УДК 514.763.47

ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ, НАДЕЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ. V. CR-ПОДМНОГООБРАЗИЯ В МНОГООБРАЗИИ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРЫ

Н. М. Остиану

ВВЕДЕНИЕ

Теория CR-подмногообразий, т. е. подмногообразий, оснащенных CR-структурой, берет свое начало в комплексном анализе. Однако пристальное внимание исследователей эти подмногообразия привлекли лишь в последнее десятилетие [74], [38]. Связь, существующая между многообразиями Коши — Римана, известными также под названием CR-многообразий, и CR-подмногообразиями и послужила основанием для введения этого термина для определенного класса подмногообразий в эрмитовых, а затем греевых многообразиях.

В последние годы CR-подмногообразия стали предметом исследования в разнообразных классах дифференцируемых многообразий. Ниже мы укажем основные направления дифференциально геометрического исследования таких подмногообразий.

Теория CR-многообразий в последние два десятилетия получила большое развитие прежде всего в направлении теории функции, дифференциальных уравнений, а также дифференциальной геометрии и ее приложений в теоретической физике [20], [21], [19], [51]. Это открывает широкие перспективы развития теории CR-структур не только на многообразиях, в том числе на расслоенных многообразиях [19], но и на подмногообразиях.

Понятие CR-структуры возникло при изучении касательных уравнений Коши—Римана на вещественных подмногообразиях M_m пространства C^N [20], [52], [22].

1. Напомним определение CR-многообразия (см., например, [19], [14], [21]).

Вещественное многообразие M_n называется многообразием Коши — Римана или CR-многообразием, если в каждой точке

$x \in M_n$ в касательном пространстве $T_x(M_n)$ выделено подпространство $\mathscr{H}_x^c(M_n)$, гладко зависящее от x, и каждое такое подпространство $\mathscr{H}_x^c(M_n)$ наделено гладко зависящей от x комплексной структурой. Комплексная размерность подпространства $\mathscr{H}_x^c(M_n)$ называется CR-размерностью многообразия M_n. Совокупность подпространств $\mathscr{H}_x^c(M_n)$ образует комплексное касательное расслоение $\mathscr{H}^c(M_n)$, называемое CR-структурой на M_n. CR-структура называется инволютивной, если $[\mathscr{H}^c, \mathscr{H}^c] \subset \mathscr{H}^c$.

На CR-многообразии существует вещественное распределение D и поле эндоморфизмов $J: D \to D$ в нем такое, что $J^2 = -I$. D есть $Re(\mathscr{H} \oplus \overline{\mathscr{H}})$ и $\mathscr{H}_x = \{X - iJX \mid X \in D\}$.

2. CR-структура естественно возникает на вещественных подмногообразиях в комплексном пространстве C^N.

Пусть M_m — вещественное подмногообразие в C^N и $T_x(M_m)$ — касательное пространство в точке $x \in M_m$.

Положим

$$H_x(M_m) = T_x(M_m) \cap J T_x(M_m)$$

где J — оператор умножения на мнимую единицу в C_m^N.

На $H_x(M_m)$ индуцируется комплексная структура. Если размерность H_x постоянна на M_m, то M_m является CR-многообразием, а естественно возникающая на нем CR-структура называется CR-структурой, индуцированной комплексной структурой объемлющего пространства.

Для индуцированной CR-структуры на M_n в C^N условия интегрируемости структуры выполняются [20], [19].

Если $\dim H_x = 0$, то M_m называется антиинвариантным, а при $\dim H_x = \dim T_x(M_m)$ — инвариантным или голоморнфым подмногообразием.

В дальнейшем изложении мы будем предполагать, что эти два случая исключены.

Понятие CR-подмногообразия в многообразии $M_n(g, J)$ почти эрмитовой структуры было введено румынским геометром Бежанку [28].

Определение 1. CR-подмногообразием почти эрмитова многообразия $M_n(g, J)$ называется вещественное m-мерное подмногообразие в M_n, на котором существует голоморфное распределение D такое, что его ортогональное дополнение $D^\perp$ в $T(M_m)$ — вполне вещественное, т. е. $JD_x^\perp \subset T_x^\perp(M_m)$, где $T_x^\perp(M_m)$ — ортогональная нормаль многообразия M_m в точке x.

Это определение CR-подмногообразия и принято почти всеми исследователями. Оно непосредственно переносится и на случай эрмитовых многообразий.

Блэр и Чэн доказывают [40] следующую теорему.

Теорема. Пусть M_n — эрмитово многообразие и M_m — CR-подмногообразие в нем, тогда M_m есть CR-многообразие.

Эту теорему авторы считают обоснованием правомерности использования термина «CR-подмногообразие». Определение CR-подмногообразия в $M_n(g, J)$ допускает и другую формулировку. Действительно, когда M_m есть CR-подмногообразие $T_x^{\perp}(M_m)$ (в каждой точке $x \in M_m$) пересекает образ касательного пространства $JT_x(M_m)$ по подпространству $V_x \subset T_x^{\perp}(M_m)$, размерность которого равна размерности ортогонального дополнения $D_x^{\perp}$ голоморфного касательного пространства D_x и $JD_x^{\perp} = V_x$ (см. также [59]).

Определение 2. CR-подмногообразием в почти эрмитовом многообразии $M_n(g, J)$ называется вещественное подмногообразие M_m, на котором определено распределение нетривиальных голоморфных касательных пространств D, индуцированное почти комплексной структурой J, и ортогональная нормаль $T_x^{\perp}(M_m)$ пересекает $JT_x(M_m)$ по подпространству размерности, равной размерности $D_x^{\perp}$.

Так введенное понятие CR-подмногообразия может быть распространено и на многообразия $M_n(J)$, не оснащенные полем метрического тензора g (см. § 4).

Проводя некоторую систематизацию литературы, посвященной исследованию CR-подмногообразий, можно отметить, что основная часть исследований касается CR-подмногообразий в келеровых многообразиях [24], [40], [62], [60], [44], [46] и др. и в комплексной пространственной форме [46], [39], [44] и др. Менее многочисленны исследования CR-подмногообразий в эрмитовых и почти эрмитовых многообразиях.

Исследования CR-подмногообразий в многообразиях, оснащенных структурами, которые можно отнести к подклассам $(f\xi\eta\rho)$-структуры [9], [55], лишь единичны, не считая CR-подмногообразий в многообразиях контактной и почти контактной структуры. Им посвящена статья Н. Д. Полякова [17], публикуемая в этом же сборнике и [16].

Другой цикл исследований касается CR-подмногообразий в комплексно-проективном [46], [69], [42], [63], [71] пространстве и на сфере [44], [71], [61]. Малочисленны еще работы, в которых изучаются CR-подмногообразия в кватернионных пространствах [23], [38].

Отдельно стоящей, но тесно связанной с теорией CR-подмногообразий, является теория CR-произведений. Эта область [50] в последнее время привлекает возрастающий интерес.

В настоящей статье мы в основном опишем результаты исследований CR-подмногообразий в келеровых многообразиях, оснащенных как заданной, так и индуцированной CR-структурой, а также остановимся на возможных обобщениях понятия CR-структуры, не требующих априорного задания метрики в объемлющем пространстве.

Краткий обзор результатов, полученных в теории CR-подмногообразий до 1985 года, опубликован в [38].

§ 0. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Пусть M_n — четномерное вещественное размерности n дифференцируемое многообразие класса C^∞. Говоря о многообразии M_n, будем всегда рассматривать некоторую окрестность $U \subset M_n$ произвольной точки $x_0 \in U$ и обозначать x текущую точку в этой окрестности.

Пусть $T^s(M_n)$ — касательное расслоение порядка s над M_n и $T_x^s(M_n)$ — слой этого расслоения, соответствующий точке $x \in M_n$.

Будем считать, что над M_n введено расслоение реперов порядка $s: R^s(M_n) = \overset{s}{\underset{x \in M_n}{\cup}} R_x^s(M_n)$, где R_x^s — множество всех реперов в точке $x \in M_n$ с базисными векторами $\underset{x}{e_K}, \underset{x}{e_{K_1K_2}}, \ldots, \underset{x}{e_{K_1\ldots K_s}}$.

