$  для функционала площади двумерных мыльных пленок.

2. Рассмотрим контур  $\gamma$ —контур Дугласа (показан на рис. 1), который гомеоморфен окружности. Пусть он реализован в  $\mathbb{R}^3$  в виде проволочного замкнутого контура. Можно считать, что в начальный момент времени этот контур образован отрезками двух параллелей и двух меридианов на стандартном двумерном торе. Через  $u$  обозначим расстояние между верхними параллельными кольцами, а через  $v$ —расстояние между нижними кольцами. Будем менять  $u$  и  $v$  посредством изгибаний контура, сдвигая или раздвигая его кольца. В результате таких деформаций контур уже не будет располагаться на первоначальном торе. Эта операция моделируется изгибаниями проволочного контура, при которых длины дуг, лежащих на контуре, не изменяются. Множество всевозможных состояний контура  $(u, v)$  мы отождествим с квадратом  $D = [0, u_{\max}] \times [0, v_{\max}]$ . При каждом фиксированном состоянии контура существует, вообще говоря, несколько минимальных поверхностей с данной границей. Мы исследуем их поведение при деформации контура. При этом мы уточним наблюдение Т. Постола [2], который предположил, что зависимость минимальных пленок от контуров Дугласа указанного типа условно изображается гладкой двумерной поверхностью, проектирующейся на плоскость параметров  $u, v$  со сборкой (сборка Уитни), но не уточнил, график какой функции параметров следует рассматривать. Мы предложили рассматривать график площади минимальных поверхностей.

В теории особенностей хорошо известно, что график многозначной функции экстремума в зависимости от параметров семейства функций общего положения имеет устойчивые (при двух параметрах) «ласточкины хвосты». Это следует из теории лежандровых особенностей (В. И. Арнольд [3,4]).

Таким образом, основная наша гипотеза сводится к тому, что рассматриваемое семейство возмущений—общего положения. В принципе, это обстоятельство можно проверить [3,4] посредством вычисления, например, на ЭВМ некоторых определителей. Однако для этого нужно иметь аналитическое выражение для радиусов-векторов, описывающих деформирующиеся минимальные поверхности, затягивающие контуры Дугласа. Такое выражение отсутствует, и получить его чрезвычайно затруднительно, поскольку задача сводится к построению гармонических продолжений перепараметризации деформирующихся контуров. Эффективно эта задача решается лишь в отдельных весьма специальных случаях. Поэтому мы вынуждены были прибегнуть к физическому эксперименту с мыльными пленками. В наших опытах получены следующие мыльные пленки:  $1a, 1b, 1в, 1г$  (рис. 1); пленки типа 2; пленки  $3a$  и  $3б$ ; пленки типа 4 (см. рисунки в [5]; типам 2,  $3a, 3б, 4$  соответствуют  $a, ж, з, e$ ). Напомним, что минимальные поверхности могут быть устойчивыми и неустойчивыми, то есть они могут быть как локальными минимумами функционала площади, так и седловыми точками (неустойчивый случай). Все перечисленные выше мыльные пленки устойчивы, кроме пленок типа  $1в$ . Для упрощения из-

ложения мы ограничимся изучением пленок типа 1. Рассмотрим квадрат  $D$  допустимых состояний контура  $\gamma$  и график площади минимальных поверхностей типов 1а, 1б, 1в, 1г. Мы получаем график многозначной функции  $\gamma \rightarrow \{F(f_0)\}$ , который для наглядности можно изобразить в трехмерном пространстве. Расположим квадрат  $D$  в горизонтальной плоскости декартовых переменных  $u$  и  $v$ , а значения площади минимальных пленок отложим вверх по вертикальной оси. Оказывается, этот график имеет чрезвычайно любопытную топологическую и аналитическую структуру.