Как известно [7], [6], над окрестностью U можно ввести n линейных линейно независимых форм (структурные формы многообразия M_n):

$$\omega^I = x_K^I dx^K, \tag{1}$$

при последовательных продолжениях которых возникает последовательность линейных дифференциальных форм:

$$\omega_K^J,\ \omega_{K_1K_2}^J, \ldots \omega_{K_1\ldots K_s}^J, \ldots, \tag{2}$$

имеющих расслоенную структуру относительно форм ω^I:

$$d\omega_{K_1\ldots K_p}^I = \sum_{s=1}^{p} \frac{1}{s!\ (p-s)!} \omega_{(K_1\ldots K_s}^L \wedge \omega_{K_{s+1}\ldots K_p)L}^I + \omega^L \wedge \omega_{K_1\ldots K_pL}^I. \tag{3}$$

При фиксации точки $x \in M_n$ формы ω^I обращаются в нуль, а формы последовательности (2) становятся инвариантными формами группы преобразований, названной Г. Ф. Лаптевым [7] дифференциальной группой D_n^s порядка s. В касательном пространстве $T_x^s(M_n)$ группа D_n^s представлена как группа преобразований локального векторного репера: $\{\underset{x}{e_K}, \ldots, \underset{x}{e_{K_1\ldots K_s}}\}$.

В частности, группа D_n^1 с инвариантными формами $\overline{\omega}_K^I$ представлена в слоях касательного расслоения $T_x^1(M_n)$ как группа преобразований репера $\{\underset{x}{e_K}\}: \delta \underset{x}{e_K} = \overline{\omega}_K^L \underset{x}{e_L}$. (В дальнейшем индекс «$x$» мы будем опускать).

Зададим теперь в M_n подмногообразие M_m, определив его как образ отображения $f: S_n \to M_n$ гладкого m-мерного многообразия S_m (именуемого пространством параметров) в многообразие M_n. Этому отображению соответствует гладкое отображение $df: T(S_m) \to T(M_n)$.

Используя (1), это отображение можно записать следующим образом:

$$\omega^K = \Lambda_i^K \theta^i, \tag{4}$$

где θ^i — структурные формы многообразия параметров, удовлетворяющие уравнениям вида (3). Уравнения (4) называются параметрическими уравнениями M_m в M_n.

Мы будем считать, что в каждой точке x $T_x(T_m) \subset T_{xR}(M_n)$, где $T_R(M_n)$ — ограничение касательного расслоения $T(M_n)$ на M_m.

Функции $\Lambda_i{}^K$ образуют геометрический объект. Поле этого объекта на M_m определяется [12] системой:

$$d\Lambda_i^K + \Lambda_i^L \omega_L^K - \Lambda_l^K \theta_i^l = \Lambda_{il}^K \theta^l, \tag{5}$$

где θ_i^l — линейные формы и $\delta\theta_j^l = \theta_j^k \wedge \theta_k^l$.

В каждой точке $x \in M_m$ векторы

$$\Lambda_i = \Lambda_i^K e_K \tag{6}$$

определяют касательную плоскость $T_x(M_m)$.

На M_m можно задать поле объекта $\{N_\alpha^I\}$:

$$dN_\alpha^I + N_\alpha^K \omega_K^I - N_\beta^I \theta_\alpha^\beta = N_{\alpha k}^I \theta^k, \tag{7}$$

где θ_α^β — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие в произвольно фиксированной точке $x \in M_m$ структурным уравнениям линейной группы $Gl(n-m, R)$. В каждой точке $x \in M_m$ векторы

$$N_\alpha = N_\alpha^K e_K \tag{8}$$

определяют соответствующее нормально оснащающее пространство $N_x(M_m)$.

2. Пусть M_n — келерово многообразие вещественной размерности m $(=2k)$, J — поле объекта, определяющего на нем почти комплексную структуру и G — поле объекта эрмитовой метрики, т. е. метрики, согласованной с почти комплексной структурой J. Это означает, что:

— J есть тензорное поле типа (1.1), которое в каждой точке $x \in M_n$ определяет эндоморфизм в $T_x(M_n)$ такой, что $J^2 = -I$, где I есть тождественное преобразование в $T_x(M_n)$;

— G есть поле симметрического тензора типа (0.2);

— выполняются соотношения:

$$G(JX, JY) = G(X, Y) \tag{8}$$

для всех $X, Y \in T_x(M_n)$.

Отметим, что каждое метрическое почти комплексное многообразие M_n, если на нем задано поле симметрического тензора G' типа (0.2), допускает согласованную метрику G:

$$G(X, Y) = G'(X, Y) + G'(JX, JY). \tag{9}$$

Известно, что в римановом многообразии однозначно определяется симметрическая связность такая, что

$$\nabla_X G = 0, \tag{10}$$

где $\nabla_X G$ есть оператор ковариантного дифференцирования относительно X. Такая связность названа римановой связностью или связностью Леви — Чивита. В терминах полей геометрических объектов это означает, что, заменив в уравнениях поля тензора G:

$$dG_{JK} - G_{LK}\omega_J^L - G_{JL}\omega_K^L = G_{JKL}\omega^L \tag{11}$$

формы ω_J^K преобразованными формами:

$$\tilde{\omega}_J^K = \omega_J^K - \Gamma_{JL}^K \omega^L, \tag{12}$$

где Γ_{JL}^K образуют геометрический объект, поле которого на M_n определяется системой уравнений:

$$d\Gamma_{JL}^K - \Gamma_{IL}^K\omega_J^I - \Gamma_{JI}^K\omega_L^I + \Gamma_{JL}^I\omega_I^K + \omega_{JL}^K = \Gamma_{JLI}^K\omega^I, \tag{13}$$

получим

$$\nabla G_{JK} = (G_{JKL} + G_{IK}\Gamma_{JL}^I + G_{JI}\Gamma_{KL}^I)\,\omega^L, \tag{14}$$

где мы обозначали:

$$\nabla G_{JK} \overset{\text{def}}{=} dG_{JK} - G_{LK}\tilde{\omega}_J^L - G_{JL}\tilde{\omega}_K^L. \tag{15}$$

Потребовав, чтобы

$$\nabla G_{JK} = 0 \tag{16}$$

(т. е. чтобы связность была римановой), однозначно определим компоненты объекта связности:

$$\Gamma_{JL}^K = -\frac{1}{2} G^{KI} (G_{JLI} - G_{IJL} - G_{LIJ}). \tag{17}$$

Очевидно, что таким образом определенный объект Γ_{JL}^K симметричен по индексам JL.

Введем операцию, применяемую к компонентам любого геометрического объекта, присоединенного к группе D_n^1 или к прямому произведению нескольких групп преобразований [12]. Возможность осуществления этой операции предполагает наличие связности в главных расслоенных пространствах, слоями которых являются соответствующие групповые пространства.

Результат, полученный путем применения этой операции, будем называть (обобщенной) ковариантной производной данного объекта в соответствующих связностях.

Так, например, для объекта $\{\Lambda_h{}^I\}$ (5) «ковариантной производной» будем называть выражение

$$\overset{\Gamma\overset{1}{\gamma}}{\nabla}_k \Lambda_j^I \equiv \overset{\Gamma\overset{1}{\gamma}}{\tilde{\Lambda}}{}_{jk}^I = \Lambda_{jk}^I - \Lambda_j^K \Gamma_{KL}^I \Lambda_k^L + \Lambda_l^I \overset{1}{\gamma}{}_{jk}^l.$$

Очевидно, что

$$(\overset{\circ}{\nabla}_k \Lambda^I_j)\,\theta^k = d\Lambda^I_j + \Lambda^K_j \tilde{\omega}^I_K - \Lambda^I_k \tilde{\theta}^k_j,$$

где формы $\tilde{\omega}^I_K$ — формы связности Г, определяемые равенствами (12), а формы тангенциальной связности $\overset{1}{\gamma}$ определяются равенством

$$\tilde{\theta}^i_j = \theta^i_j - \overset{1}{\gamma}{}^i_{jk}\theta^k.$$

Мы не предполагаем обязательного отнесения многообразия к специализированному реперу, например, к реперу, относительно которого $\omega^I_K = \Gamma^I_{KL} dx^L$.

Выражение $\underset{\Gamma\overset{1}{\gamma}}{\overset{\circ}{\nabla}} \Lambda^I_j \theta^k$ будем называть ковариантным дифференциалом, а $\underset{\Gamma\overset{1}{\gamma}}{\nabla_k} \Lambda^K_j e_K \equiv \Lambda^K_{jk} e_K$ — вектором ковариантной производной.

Многообразие $M(J, G)$ называется келеровым многообразием, если тензор почти комплексной структуры J параллелен в римановой связности, т. е.

$$\nabla J = 0.$$

Кручением структурного тензора J называется тензор типа (1.2), известный под названием тензора Нейенхейса, определяемый следующей формулой:

$$N(X, Y) = ([JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]), \qquad (18)$$

где $[X, Y] = (Y^I_K X^K - X^I_K Y^K)\, e_I$.

Следовательно, при записи тензора Нейенхейса в координатной форме имеем:

$$N^I_{JK} = J^I_{JL} J^L_K - J^I_{KL} J^L_J + J^I_L (J^L_{KJ} - J^L_{JK}). \qquad (19)$$

§ 1. *CR*-ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Дифференциально-геометрическая теория подмногообразий в метрических комплексных и вещественных многообразиях, оснащенных почти комплексной структурой, весьма богата. Наличие в объемлющем пространстве оснащающих структурных тензоров J и G позволяет присоединить к подмногообразию нормально оснащающее расслоение, ортогональное касательному расслоению $T(M_m)$, и уже в первой дифференциальной окрестности определить в многообразии риманову связность, внутренне к нему присоединенную. Одновременно определяются внутренне присоединенные к подмногообразию поле метрического тензора и поле тангенциальной связности и нормальной связности (в частности, индуцированная связность $\overset{\circ}{\gamma}$ и вертикальная связность $\overset{*}{\gamma}$ (см. [12], стр. 36)), ассоциированные полю ортогональных нормалей.

Благодаря наличию поля тензора J, в многообразиях $M_n(J, G)$ можно различать три основных класса подмногообразий M_m, обусловленных характером действия структурного тензора J на касательное пространство $T_x(M_m)$ подмногообразия M_m в его текущей точке x:

— голоморфные или инвариантные подмногообразия (см., например, [70]), характеризуемые тем, что $JT_x(M_m) \subset T_x(M_m)$;

— вполне вещественные (или антиинвариантные) подмногообразия, т. е. такие, что $JT_x(M_m) = T_x(M_m)^{\perp}$, где $T_x(M_m)^{\perp}$ — ортогональная нормаль в точке $x \in M_m$ (см., например, [70]);

— родовые подмногообразия (или антиголоморфные), т. е. такие, что $JT_x^{\perp}(M_m) \subset T_x(M_m)$ и $T_x(M_m) = H_x(M_m) \oplus JT_x^{\perp}(M_m)$ [70].

Как было указано во введении (см. определение 1) CR-подмногообразие M_m — это вещественное подмногообразие в $M_n(J, G)$, на котором существует дифференцируемое распределение D, удовлетворяющее условиям:

$$1)\ J(D_x) = D_x \text{ и } 2)\ J(D_x^{\perp}) \subset T_x(M_m)^{\perp}$$

(для всех $x \in M_m$), где $D^{\perp}$ — дополнительное к D в $T(M_m)$ распределение на M_m, ортогональное D.

Если коразмерность многообразия M_m равна $\dim D_x^{\perp}$, то подмногообразие M_m называется родовым CR-подмногообразием [70], [71], [74].

Распределение D на CR-подмногообразии называется голоморфным или горизонтальным, а распределение $D_{\perp}$ — вполне вещественным или вертикальным.

Очевидно, что голоморфное и вполне вещественное подмногообразия можно считать частными (тривиальными) классами CR-подмногообразий. Поэтому нетривиальное CR-подмногообразие именуется иногда собственно CR-подмногообразием.

1. Основные соотношения.

(*) Далее мы будем предполагать, что связность Γ — риманова связность и подмногообразие M_m — собственно CR-подмногообразие (proper CR-submanifold), оснащенное полем ортогональных нормалей, т. е. $N(M_m) \overset{\text{def}}{=} T^{\perp}(M_m)$.

Заметим, что при таких предпосылках индуцированная связность $\overset{\circ}{\gamma}$, ассоциированная ортогональной нормали, также риманова (см. [12], стр. 44).

Для обозначения операторов ковариантного дифференцирования (обобщенного) (см. § 0) относительно связности Γ, индуцированной связности $\overset{\circ}{\gamma}$ в касательном расслоении и вертикальной связности $\overset{*}{\gamma}$ в ортогональном (нормальном) расслоении введем, соответственно [12], следующие обозначения: $\tilde{\nabla}$, $\overset{\circ}{\nabla}$, $\overset{*}{\nabla}$.

Обобщенные уравнения Гаусса—Вейнгартена и Ван дер Вардена—Бортолотти для структурных объектов касательного и нормального расслоения $\{\Lambda_i^I\}$ и $\{N_\alpha^I\}$ и других векторных полей на M_m приведены в [12].

Если в качестве тангенциальной и нормальной связности принять индуцированную и вертикальную связности $\overset{\circ}{\gamma}$ и $\overset{*}{\gamma}$, то эти уравнения примут следующий вид:

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_k\Lambda_i^I\equiv\overset{\Gamma\overset{\circ}{\gamma}}{\tilde{\Lambda}_{ik}^I}=H_{ik}^\alpha N_\alpha^I,\\ \overset{*}{\tilde{\nabla}}_kN_\alpha^I\equiv\overset{\Gamma\overset{*}{\gamma}}{\tilde{N}_{\alpha k}^I}=l_{\alpha k}^i\Lambda_i^I,\end{gathered}\tag{3}$$

(знак «$\sim$» над ∇ означает, что операция ∇ производилась в связности Γ), где

$$\begin{gathered}H_{ik}^\alpha=\overset{*}{N}{}_I^\alpha\overset{\Gamma_\gamma^1}{\tilde{\Lambda}_{ik}^I},\\ l_{\alpha k}^i=\overset{*}{\Lambda}{}_I^i\overset{\Gamma_\gamma^*}{\tilde{N}_{\alpha k}^I}.\end{gathered}\tag{4}$$

Исходя из предпосылок (*) (стр. 66), имеем:

$$g_{i\alpha}\overset{\mathrm{def}}{=}G_{IK}\Lambda_i^IN_\alpha^K=0,\tag{5}$$

$$G_{JK}\Lambda_i^J=g_{ik}\overset{*}{\Lambda}{}_K^k,\quad G_{JK}N_\alpha^K=g_{\alpha\beta}\overset{*}{N}{}_J^\beta,\tag{6}$$

$$G_{IKL}=0,\quad g_{ijk}=0.\tag{7}$$

Из этих соотношений получаем:

$$G_{IK}(\tilde{\Lambda}_{ik}^IN_\alpha^K+\Lambda_i^I\tilde{N}_{\alpha k}^K)=0$$

или

$$g_{\alpha\beta}\overset{*}{N}{}_K^\beta\tilde{\Lambda}_{ik}^K+g_{il}\overset{*}{\Lambda}{}_K^l\tilde{N}_{\alpha k}^K=0,$$

т. е. с учетом (4),

$$g_{\alpha\beta}H_{ik}^\beta+g_{il}l_{\alpha k}^l=0.\tag{8}$$

Отсюда, в силу симметричности H_{ij}^β по нижним индексам, следует:

$$g_{il}l_{\alpha k}^l-g_{kl}l_{\alpha i}^l=0.\tag{8'}$$

H_{ik}^α и $l_{\alpha k}^i$ называются вторыми фундаментальными тензорами первого рода и второго рода, соответственно, подмногообразия M_m [12].

При помощи уравнений (3), (4) мы находим ковариантные производные для векторов $X\in T_x(M_m)$ и $V\in N_x(M_m)$.

Пусть $X=x^i\Lambda_i=X^Ie_I$, где

$$X^K=x^i\Lambda_i^K,$$

тогда

$$\widetilde{\nabla}_k X^K = \Lambda_l^K \overset{\circ}{\nabla}_k x^l + x^l H_{lk}^{\alpha} N_{\alpha}^K. \tag{9}$$

Пусть $V = v^{\alpha} N_{\alpha} = V^I e_I$, где

$$V^I = v^{\alpha} N_{\alpha}^I,$$

тогда

$$\widetilde{\nabla}_k V^I = N_{\alpha}^I \overset{*}{\nabla}_k v^{\alpha} + v^{\alpha} l_{\alpha k}^l \Lambda_l^I. \tag{10}$$

Для векторов ковариантных производных из (9) и (10), свернув с e_K, получаем:

$$\overset{\Gamma}{X}{}_k^K e_K = \overset{\circ}{\overset{\gamma}{x}}{}_k^l \Lambda_l + x^l H_{lk}^{\alpha} N_{\alpha} \tag{11}$$

$$\overset{\Gamma}{V}{}_k^K e_K = v^{\alpha} e_{\alpha k}^l \Lambda_l + \overset{*}{\tilde{v}}{}_k^{\alpha} N_{\alpha}. \tag{12}$$

Если смещение по M_m производится в направлении, определенном координатами y^k: т. е. $\theta^k = y^k \theta$, то из (11) и (12) (свернув с y^k и учтя, что $y^k = \overset{*}{\Lambda}{}_I^k Y^I$) получаем в бескоординатной записи:

$$\widetilde{\nabla}_Y X = \overset{\circ}{\nabla}_Y X + B(X, Y), \tag{13}$$

$$\widetilde{\nabla}_Y X = -A_V Y + \overset{*}{\nabla}_Y V, \tag{14}$$

где

$$B(X, Y) = H_{ij}^{\alpha} x^i y^j N_{\alpha} = H_{ik}^{\alpha} \overset{*}{\Lambda}{}_J^i \overset{*}{\Lambda}{}_K^k X^J Y^K N_{\alpha}, \tag{15}$$

$$-A_V Y = v^{\alpha} l_{\alpha k}^l y^k \Lambda_l = v^{\alpha} l_{\alpha k}^l Y^L \Lambda_l = V^K \overset{*}{N}{}_K^{\alpha} l_{\alpha k}^l \overset{*}{\Lambda}{}_L^k Y^L \Lambda_l, \tag{16}$$

где H_{ij}^{α} и $l_{\alpha j}^i$ определены в (4).