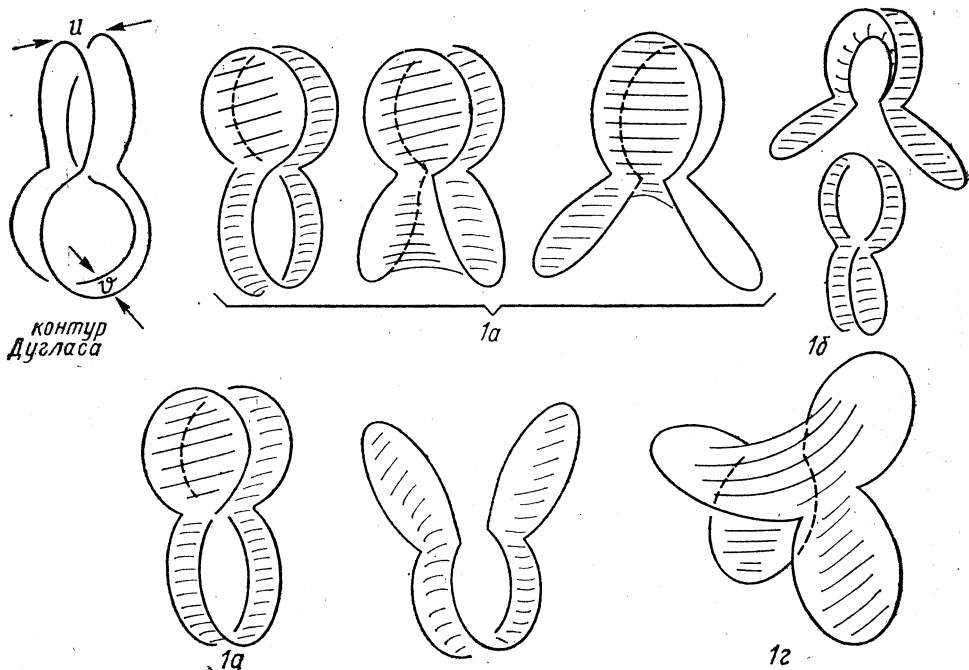


Рис. 1

Предложение 1. График площади минимальных поверхностей типа 1 показан на рис. 2. Получившаяся двумерная поверхность в трехмерном пространстве (и соответствующая ей особенность) называется «ласточкин хвост».

Это предложение мы пока не доказали в полном объеме, поскольку частично оно опирается на проведенные нами физические эксперименты.

Дадим небольшую справку. Известно (см., например, [3], с. 38—39), что всякое гладкое отображение трехмерного многообразия в трехмерное пространство аппроксимируется отображениями, имеющими только особенности следующего вида: складка, сборка, «ласточкин хвост». «Ласточкин хвост» можно представить как поверхность в трехмерном пространстве многочленов  $x^4 + ax^2 + bx + c$ , которая состоит из точек  $(a, b, c)$ , отвечающих многочленам с кратными корнями. «Ласточкин хвост» делит пространство многочленов  $\mathbf{R}^3$  на три области. В одной из них (на рис. 2 это внутренность пирамиды с вершиной в сингулярной точке) многочлен имеет четыре вещественных корня, в соседней с ней — два корня, а в оставшейся области он не имеет ни одного корня. Два листа поверхности касаются вдоль сингу-

лярного ребра с порядком касания  $3/2$ . В предложении 1 утверждается пока лишь то, что график площади минимальных поверхностей гомеоморфен поверхности «ласточкин хвост».

3. Получившийся график позволяет объяснить интересный эффект (указан в [2]) перестройки минимальных поверхностей при деформации контура. Возьмем пленку  $1a$  и начнем деформировать контур, раздвигая две нижние окружности, постепенно удаляя одну от другой. Пленка начинает деформироваться так, как показано на рис. 1. При этом происходит скачкообразное изменение положения

пленки, в результате чего седловая точка в центре пленки исчезает и верхняя часть пленки превращается в узкую ленту, соединяющую две верхние близкие окружности. Сдвигая затем нижние окружности в обратном направлении и возвращая контур в первоначальное положение

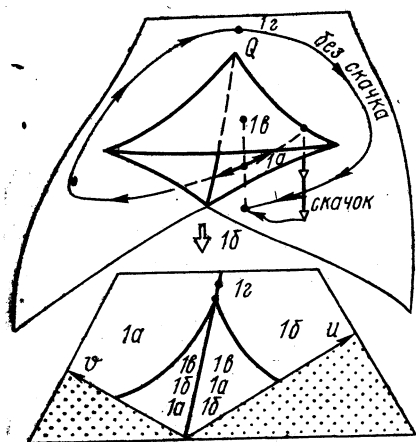


Рис. 2

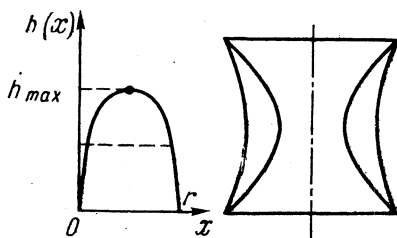


Рис. 3

ние, приходим к пленке  $1b$ . Мы построили непрерывную деформацию контура, в результате которой произошло скачкообразное изменение пленки: из положения  $1a$  она перешла в положение  $1b$ . Используя симметрию контура, мы аналогичным образом можем совершить обратный переход от пленки  $1b$  к пленке  $1a$ . Для этого достаточно выполнить описанную выше операцию с верхними окружностями.

Наряду с описанной скачкообразной перестройкой пленки, имеется другая замечательная деформация граничного контура, приводящая к плавному изменению пленки с тем же конечным результатом. В самом деле, рассмотрим пленку  $1a$ . В отличие от предыдущего случая, начнем раздвигать верхние окружности так, как это показано на рис. 1. Затем начнем раздвигать нижние окружности, в результате чего получим симметричную пленку  $1g$  седлового типа. Ее центр — седловая точка. Эта деформация пленки очевидно гладкая, без скачков. Поскольку пленка  $1g$  симметрична, то, применив ту же операцию, мы можем плавно перейти от нее к пленке  $1b$ . Повторив шаги в обратном порядке, мы можем плавно перевести пленку  $1b$  в пленку  $1a$ . Итак, в пространстве всех поверхностей указанного типа мы получаем два существенно различных пути, соединяющих положения  $1a$  и  $1b$ . Вдоль первого пути происходит (в некоторый момент) скачкообразное изменение положения пленки, а вдоль второго пути пленка изменяется плавно. Первый путь на рис. 2 выглядит так: из точки  $1a$ , поднимаемся сначала к сингулярному ребру графика, затем происходит скачок (падение) в точку  $1b$ , расположенную на нижнем листе графика. Второй путь на рис. 2 выглядит так: из точки  $1a$  плавно спус-

жаемся налево по листу графика, затем обходим особую точку  $Q$  (при этом в некоторый момент времени пленка приобретает конфигурацию  $1g$ ) и наконец приходим в точку  $1б$  (справа). Ясно, что эти пути негомотопны в дополнении к особой точке  $Q$ .

Предложение 2. Поверхность «ласточкин хвост» разбивается на области, соответствующие устойчивым и неустойчивым минимальным поверхностям (рис. 2). Неустойчивые пленки  $1в$  заполняют верхний треугольник «ласточкина хвоста», а опускающиеся вниз крылья поверхности соответствуют устойчивым пленкам  $1а$  и  $1б$ . Пленки, разделяющие области  $1а$  и  $1б$ , соответствуют симметричным контурам. Взаимные превращения пленок одной в другую при деформации граничного контура полностью определяются топологией поверхности «ласточкин хвост» (рис. 2). Области устойчивых и неустойчивых пленок стыкуются по двум сингулярным ребрам, выходящим из особой точки  $Q$ . На правом сингулярном ребре стыкуются пленки  $1в$  и  $1а$ , на левом сингулярном ребре — пленки  $1в$  и  $1б$ . На каждом сингулярном ребре два гладких листа графика площади мыльных пленок касаются друг друга с порядком касания  $3/2$ .