Форма $B(X, Y)$ называется второй фундаментальной формой подмногообразия M_m. В каждом касательном пространстве $T_x(M_m)$ форма $B(X, Y)$ представляет собой симметричную билинейную векторнозначную форму, принимающую значение в ортогональной нормали $T_x(M_m)^{\perp}$. Вторая форма A, которая многими авторами также называется второй фундаментальной формой, представляет собой косое сечение векторного расслоения $\mathrm{Hom}(T^{\perp}(M_m), S(M_m))$, где $S(M)$ означает расслоение, слоями которого в каждой точке x являются пространства линейных симметрических преобразований $T_x(M_m) \to T_x(M_m)$, т. е. для $V \in T_x{}^{\perp}(M_m)$ $A_V : T_x(M_n) \to T_x(M_m)$ (см., например, [74], [71]).

Для второй фундаментальной формы $B(X, Y)$ находим следующую ковариантную производную [71]:

$$\widetilde{\nabla}_Z B(X, Y) = \overset{*}{\nabla}_Z (B(X, Y)) - B(\overset{\circ}{\nabla}_Z X, Y) - B(X, \overset{\circ}{\nabla}_Z Y), \tag{17}$$

где $X, Y, Z \in T_x(M_m)$ в каждой точке $x \in M_m$.

Аналогично для формы A получаем формулу [71]:

$$(\tilde{\nabla}_X A)_V Y = \overset{\circ}{\nabla}_X (A_V Y) - A_{\overset{*}{\nabla}_X V} - A_V \overset{\circ}{\nabla}_X Y. \tag{18}$$

Имеет место соотношение [74], [71]:

$$G(B(X, Y), V) = G(A_V X, Y). \tag{19}$$

Оно непосредственно следует, при предпосылках (*), из (8) в силу того, что выполняются соотношения (5), (6).

2. Распределения D **и** $D^\perp$. Так как, по предположению, M_m есть CR-подмногообразие, то в каждой точке $x \in M_m$ в $T_x(M_m)$ определены два подпространства D_x и $D_x^\perp$, взаимно дополнительных и взаимно ортогональных, порождающих на M_m пару распределений: D и $D^\perp$.

Пусть $\dim D_x = p$, $\dim D_x^\perp = q = m - p$. Распределения D и $D^\perp$ определяются парой геометрических объектов $\{D_a^i\}$ и $\{D_u^i\}$, компоненты которых являются коэффициентами в следующих разложениях:

$$D_a = D_a^i \Lambda_i, \quad D_u = D_u^i \Lambda_i,$$

$a = 1, \ldots, p$, $u = p+1, \ldots, m$.

По построению очевидно, что $\det \begin{Vmatrix} D_a^i \\ D_u^i \end{Vmatrix} \neq 0$, т. е. ранг матрицы равен m.

Вводя обращенные объекты $\{\overset{*}{D}{}_i^a\}$, $\{\overset{*}{D}{}_i^u\}$, устанавливаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &D_a^i \overset{*}{D}{}_j^a + D_u^i \overset{*}{D}{}_j^u = \delta_j^i, \quad D_a^i \overset{*}{D}{}_i^b = \delta_a^b, \\ &D_u^i \overset{*}{D}{}_i^v = \delta_u^v, \quad D_a^i \overset{*}{D}{}_i^v = 0, \quad D_u^i \overset{*}{D}{}_i^a = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

В $T_x(M_m)$ естественно появляется пара проекторов l и m, определенных следующими аффинорами:

$$\begin{aligned} &l_j^i = \overset{*}{D}{}_j^a D_a^i, \quad m_j^i = D_u^i \overset{*}{D}{}_j^u, \\ &\operatorname{rang}(l) = p, \quad \operatorname{rang}(m) = m - p. \end{aligned} \tag{21}$$

Пусть $X \in T_x(M_m)$,

$$lX = l_k^i x^k \Lambda_i = x^k D_a^i \overset{*}{D}{}_k^a \Lambda_i = u^a D_a^i \Lambda_i = u^a D_a,$$
$$mX = u^v D_v,$$

т. е. операторы l и m, соответственно, проектируют $T_x \to (D_a)_x$ и $T_x \to (D_u)_x$. Применив оператор l, (соответственно m) к любому вектору из подпространства $D_x^\perp$ (соответственно D_x), убеждаемся, что он действует на него как аннулятор.

Следовательно, подпространство D_x есть образ оператора l и ядро оператора m, а подпространство $D_x^\perp$ образ оператора m и ядро оператора l.

Компоненты операторов удовлетворяют следующим соотношениям:

$$l^2=l,\ m^2=m,\ lm=ml=0,\ l+m=1.$$

3. **Преобразование базисных векторов Λ_i, N_α аффинором J на CR-подмногообразии.** Если CR-подмногообразие M_m оснащено полем нормалей $N(M_m)$ (в частности, ортогональных нормалей $T^\perp(M_m)$), то вектор любого векторного поля, заданного на M_m, в каждой точке $x \in M_m$ можно однозначно представить разложением по векторам репера, образованного векторами

$$\Lambda_i \in T_x(M_m) \text{ и } N_\alpha \in T_x(M_m).$$

Для образов векторов репера эти разложения мы запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} J\Lambda_i &= f_i^k\Lambda_k + \eta_i^\alpha N_\alpha, \\ JN_\alpha &= -\xi_\alpha^i\Lambda_i + \rho_\alpha^\beta N_\beta. \end{aligned} \tag{22}$$

Известно [9], [11], что f, ξ, η, ρ образуют четверку геометрических объектов, являющихся структурными объектами структуры, названной $(f\xi\eta\rho)$-структурой. Эти компоненты связаны следующими соотношениями

$$\begin{aligned} f_i^k f_k^j &= -\delta_i^j + \eta_i^\alpha\xi_\alpha^j, \\ f_k^i\xi_\alpha^k = -\rho_\alpha^\beta\xi_\beta^i, &\quad f_k^i\eta_i^\alpha = -\rho_\beta^\alpha\eta_k^\beta, \\ \rho_\alpha^\gamma\rho_\gamma^\beta &= -\delta_\alpha^\beta + \xi_\alpha^i\eta_i^\beta. \end{aligned} \tag{23}$$

Компоненты f, ξ, η, ρ структурных объектов индуцирующейся на M_m $(f\xi\eta\rho)$-структуры имеют следующее строение

$$\begin{aligned} f_k^i = \overset{*}{\Lambda}{}_K^i J_L^K \Lambda_k^L, &\quad \xi_\alpha^i = -N_\alpha^K J_K^L \overset{*}{\Lambda}{}_L^i, \\ \eta_i^\alpha = \overset{*}{N}{}_K^\alpha J_L^K \Lambda_i^L, &\quad \rho_\beta^\alpha = \overset{*}{N}{}_K^\alpha J_L^K N_\beta^L. \end{aligned} \tag{24}$$

В силу предположения (*) из формул (5) следует, что $g_{i\alpha}=0$. Непосредственным подсчетом из (6) и (7) с учетом (24) устанавливаем:

$$G_{JK}\Lambda_i^K J_M^J N_\alpha^M = g_{ik}\overset{*}{\Lambda}{}_J^k J_M^J N_\alpha^M = -g_{ik}\xi_\alpha^k. \tag{25}$$

С другой стороны:

$$G_{JK}\Lambda_i^K J_M^J N_\alpha^M = -G_{JM}\Lambda_i^K J_K^J N_\alpha^M = -g_{\alpha\beta}\overset{*}{N}{}_J^\beta J_K^J \Lambda_i^K = -g_{\alpha\beta}\eta_i^\beta,$$

т. е.

$$g_{ik}\xi_\alpha^k = g_{\alpha\beta}\eta_i^\beta. \tag{26}$$

Для метрической $(f\xi\eta\rho)$-структуры при условии $g_{i\alpha}=0$ имеет место ряд соотношений (см.[15]).

4. Преобразование касательных и нормально оснащающих векторов. Для произвольных касательного и нормального векторов $X=x^i\Lambda_i$ и $V=v^\alpha N_\alpha$, используя формулы (22), получаем следующее разложение:

$$\begin{aligned} JX&=x^i(f_i^k\Lambda_k+\eta_i^\alpha N_\alpha)=x^i f_i^k\Lambda_k+x^i\eta_i^\alpha N_\alpha,\\ JV&=v^\alpha(-\xi_\alpha^i\Lambda_i+\rho_\alpha^\beta N_\beta)=-v^\alpha\xi_\alpha^i\Lambda_i+v^\alpha\rho_\alpha^\beta N_\beta. \end{aligned} \tag{27}$$

Эти формулы в бескоординатной записи можно представить следующим образом (см. [28], [71] и др.):

$$\begin{aligned} JX&=FX+EX,\\ JV&=TX+PX, \end{aligned} \tag{28}$$

где первое слагаемое в правой части каждого равенства — тангенциальная компонента, а второе — нормальная компонента векторов JX и JV соответственно. Очевидно, что F есть эндоморфизм в касательном расслоении, а E — 1-форма в касательном расслоении со значениями в нормальном расслоении.

Если векторы X и V определить координатами относительно репера $\{e_I\}$, то операторы F, E, T, P можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &F\to\overset{*}{\Lambda}{}_L^i f_i^k\Lambda_k^K;\quad E\to\overset{*}{\Lambda}{}_L^i\eta_i^\alpha N_\alpha^K;\\ &T\to-\overset{*}{N}{}_L^\alpha\xi_\alpha^i\Lambda_i^K;\quad P\to\overset{*}{N}{}_L^\alpha\rho_\alpha^\beta N_\beta^K. \end{aligned} \tag{29}$$

Из равенств (27) (или (28)) следует ряд соотношений [72].

a) Для $X, Y\in T_x(M_n)$:

$$G(JX,Y)=G(FX,Y). \tag{30}$$

Это соотношение одновременно выявляет косую симметрию выражения $G(FX, Y)$.

b) Для векторов $V, U\perp T(M_m)$:

$$G(JV,U)=G(PV,U), \tag{31}$$

откуда очевидна косая симметрия выражения $G(PV, U)$.

c) Следствием (27) является также отношение

$$G(EX, V)+G(X, TV)=0. \tag{32}$$

Исходя из разложения (28), для вектора $X\in T_x(M_m)$ запишем

$$\begin{aligned} JlX&=FlX+ElX,\\ JmX&=FmX+EmX. \end{aligned}$$

Учитывая, что $JlX\subset D_x$, $FlX\subset T^\perp(M_m)$, а также что $JmX\subset\subset T_x(M_m)^\perp$, получаем следующие соотношения, связывающие проектирующие операторы l и m с операторами F, E (299):

$$mFl=0,\ El=0,\ Fl=F,\ Fm=0. \tag{33}$$

Учитывая также и соотношения (23), находим

$$l=-F^2, \quad m=F^2+1. \tag{34}$$

5. f-структура, естественно возникающая на CR-подмногообразии. В силу предположения (*) (см. стр. 66) $N(M_m)=T^{\perp}(M_m)$. Как было отмечено ранее, в каждой точке $x\in M_m$ CR-подмногообразия $T_x^{\perp}(M_m)$ пересекает $JT_x(M_m)$ по подпространству $\underset{1}{N}_x(M_m)=JD_x^{\perp}$.

Обозначим $\underset{2}{N}_x(M_m)$ ортогональное дополнение пространства $\underset{1}{N}_x(M_m)$ в нормальном пространстве $N_x(M_m)$. При этом имеем:

$$T_x(M_m)=D_x\oplus D_x^{\perp},\ N(M_m)\perp T(M_m),$$
$$T_x^{\perp}(M_m)\cap JT_x(M_m)=\underset{1}{N}_x,\ \underset{1}{N}_x=JD_x^{\perp},\ \underset{1}{N}_x\perp\underset{2}{N}_x, \tag{35}$$

т. е.

$$T_x^{\perp}(M_m)=JD_x^{\perp}\oplus\underset{2}{N}_x.$$

Из определения CR-подмногообразия M_m, при принятых в (35) обозначениях, следует, что векторы $J\Lambda_i$ будут раскладываться только по векторам Λ_i и N_{α_1} и, следовательно, в разложении (22)

$$\eta_i^{\alpha_1}\equiv 0 \tag{36}$$

Исходя из формул (22), при учете (35), (25) и (36), устанавливаем:

$$J\underset{1}{N}_{\alpha_1}=\xi_{\alpha_1}^{i}\Lambda_i,\ \rho_{\alpha_1}^{\beta}\equiv 0, \tag{37}$$

$$J\underset{2}{N}_{\alpha_2}=\rho_{\alpha_2}^{\beta_2}\underset{2}{N}_{\beta_2},\ \xi_{\alpha_2}^{i}=0,\ \rho_{\alpha_2}^{\beta_1}\equiv 0. \tag{38}$$

(α_1 и α_2 принимают, соответственно, значения $m+1,\ldots$ $\ldots,m+q$ и $m+q+1,\ldots,n$, где $q=\dim D_x^{\perp}$).

Первые равенства (37) следуют из того, что (по условиям (35))

$$(J\underset{1}{N}_x)=D_x^{\perp}.$$

Покажем справедливость второй группы равенств. Так как $N_{\alpha_2}\perp N_{\alpha_1}$, то $G_{JK}N_{\alpha_1}^{J}N_{\alpha_2}^{K}=g_{\alpha_1\alpha_2}=0$. Из (26) следует, что $\xi_{\alpha_2}^{i}=0$. На основании свойства $G(JX,Y)=-G(X,JY)$, имеем:

$$G_{JK}J_L^{K}N_{\alpha_2}^{L}N_{\alpha_1}^{J}=-G_{LK}J_J^{K}N_{\alpha_2}^{L}N_{\alpha_1}^{J}$$

или

$$G_{JK}\left(-\xi^l_{\alpha_2}\Lambda^K_l+\rho^{\beta_1}_{\alpha_2}N^K_{\beta_1}+\rho^{\beta_2}_{\alpha_2}N^K_{\beta_2}\right)N^J_{\alpha_2}=-G_{LK}\left(-\xi^l_{\alpha_1}\Lambda^K_l\right)N^L_{\alpha_2}.$$

В силу соотношений (35), из этих равенств получаем

$$\rho^{\beta_1}_{\alpha_2}G_{JK}N^K_{\beta_1}N^J_{\alpha_1}=0,$$

следовательно, $\rho^{\beta_1}_{\alpha_2}=0$.

Из (38) следует, что подрасслоение $\underset{2}{N}$ J-инвариантно.

Соотношения (23) сводятся к следующим:

$$f_i{}^k f^j{}_k=-\delta^j_i+\eta^{\alpha_1}_i\xi^j_{\alpha_1},\quad f^i_k\xi^k_{\alpha_1}=0,\quad f^i_k\eta^{\alpha_1}_i=0,$$

$$\xi^i_{\alpha_1}\eta^{\beta_1}_i=\delta^{\beta_1}_{\alpha_1}, \tag{39а}$$

$$\rho^{\gamma_2}_{\alpha_2}\rho^{\beta_2}_{\gamma_2}=-\delta^{\beta_2}_{\alpha_2}, \tag{39в}$$

а уравнения (22) принимают вид;

$$\begin{aligned} J\Lambda_i&=f_i{}^k\Lambda_k+\eta^{\alpha_1}_iN_{\alpha_1},\\ JN_{\alpha_1}&=-\xi^l_{\alpha_1}\Lambda_l,\\ JN_{\alpha_2}&=\rho^{\beta_2}_{\alpha_2}N_{\beta_2}. \end{aligned} \tag{40}$$

Преобразовав векторы D_a и D_u оператором J и воспользовавшись требованиями (35) и формулами (40), получим:

1. $JD_a=D^l_aJ\Lambda_l=D^l_a\left(f^k_l\Lambda_k+\eta^{\alpha_1}_lN_{\alpha_1}\right)$.

Так как, по определению, на CR-подмногообразии

$$JD_a=D_ck^c_a,\ \text{то}\ D^l_a\eta^{\alpha_1}_l=0,$$

(т. е. векторы $D_a\in(\eta^{\alpha_1})$). Так как ранг $\left(\eta^{\alpha_1}_l\right)=q$, то объект $\left\{\eta^{\alpha_1}_l\right\}$ в каждой точке $x\in M_m$ определяет элемент распределения D.

2. $JD_u=D^l_uJ\Lambda_l=D^l_u\left(f^k_l\Lambda_k+\eta^{\alpha_1}_lN_{\alpha_1}\right)$.