При проектировании всей описанной выше картины вниз на область переменных  $u$  и  $v$  мы обнаруживаем разбиение допустимого квадрата  $D$  на несколько областей, каждая из которых характеризуется своими типами минимальных поверхностей. Внутри «клюва» (рис. 2) — три типа пленок, два из которых устойчивы, а один неустойчив. Интересно, что порядок касания на сингулярном ребре устойчивого и неустойчивого листов графика площади мыльных пленок в точности равен  $3/2$ . Эта величина совпадает с порядком касания листов на классическом «ласточкин хвосте» [3].

4. Перейдем к изложению схемы доказательства предложений 1 и 2. Предварительно изучим поведение катеноида при увеличении его высоты. Рассмотрим минимальную поверхность, образованную вращением вокруг оси  $ox$  цепной линии  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ , где  $a = \text{const}$ . Границей

этой поверхности, называемой катеноидом, являются две соосные окружности. Предположим, что они имеют одинаковый радиус  $R$ , и пусть  $h$  — расстояние между ними. Пусть, далее,  $x$  — радиус горловины катеноида, то есть расстояние от вершины цепной линии до оси вращения. Ясно, что  $h$  и  $x$  связаны некоторым соотношением. Можно считать, что  $h = h(x)$  — гладкая неотрицательная функция от  $x \geq 0$ .

Лемма 1 (см. [1,2]). Функция  $h(x)$  неотрицательна,  $h(0) = 0$  и  $h(R) = 0$ , причем производная  $h'(x)$  обращается в нуль на интервале  $(0, R)$  только в одной точке, и эта точка является точкой максимума  $h(x)$  (рис. 3).

Доказательство основано на следующих соображениях. Так как средняя кривизна катеноида равна нулю, радиус кривизны — радиус соприкасающейся окружности в вершине цепной линии (в ближайшей к оси вращения точке) — равен радиусу окружности, описываемой вершиной линии при ее вращении вокруг оси, то есть он равен  $x$ . Чем меньше  $x$ , тем больше кривизна цепной линии в ее вершине. Если  $x > R$ , то никакой минимальной поверхности, натянутой на две окружности, нет. При  $x = R$  расстояние  $h$  очевидно равно нулю. При  $x < R$  оно увеличивается, окружности раздвигаются и на них повисает минимальная поверхность. Итак, при каждом  $h$ , где  $0 < h < h_{\max}$ , существуют два (!) катеноида (с одной и той же границей) — внешний и внутренний (рис. 3). Оказывается,  $h_{\max} \approx \frac{4}{3} R$ . При увеличении  $h$

от 0 до  $h_{\max}$  эти поверхности начинают сближаться. Когда  $h = h_{\max}$ , обе пленки сливаются, затем лопаются и перестраиваются в пару плоских дисков, затягивающих граничные окружности.

*Лемма 2. Внешний катеноид устойчив, внутренний неустойчив.*

Ввиду неустойчивости внутреннего катеноида в опытах с мыльными пленками реализуется лишь один, а именно внешний катеноид. Итак, из трех мыльных пленок с одной и той же границей две устойчивы (внешний катеноид и пара плоских дисков), а одна (внутренний катеноид) неустойчива. Эта информация может быть использована при изучении перестроек пленок  $1a$  в пленки  $1b$  и пленок  $1b$  в пленки  $1a$ . Раздвигая нижние окружности в пленке  $1a$ , мы можем считать, что пленка деформируется примерно так же, как растягивается катеноид, когда две его граничные окружности удаляются одна от другой. Ясно, что при достаточно малом начальном расстоянии  $u$  между нижними окружностями мыльная пленка — лента, затягивающая окружности, — достаточно хорошо аппроксимируется катеноидом. При растяжении катеноида наступает критический момент, когда он перестраивается в пару дисков. Однако в нашем случае (контур на рис. 1) эти два диска все еще соединены узкой лентой, натянутой на верхние окружности, что и дает нам пленку  $1b$ , изображенную на рис. 1.