Но $JD^\perp=(N_{\alpha_1})$, следовательно

а) $D^l_uf^k_l=0$, т. е. в каждой точке $x\in M_m$ ранг $(f)=m-q=p$ и оператор f действует на $D^\perp_x$ как аннулятор;

б) $D^l_u\eta^{\alpha_1}_l\overset{\text{def}}{=}D^l_u\eta^{m+v=\alpha_1}_l=\delta^v_u$;

в) $JN_{\alpha_1}=-\xi^l_{\alpha_1}\Lambda_l$, но $(JN_{\alpha_1})=D^\perp$, следовательно,

$$D_u=\xi^l_{\alpha_1=m+u}\Lambda_l,$$

т. е. объект $\left\{\xi^l_{\alpha_1}\right\}$ в каждой точке $x\in M_m$ определяет элемент распределения $D^\perp$.

Итак, мы доказали теорему.

Теорема А. На CR-подмногообразии M_m в $M_n(J,G)$, оснащенном полем $T^\perp(M_m)$ ортогональных нормалей естественно возникает дополнительно нормально оснащенная f-структура ранга, равного размерности элемента голоморфного распределения D. Структурные объекты f, ξ, η этой структуры удовлетворяют соотношениям (39а).

Структурными объектами $\{\xi_{\alpha_1}{}^{i}\}$ и $\{\eta_i{}^{\alpha_1}\}$ этой структуры являются объекты, определяющие, соответственно, распределения $D^{\perp}$ и D на подмногообразии M_m.

Теорема В. Если на многообразии M_m в $M_n(J, G)$ задана дополнительно нормально оснащенная f-структура ранга q $(0<q<m)$, определенная объектами f, ξ_α, η_α, удовлетворяющими соотношениями (39а), то она индуцирует на M_m CR-структуру, горизонтальное распределение которой определено объектом $\{\eta^\alpha\}$, а вертикальное — объектом $\{\xi_\alpha\}$.

6. Необходимые и достаточные условия, определяющие CR-подмногообразие. При формулировке необходимых и достаточных условий предполагается, что предположения (*) (см. стр. 66) выполнены.

1. Мы приведем ряд условий, являющихся необходимыми и достаточными для существования на M_m CR-структуры.

В работе [27] Бежанку констатирует, что на каждом CR-подмногообразии почти эрмитова многообразия, оснащенном нормально оснащающим расслоением π, существует структура (F, ω, π), определенная полем тензора типа (1.1) F,1-формой ω со значениями в нормальном расслоении, удовлетворяющими следующим условиям:

$$F^2=-I+m, \quad \omega\circ F=0,$$

где m — проектирующий оператор (см. стр. 69).

(F, ω, π)-структура названа натуральной.

Позже [34] аналогичное утверждение приводится для келерова многообразия M_n в следующей формулировке.

Лемма 1 ([34]). Пусть M_m — собственно CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Тогда существуют на M_m f-структура F и не нулевая 1-форма ω со значениями в нормальном расслоении, удовлетворяющие условиям

$$\omega \circ F=0,$$

$$FX=0, \text{ если и только если } X\in D^{\perp},$$

$$\omega Y=0, \text{ если и только если } Y\in D.$$

Доказательство проведено в предположении, что F и ω определены следующим образом:

$$FX=JlX, \quad \omega X=JmX. \tag{41}$$

Необходимое и достаточное условие того, чтобы M_m в келеровом многообразии M_n было CR-подмногообразием, сформулировали позже (1981) Яно и Кон [71], выразив его в виде требования, чтобы тензоры F и E (введенные в первом уравнении (28)): $JX=FX+EX$, удовлетворяли условиям

$$F^3+F=0, \quad EF=0. \tag{42}$$

Доказательство, проведенное с привлечением операторов l и m и разложений (28), приведено в [71], [72].

Одновременно показано, что тензоры T и P из второго уравнения (28):

$$JV=TX+PX$$

удовлетворяют условиям:

$$P^3+P=0, \quad PE=0. \tag{43}$$

Из (42) и (43) следует, что в касательном и нормальном расслоениях индицируется f-структура.

В работах [72], [74] необходимые и достаточные условия ослаблены и теоремы формулируются следующим образом.

Теорема 1 ([72], [74]). Для того чтобы подмногообразие M_m келерова многообразия M_n было CR-подмногообразием, необходимо и достаточно, чтобы $EF=0$.

Теорема 2 ([72], [74]). Пусть M_m — CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Тогда F есть f-структура на M_m, а P—f-структура в нормальном расслоении подмногообразия M_m.

Другой критерий был предложен Блэром и Ченом [40]. Они формулируют необходимые и достаточные условия, определяющие CR-подмногообразие в комплексной пространственной форме $M_n(c)$, где $c \neq 0$, в терминах тензора кривизны.

Теорема 3 ([40]). Пусть M_m — подмногообразие в комплексной пространственной форме $M(c)$, где $c \neq 0$. Тогда M_m есть CR-подмногообразие пространства M_n, если и только если максимальное голоморфное подпространство $D_x = T_x(M_m) \cap \cap JT_x(M_m)$ определяет нетривиальное дифференцируемое распределение D на M_m такое, что

$$G(\bar{R}(X, Y), Z, W)=0$$

для всех $X, Y \in D$ и $Z, W \in D^{\perp}$, где $D^{\perp}$ — ортогональное дополнение распределения D в M_m и $\bar{R}$ — тензор кривизны пространства $M_n(c)$.

Приведено доказательство.

Эрмитово многообразие M_n, в котором выполнено условие $d\Omega = \Omega \wedge \omega$, где Ω — фундаментальная 2-форма $\Omega(X, Y) = G(Q, JY)$, келерово тогда и только тогда, когда $d\Omega = 0$ [40].

Теорема 4 ([40]). Для того чтобы подмногообразие M_m в эрмитовом многообразии, в котором выполняется равенство $d\Omega = \Omega \wedge \omega$, было CR-подмногообразием, необходимо, чтобы распределение $D^{\perp}$ было интегрируемым.

Отправляясь от того, что собственно CR-подмногообразие M_m коразмерности 2 почти эрмитова многообразия M_n, оснащенное полем ортогональных нормалей, допускает $(fguv0)$-структуру, автор работы [64] формулирует следующую теорему.

Теорема 5 ([64]). Всякое подмногообразие коразмерности 2, несущее $(fguv0)$-структуру, несет естественно определенную на нем структуру CR-подмногообразия.

Теорема 6 ([55]). Пусть M_m — многообразие $(fgD^2\lambda)$-структуры в почти эрмитовом многообразии. M_m является CR-подмногообразием тогда и только тогда, когда функция λ тождественно равна нулю.

(Структура $(fgD^2\lambda)$ названа метрической составной структурой, она эквивалентна $(fguv\lambda)$-структуре.)

2. В проблеме установления необходимых и достаточных условий, определяющих CR-подмногообразие M_m в многообразии (почти) комплексной структуры M_n, равно как и в самом определении CR-структуры, имеет место некоторое «стеснение» широты понятия, если речь идет о (почти) эрмитовом многообразии, а также различных его подклассах.

Известна (см. [1], [13])

Основная теорема. На поверхности M_m, погруженной в многообразии M_n почти комплексной структуры, оснащенной нормально оснащающим полем N $(n-m)$-мерных нормалей, в общем случае естественно возникает $(f\xi\eta\rho)$-структура ранга m и коранга $n-m$.

Предположение, что $n-m<m$, которое в [1] имелось в виду, может быть снято и восполнено требованием, чтобы голоморфное касательное подпространство было нетривиальным (см. § 4). В этом случае любое нормальное оснащающее поле индуцирует на M_m $(f\xi\eta\rho)$-структуру соответствующего ранга и коранга. Известно также [10], что дополнительно нормально оснащенная f-структура это подкласс $(f\xi\eta\rho)$-структуры, выделяемый инвариантным требованием $\varepsilon=0$ или требованием надлежащего понижения ранга матрицы компонент аффинора ρ.

Геометрическая интерпретация этого факта состоит в том, что в каждой точке $x\in M_m$ нормальное пространство $N_x(M_m)$ пересекает образ касательного пространства по подпространству соответствующей размерности ([10]).

Если на многообразии M_n задано поле метрического тензора G, согласованного с почти комплексной структурой, то поле ортогональных нормалей $T^\perp(M_m)$ подмногообразия M_m определяется естественным образом однозначно и на подмногообразии M_m, при условии, что голоморфное касательное пространство нетривиальное, и дополнительном требовании, что $T_x^\perp(M_m)$ пересекает $JT_x(M_m)$ по подпространству максимально возможной размерности, естественным образом возникает метрическая f-структура [2].