Неустойчивость пленки означает, что существуют сколь угодно малые ее возмущения, разрушающие пленку или существенно изменяющие ее положение относительно контура. В связи с этим реализация неустойчивых минимальных поверхностей с помощью реальных мыльных пленок наталкивается на естественные трудности. Чтобы преодолеть их, воспользуемся принципом стабилизации неустойчивых мыльных пленок, предложенным А. Т. Фоменко. Предварительно напомним принцип Пуассона и Плато, согласно которому, если на минимальной поверхности нарисовать произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур, часть пленки, ограниченная им, будет минимальной по отношению к этому контуру. Иначе говоря, если нарисованный контур изготовить из проволоки и положить его на пленку, то можно проколоть пленку вне этого контура, в результате чего внешняя часть пленки разрушится, а внутренняя часть не изменится. В то же время, если нарисованный на пленке замкнутый контур достаточно мал и ограниченная им малая часть пленки регулярна, эта часть устойчива по отношению к малым возмущениям. Это утверждение следует из известных свойств функционала площади [6]. Отсюда в свою очередь следует принцип стабилизации неустойчивых пленок: если удачным образом расположить на мыльной пленке достаточно много гибких нитей, концы которых прикреплены к основному контуру, то можно добиться ее стабильности при условии, что сеть нитей достаточно густа. Другими словами, можно пытаться удерживать неустойчивую мыльную пленку в стабильном положении за счет увеличения граничного контура, добавляя к исходному контуру сетку из нитей. Это замечание позволило нам успешно провести эксперименты по изучению неустойчивых поверхностей. Возьмем пленку  $1b$ , к контуру которой привязана нить (рис. 4), свободно лежащая на пленке. Раздвигая правые окружности, обнаруживаем, что пленка прогибается влево и нить натягивается. Нить превращается в сингулярное ребро пленки, удерживая ее в положении равновесия. Аналогичный процесс происходит при раздвижении левых окружностей: пленка прогибается вправо. Эту процедуру легко обратить. Начиная с положения, когда нить натянута и прогибается вправо, будем слегка деформировать контур,

раздвигая правые окружности. В результате произойдет скачкообразное изменение положения пленки и нить прогнется влево. Ясно, что существует промежуточное положение, в котором нить не натянута, а свободно лежит на пленке и не оказывает на нее никакого влияния. Поэтому нить можно удалить, не вызвав изменения пленки. Такие пленки (типа  $1в$ ) являются экстремальными для функционала площади. Чтобы показать, что при каждом состоянии контура (при небольших  $u$  и  $v$ ) существует неустойчивая пленка типа  $1в$ , поступим так. Возьмем пленку  $1а$ , прикрепим к одной точке контура нить (рис. 4) и натянем ее. Пленка начнет деформироваться, причем сначала нить будет сингулярным ребром пленки, так как сумма сил, дей-