На основании теоремы В на M_m определяется CR-структура. Обратно, при том же условии нетривиальности голоморфного распределения D на M_m в каждой точке $x\in M_m$ в $T_x(M_m)$ однозначно определяется ортогональное дополнение $D_x^\perp$ подпространства D_x и ортогональная нормаль $T_x^\perp(M_m)$.

Если образ $JD_x^\perp$ подпространства $D_x^\perp$ принадлежит ортогональной нормали $T_x(M_m)^\perp$ касательного пространства, то на M_m определяется CR-структура.

Итак, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема. Пусть M_m — подмногообразие почти эрмитова многообразия. Для того, чтобы M_m было CR-подмногообразием необходимо и достаточно, чтобы на M_m существовало поле нетривиальных голоморфных касательных подпространств размерности p и $\dim T_x^\perp(M_m) \cap JT_x(M_m) = m - p - q$.

Эта теорема открывает путь к введению понятия CR-подмногообразия в неметрическом почти комплексном многообразии (см. § 4).

§ 2. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ D И $D^\perp$ В КЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В этом параграфе мы будем считать, что M_n — келерово многообразие. Поэтому в дополнение к предпосылкам (*) (см. § 1, стр. 66) будем иметь в виду, что

(**) выполняются равенства:

$$\tilde{\nabla} J = 0.$$

1. Условия интегрируемости.

1. Пусть на подмногообразии M_m дифференцируемого многообразия M_n задано распределение λ с r-мерными ($r < m$) элементами, определенное полем объекта $\{\bar{\lambda}_\sigma^I\}$. Это означает [8], что функции $\bar{\lambda}_\sigma^I$ определяют на M_m поле геометрического объекта:

$$d\bar{\lambda}_\sigma^I + \bar{\lambda}_\sigma^L \omega_L^I - \bar{\lambda}_\rho^I \vartheta_\sigma^\rho = \bar{\lambda}_{\sigma k}^i \theta^k. \tag{1}$$

Распределение λ называется интегрируемым или инволютивным, если оно допускает интегральные многообразия максимальной размерности (т. е. в данном случае, размерности r). Эти многообразия получили в последние годы название листов распределения. Как известно, для этого необходимо и достаточно, чтобы система

$$\omega^I = \lambda_k^I \theta^k, \quad \theta^k = \lambda_\sigma^k \vartheta^\sigma, \tag{2}$$

где

$$\Lambda_k^I \lambda_\sigma^k \overset{\text{def}}{=} \bar{\lambda}_\sigma^I,$$

была вполне интегрируемой. Первая подсистема определяет подмногообразие M_m и, следовательно, она вполне интегрируема.

Дифференцируя внешним образом вторую подсистему, получим с учетом самой системы:

$$(d\lambda_\sigma^i-\lambda_\rho^i\vartheta_\sigma^\rho+\lambda_\sigma^k\theta_k^i)\wedge\vartheta^\sigma=0.$$

Так как $\{\lambda_\sigma^i\}$ определяет поле на подмногообразии M_m, то:

$$d\lambda_\sigma^i-\lambda_\rho^i\vartheta_\sigma^\rho+\lambda_\sigma^k\theta_k^i=\lambda_{\sigma k}^i\lambda_\rho^k\vartheta^\rho.$$

Следовательно, $\lambda_{\sigma k}^i\lambda_\rho^k\vartheta^\rho\lambda\vartheta^\sigma=0$ и условие полной интегрируемости системы (2) имеет вид:

$$\lambda_{\sigma k}^i\lambda_\rho^k-\lambda_{\rho k}^i\lambda_\sigma^k=0. \tag{3}$$

Если в $T_x(M_m)$ введена индуцированная связность $\overset{\circ}{\gamma}$, то она индуцирует в распределении $\{\lambda_\sigma\}$ связность j с компонентами $\{j_{\sigma k}^\rho\}$.

Уравнения поля объекта λ_σ^k можно переписать при этом относительно форм связности $\tilde\vartheta_\sigma^\rho=\vartheta_\sigma^\rho-j_{\sigma k}^\rho\theta^k$, $\tilde\theta_k^l=\theta_k^l-\overset{\circ}{\gamma}{}_{kl}^l\theta^l$:

$$d\lambda_\sigma^i-\lambda_\rho^i\tilde\vartheta_\sigma^\rho+\lambda_\sigma^k\tilde\theta_k^i=\tilde\lambda_{\sigma k}^i\lambda_\rho^k\vartheta^\rho,$$

где

$$\tilde\lambda_{\sigma k}^i=\lambda_{\sigma k}^i+\lambda_\rho^i\overset{\circ}{j}{}_{\sigma k}^\rho-\lambda_\sigma^l\overset{\circ}{\gamma}{}_{lk}^i.$$

При этом равенства (3) мы можем записать в терминах ковариантных производных компонент $\lambda_{\sigma k}^i$ объекта $\{\lambda_\sigma^i, \lambda_{\sigma k}^i\}$:

$$\tilde\lambda_{\sigma k}^i\lambda_\rho^k-\tilde\lambda_{\rho k}^i\lambda_\sigma^k=0. \tag{3'}$$

Заметим, что векторы

$$\lambda_\sigma=\lambda_\sigma^i\Lambda_i=\lambda_\sigma^i\Lambda_i^K e_K\overset{\mathrm{def}}{=}\bar\lambda_\sigma^K e_K$$

образуют в элементах λ репер.

Рассмотрим векторы

$$(\tilde\lambda_{\sigma k}^i\lambda_\rho^k)\,\Lambda_i=\tilde\lambda_{\sigma k}^i\lambda_\rho^k(\overset{*}{\lambda}{}_i^\tau\lambda_\tau+\overset{*}{\lambda}{}_i^\mathfrak{v}\lambda_\mathfrak{v}), \tag{4}$$

где $\lambda_\mathfrak{v}=\lambda_\mathfrak{v}^i\Lambda_i$ — векторы, натягивающие ортогональное дополнение к λ_σ в $T_x(M_m)$. Векторы λ_φ и $\lambda_\mathfrak{v}$ в каждой точке $x\in M_m$ образуют две подсистемы линейно независимых векторов. Компоненту по векторам $\lambda_\mathfrak{v}$ в разложении (4) обозначим:

$$\overset{*}{\lambda}{}_i^\mathfrak{v}\tilde\lambda_{\sigma k}^i\lambda_\rho^k\overset{\mathrm{def}}{=}h_{\sigma\rho}^\mathfrak{v}. \tag{5}$$

$h_{\sigma\rho}^\mathfrak{v}$ есть второй фундаментальный тензор распределения λ (см. (1)). Если $h_{\sigma\rho}^\mathfrak{v}$ симметричен, то (3′) выполняется тождественно (т. е. выполняются условия теоремы Фробениуса об интегрируемости распределения).

Условия инволютивности распределения λ в терминах второй фундаментальной формы этого распределения формулируются следующим образом [46]:

Распределение λ интегрируемо, если и только если h симметрично на $\lambda\times\lambda$.

2. Далее мы приведем необходимые и достаточные условия интегрируемости вполне вещественного (или вертикального) распределения $D^{\perp}$ CR-подмногообразия в келеровом многообразии.

Эти условия формулируются в разных терминах, в том числе и как непосредственно следующие из аналогичных условий для эрмитова многообразия с учетом выполнения предпосылок (**) (см. стр. 77).

Примечание. Из п. 5, § 1 следует, что голоморфное распределение D определяется полем объекта $\{\eta_i^{\alpha_1}\}$, а вещественное распределение $D^{\perp}$—полем объекта $\{\xi_{\alpha_1}^i\}$. Поэтому условиями инволютивности распределений D и $D^{\perp}$ являются условия инволютивности распределений η^{α_1} и ξ_{α_1}. В то же время условия распределений D и $D^{\perp}$ могут быть сформулированы в терминах условий интегрируемости f-структуры, индуцированной на M_m полем ортогональных нормалей $T^{\perp}(M_m)$ и условий инволютивности распределений L и M, порождаемых проекторами l и m соответственно (см. § 1, п. 2).

В комплексном многообразии тензор Нейенхейса

$$N(J)\equiv 0.$$

На CR-подмногообразии M_m существует поле тензора $N(F)$ (называемого тензором Нейенхейса индуцированной f-структуры F). Его компоненты относительно репера $\{e_I\}$ определяются следующими формулами

$$N_{KL}^J(F)=F_K^M(F_{LM}^J-F_{ML}^J)-F_L^M(F_{KM}^J-F_{MK}^J),$$

где F — аффинор индуцированной на M_m f-структуры (см. § 1, (29)).

Известно, что со структурными объектами f-структуры и объектами, полученными их продолжением, ассоциируются пять тензоров типа (1.2), часто называемых S-тензорами f-структуры (см. [67], [54]), а также тензор L, известный под названием тензора Леви.