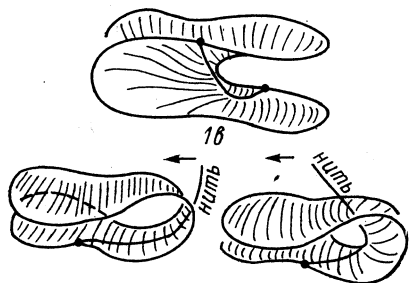


Рис. 4

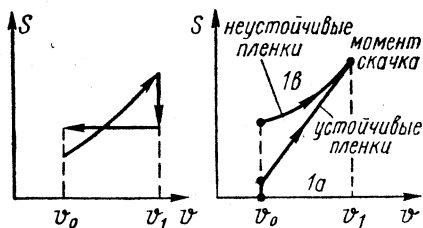


Рис. 5

ствующим на нить, отлична от нуля и пленка деформируется вслед за натягиваемой нитью. Вскоре мы получим критическое (локально-минимальное) положение пленки  $1в$ . В этот момент сингулярное ребро исчезает, сумма сил, действующих на нить, равна нулю и нить свободно располагается на пленке. В этот момент нить можно убрать без изменения формы пленки  $1в$ . Если продолжить натяжение нити, то произойдет скачок пленки и нить прогнется влево. Если же, напротив, отпустить нить, придав ей небольшой импульс, то пленка вернется в прежнее положение  $1в$ . В критическом положении  $1в$  нить свободно лежит на пленке. Можно сказать, что пленка  $1в$  — это пленка  $1а$ , у которой седловая точка расположена ближе к центру контура. Рассмотрим состояние системы  $(u_0, v_0, 1а)$ . Будем увеличивать  $v$ . Пленка  $1а$  сильнее прогибается к центру. Наконец, наступает момент, когда при дальнейшем малом увеличении  $v$  пленка под действием сил поверхностного натяжения начинает двигаться самостоятельно, скачком переходя в состояние  $1б$ . Если теперь будем уменьшать  $v$  до начального значения  $v_0$ , то пленка скачков не претерпевает. Итак, начиная процесс из состояния  $(u_0, v_0, 1а)$ , после скачка  $(u_0, v_1, 1а) \rightarrow (u_0, v_1, 1б)$  и последующего уменьшения  $v$  до прежнего значения  $v_0$  мы получаем другое состояние системы  $(u_0, v_0, 1б)$  при том же состоянии контура. При увеличении  $v$  площадь пленки  $1а$  увеличивалась. Во время скачка, то есть при движении пленки под действием сокращающих сил поверхностного натяжения, площадь пленки скачком уменьшилась. Когда же мы уменьшали  $v$ , площадь пленки практически не изменялась, так как пленка в этом случае имела тип  $1б$ .

**Лемма 3. Зависимости площади пленки от параметра  $v$  представлены на рис. 5.**

Подобным образом, изменив  $u$ , можно из пленки  $1б$  получить пленку  $1а$ . Рассмотрим множество всех процессов вида

$$(u_0, v_0, 1a) \xrightarrow{v \text{ растет}} (u_0, v_1, 1b) \xrightarrow{v \text{ уменьшается}} (u_0, v_0, 1b),$$

которые параметризованы  $u$ . Оказывается, при увеличении  $u$  скачок появляется позже, то есть седловая точка пленки в критический момент  $1в$  располагается ближе к центру контура. При дальнейшем увеличении  $u$  наконец наступает момент, когда скачка вообще не происходит. Это тот момент, когда устойчивая пленка  $1а$  и неустойчивая пленка  $1в$  сливаются.

Неустойчивые пленки  $1в$  — это фактически либо пленки типа  $1а$ , либо пленки типа  $1б$ , в которых седловая точка расположена ближе к центру. Для каждого состояния контура седло пленки находится ближе к той стороне контура, в которой больше расстояние между кольцами. При  $u=v$  получаем симметричную неустойчивую пленку. При увеличении параметров, скажем  $v$ , площадь неустойчивой пленки увеличивается. При приближении к моменту скачка расстояние между седлами устойчивой и неустойчивой пленок уменьшается. Наконец, в момент скачка устойчивая и неустойчивая пленки сливаются. Этот процесс аналогичен процессу сближения устойчивого и неустойчивого катеноидов при увеличении их высоты.

*Лемма 4. С ростом  $v$  площадь как устойчивой пленки  $1а$ , так и неустойчивой пленки  $1в$  монотонно возрастает. В частности, зависимость площади пленок  $1а$  и  $1в$  от  $v$  имеет вид, показанный на рис. 5. Пересечение двух ветвей этой зависимости, отвечающее моменту слияния устойчивой и неустойчивой пленок, является потому сингулярной точкой. При изменении параметра  $u$  такие сингулярные точки заполняют ребро двумерной поверхности, по которому стыкуются гладкие листы графика площади, отвечающие устойчивым и неустойчивым пленкам. Таких ребер ровно два, и они встречаются в одной сингулярной точке графика площади.*

Доказательство. Из изложенных наблюдений следует, что достаточно проверить этот факт для внутреннего и внешнего катеноидов, то есть достаточно убедиться в монотонности роста их площади по мере увеличения их высоты  $h$ . Пусть  $oz$  — ось симметрии катеноида. Запишем его уравнение в виде  $r = a \operatorname{ch} \frac{z}{a}$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $|z| \ll$

$\ll \frac{h}{2}$ ,  $r \left( \frac{h}{2} \right) = R$  ( $R$  — радиус граничных окружностей катеноида).

Если  $S$  — площадь катеноида, то  $S = S(h)$  и  $a = a(h)$ . Прямое вычисление показывает, что  $S = \pi a(h) \left( h + 2R \sqrt{\frac{R^2}{a(h)^2} - 1} \right)$ . Далее,  $\frac{dS}{dh} = 2\pi a(h) > 0$ . Отсюда следует, что с ростом  $h$  площади обоих катеноидов, как устойчивого, так и неустойчивого, строго монотонно возрастают вплоть до критического значения  $h_{\max}$ , когда катеноиды сливаются и затем лопаются, перестраиваясь в два плоских диска. Лемма доказана.

*Лемма 5. Если  $s_1(h)$  и  $s_2(h)$  — площади внешнего и внутреннего катеноидов ( $s_1(h) < s_2(h)$ ), то при  $h \rightarrow h_{\max}$  графики  $s_1(h)$  и  $s_2(h)$  касаются друг друга в сингулярной точке  $h = h_{\max}$  с порядком касания  $3/2$ .*

Доказательство. Требуется найти такое число  $\alpha$ , что

$$\lim_{h \rightarrow h_{\max}} \frac{s_2(h) - s_1(h)}{(h_{\max} - h)^\alpha} = c \quad (c \neq 0, \infty).$$

Из доказательства леммы 4 следует, что  $S(h) = \int 2\pi a(h) dh$ . Отсюда

$$2\pi \int_h^{h_{\max}} \frac{a_2(t) - a_1(t)}{(\Delta h)^\alpha} dt = \frac{s_2 - s_1}{(\Delta h)^\alpha}.$$

Если

$$a_2 - a_1 = c(\Delta t)^\beta + o((\Delta t)^\beta), \text{ где } c \neq 0,$$

то

$$s_2 - s_1 = \frac{2\pi c}{\beta + 1} (\Delta h)^{\beta+1} + 2\pi \int_h^{h_{\max}} o((\Delta t)^\beta) dt.$$

Пусть  $a_{\text{кр}} = a(h_{\text{макс}})$ . Можно выразить  $h$  как функцию от  $a$ . Тогда  $h_{\text{макс}} = h(a_{\text{кр}})$  и можно убедиться, что  $\frac{d^2h}{da^2} \Big|_{a=a_{\text{кр}}} \neq 0$ . Если  $\Delta a_2 = a_2 - a_{\text{кр}}$  при  $a \geq a_{\text{кр}}$ ,  $\Delta a_1 = a_1 - a_{\text{кр}}$  при  $a \leq a_{\text{кр}}$  и  $h(a_1) = h(a_2)$ , то  $\Delta h = \mu (\Delta a_1)^2 + o((\Delta a_1)^2) = \mu (\Delta a_2)^2 + o((\Delta a_2)^2)$ , где  $\mu \neq 0$ ,  $\mu = \frac{d^2h}{da^2} \Big|_{a=a_{\text{кр}}}$ .

Отсюда

$$\frac{(\Delta h)^\beta}{\Delta a} = \mu (\Delta a_2)^{2\beta-1} \frac{(1 + o(1))^\beta}{2 + o(1)}.$$

Таким образом получаем условие  $\beta = 1/2$ . Отсюда  $\alpha = \beta + 1 = 3/2$ .

Из лемм 4 и 5 очевидно следуют предложения 1 и 2. Отметим, что для получения неустойчивой пленки *1в* мы каждый раз совершали некоторую работу (см. выше опыт с натягиваемой нитью), то есть увеличивали площадь пленки. При этом работа, совершаемая силами поверхностного натяжения в окрестности критического состояния, была мала, так как заметных скачкообразных самоперестроек пленки, сравнимых с заметной перестройкой при описанном выше натяжении нити, не происходило. Поэтому график площади  $s_2(h)$  неустойчивых пленок *1в* лежит выше графика площади  $s_1(h)$  устойчивых пленок *1а* и *1б*.

Полезно выяснить структуру римановой поверхности полученной нами многозначной функции и детально изучить римановы поверхности для других топологических типов минимальных поверхностей, границей которых является контур Дугласа.

Предложение 3. *Рассмотрим двузначный график площадей двух катеноидов, устойчивого и неустойчивого, как функцию расстояния между граничными окружностями катеноидов. Этот график изображается полukuбической параболой (особенность типа  $A_2$ ).*

Доказательство сразу следует из лемм 1—5. В частности, получаем в этом случае ответ на вопрос о типе особенностей многозначного графика  $F(f_0)$  для однопараметрического семейства контуров.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Plateau J. A. F. Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. Paris, 1873.
2. Poston T. The Plateau problem. An invitation to the whole of mathematics. Summer College on global analysis and its applications, 4 July — 25 August 1972. International Centre for theoretical Physics. Trieste, Italy.
3. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. М., 1982.

4. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М., 1974.  
 5. Фоменко А. Т. Топологические вариационные задачи. М., 1984.  
 6. Фоменко А. Т. Вариационные методы в топологии. М., 1982.

Поступила в редакцию  
23.04.84

УДК 517.522.3

Р. Ж. Нурпеисов

**ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ РЯДА ПО СИСТЕМЕ УОЛША — ПЭЛИ  
 С ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ВТОРЫХ РАЗНОСТЕЙ  
 КОЭФФИЦИЕНТОВ**

Хорошо известно ([1], с. 652), что если стремящаяся к нулю последовательность  $\{a_m\}$  удовлетворяет условию

$$\sum_{m=1}^{\infty} m |\Delta^2 a_m| < \infty, \quad (1)$$

то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx \quad (2)$$

является рядом Фурье. В работе [2] выделен класс последовательностей, для которых условие (1) необходимо и достаточно, чтобы ряд (2) был рядом Фурье. В настоящей работе аналогичная задача рассматривается для системы Уолша—Пэли.

Дадим определение ортонормированной системы Уолша в нумерации Пэли. Пусть  $\omega_0(x) \equiv 1$  на  $[0, 1]$ . Если  $n \geq 1$  и  $2^{v_1} + 2^{v_2} + \dots + 2^{v_p}$  ( $v_1 < v_2 < \dots < v_p$ ) есть двоичное представление числа  $n$ , то полагаем  $\omega_n(x) = r_{v_1+1} \times \dots \times r_{v_p+1}$ , где  $r_k(x)$  — функции Радемахера.

Отметим некоторые свойства ядра Дирихле  $D_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x)$  и ядра

Фейера  $K_n(x) = \sum_{i=1}^n D_i(x)/n$  системы Уолша [3]:

1)  $|D_k(x)| \leq \frac{2}{x}$  для любого  $k=0, 1, 2, \dots, x \in (0, 1)$ ;

2) если  $2^v < n \leq 2^{v+1}$ , то

$$D_n(x) = D_{2^v}(x) + \omega_{2^v}(x) D_{n-2^v}(x), \quad D_0(x) \equiv 0;$$

3)  $|nK_n(x)| < \frac{4}{x}(x-2^{-p}) + \frac{4}{x^2}$  на  $(2^{-p}; 2^{-p+1})$ ;

4)  $|nK_n(x)| \leq n^2$  для любого  $n=1, 2, 3, \dots$ ;

$$5) K_{2^n}(x) = \begin{cases} (2^n + 1)/2, & \text{если } 0 \leq x < 2^{-n}, \\ 2^{n-2}, & \text{если } 2^{-n} \leq x < 2^{-n+1}, \\ 2^{n-i-2}, & \text{если } 2^{-n+i} \leq x < 2^{-n+i} + 2^{-n}, \\ 0, & \text{если } 2^{-n+i} + 2^{-n} \leq x < 2^{-n+i+1}, \quad i=1, 2, \dots, n-1. \end{cases}$$