Первый из тензоров S имеет следующее строение:

$$S_{jk}^i=N_{jk}^i(F)+(\eta_i^{\alpha}\xi_{\alpha k}^i-\eta_k^{\alpha}\xi_{\alpha j}^i). \qquad (6)$$

Подмногообразие M_m в комплексном многообразии M_n такое, что $H_x(M_m)\overset{\text{def}}{=}T_x(M_m)\cap JT_x(M_m)\neq\{0\}$ и касательная плоскость $T_x(M_n)$ есть прямая сумма голоморфного расщирения касательной плоскости $T_x(M_m)$ и некоторого голоморфного подпространства $\overline{N}_x$, называется f-поверхностью.

Известно [67], что для f-поверхности в комплексном пространстве $S^i_{jk}\equiv 0$.

Для эрмитовых многообразий Бежанку устанавливает условия интегрируемости распределения $D^{\perp}$ следующей теоремой.

Теорема 1 ([27]). Необходимым и достаточным условием интегрируемости распределения $D^{\perp}$ является выполнение равенства

$$N_F(X, Y)=0 \text{ для всех } X,\ Y\in D^{\perp},$$

где N_F — тензор Нейенхейса аффинора F f-структуры

Распределение $D^{\perp}$ в каждой точке $x\in M_m$ определяется векторами $D_u=D^l_u\Lambda_l$ и структурным объектом распределения $D^{\perp}$ является объект $\{D^i_u\}$. Так как $(JN_{\alpha_1})=D^{\perp}$, то $D^i_u=-\xi^i_{m+u}$ $(\alpha_1\overset{\text{def}}{=}m+u)$ и, следовательно, необходимые и достаточные условия интегрируемости $D^{\perp}$, как это следует из (3), с учетом соотношения

$$\eta^{\alpha_1}_j=g^{\alpha_1\beta_1}g_{jk}\xi^k_{\beta_1}$$

и равенств

$$\eta^{\alpha_2}_k=0, \quad \xi^i_{\alpha_2}=0$$

имеют вид

$$\xi^j_{\beta_1}\tilde{\xi}^i_{\alpha_1 j}-\xi^j_{\alpha_1}\tilde{\xi}^i_{\beta_1 j}=0.$$

Из (6), при $S^i_{jk}=0$, следует

$$N^i_{jk}(F)+\eta^{\alpha_1}_j\tilde{\xi}^i_{\alpha_1 k}-\eta^{\alpha_1}_k\tilde{\xi}^i_{\alpha_1 j}=0. \tag{7}$$

Если $N^i_{jk}x^jy^k=0$ для всех X, $Y\in D^{\perp}$, то

$$\eta^{\alpha_1}_j\tilde{\xi}^i_{\alpha_1 k}-\eta^{\alpha_1}_k\tilde{\xi}^i_{\alpha_1 j}=0, \tag{8}$$

это равенство эквивалентно

$$(g_{jl}\tilde{\xi}^l_{\beta_1}\xi^i_{\alpha_1 k}-g_{kl}\xi^l_{\alpha_1}\tilde{\xi}^i_{\beta_1 j})=0.$$

Свернув с g^{jk}, получим

$$\xi^k_{\beta_1}\tilde{\xi}^i_{\alpha_1 k}-\xi^j_{\alpha_1}\tilde{\xi}^i_{\beta_1 j}=0.$$

Последнее равенство выражает необходимое и достаточное условие интегрируемости распределения $D^{\perp}$. Обратное очевидно.

Следует заметить, что, в силу соотношений (33), § 1: $Fm=0$ в келеровом пространстве

$$N^i_{jk}(F)\,m^j_l x^l m^k_\rho y^\rho=0. \tag{9}$$

Итак, приходим к следующей теореме.

Теорема 2 ([44]). Вполне вещественное распределение CR-подмногообразия в келеровом многообразии вполне интегрируемо.

Замечание. Эта теорема, вследствие того, что для келеровых многообразий форма $d\Omega=0$, получается [40] из теоремы 4 (см. § 1).

Из теоремы 2 следует, что CR-подмногообразие в келеровом многообразии несет p-параметрическое семейство $q=(m-p)$-мерных антиинвариантных подмногообразий. Эти подмногообразия названы листами распределения $D^{\perp}$.

3. Необходимые и достаточные условия интегрируемости распределения D формулируются в виде ряда эквивалентных требований [27].

Для того чтобы D было инволютивным распределением на M_m, необходимо и достаточно, чтобы система:

$$\eta_i^{\alpha_1}\theta^i=0 \quad \text{при} \quad \theta^i=D_a^i\vartheta^a$$

была вполне интегрируема, т. е. чтобы

$$\eta_{ik}^{\alpha_1}\theta^k\wedge\theta^i=\eta_{ik}^{\alpha_1}D_a^iD_b^k\vartheta^a\wedge\vartheta^b=0.$$

Отсюда следует условие:

$$(\eta_{ik}^{\alpha_1}-\eta_{ki}^{\alpha_1})D_a^iD_b^k=0. \qquad (10)$$

Иначе говоря, необходимым условием инволютивности распределения D является выполнение равенств

$$(\eta_{ik}^{\alpha_1}-\eta_{ki}^{\alpha_1})x^iy^k=0 \qquad (11)$$

для всех X, $Y\in D$.

Это условие является и достаточным.

Необходимое и достаточное условие инволютивности распределения D может быть также сформулировано как требование, чтобы для $\{D_a^i\}$ удовлетворялись соотношения вида (3):

$$\tilde{D}_{ak}^iD_b^k-\tilde{D}_{bk}^iD_a^k=0. \qquad (12)$$

Другой тип условий инволютивности горизонтального (т. е. голоморфного) распределения D формулируется в терминах второй фундаментальной формы подмногообразия M_m. Это наиболее широко принятый критерий установления инволютивности распределения (см. [38], [26], [40], [33], [39], [66], [62], [44]).

Теорема 3. Горизонтальное распределение D CR-подмногообразия M_m инволютивно, если и только если вторая фундаментальная форма B удовлетворяет условию

$$B(X, JY) = B(JX, Y) \tag{13}$$

для всех $X, Y \in D$ (см. (15), § 1).

Доказательство дано Бежанку [28] для приблизительно келеровых многообразий и почти эрмитовых многообразий, а также Урбано [66] и Сато [62]. Оно приведено и в [26], [40].

Установлены также условия инволютивности голоморфного распределения в терминах тензора Нейенхейса аффиноров и J, F, а также проектирующего аффинора m.

Теорема 4 ([27]). Необходимым и достаточным условием инволютивности голоморфного распределения D является выполнение одного из следующих условий

1. $tN_J(X, Y) = N_F(X, Y)$,

2. $t^{\perp}N_J(X, Y) = E([JX, Y] + [X, JY])$,

3. $t^{\perp}N_y(X, Y) = 0, \quad mN_F(X, Y) = 0$,

для всех $X, Y \in D$.

Здесь t означает тангенциальную, а $t^{\perp}$ — нормальную компоненту $N_J(X, Y)$.

2. Свойства распределений D и $D^{\perp}$.

Определение 1. Вполне вещественное распределение $D^{\perp}$ называется D-параллельным на M_m, если для всех $X \in D$ и $Y \in D^{\perp}$ выполняется условие

$$\tilde{\nabla}_X Y \in D^{\perp},$$

где $\tilde{\nabla}$ — риманова связность на M_m.

В келеровом многообразии справедливы следующие утверждения.

Лемма 1 ([36]). Вещественное распределение $D^{\perp}$ CR-подмногообразия D-параллельно, если и только если $G(B(X, X), JZ) = 0$ для $X, Y \in (D)$, $Z \in (D^{\perp})$.

Теорема 5 ([44], [40]). Голоморфное распределение интегрируемо тогда и только тогда, когда

$$G((B(X, JY), JZ) = G(B(JX, Y), JZ)$$

для всех X, Y из D и Z из $D^{\perp}$.

Лемма 2 ([44], [36]). Если выполнено условие

$$G(B(D, D^{\perp}), \quad J(D^{\perp})) = 0$$

и D интегрируемо, то для всех X из D и V из $JD^{\perp}$ имеем

$$A_V JX = -JA_V X.$$

Лемма 3 ([36], [46]). Если вполне вещественное распределение D параллельно, то голоморфное распределение D инволютивно.

Определение 2. Распределение λ:

— минимально, если вектор средней кривизны $\overset{\circ}{h}$:

$$\overset{\circ}{h}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} h(X_i, X_i)$$

равен нулю тождественно;

— вполне геодезическое, если $h\equiv 0$, где h — второй фундаментальный тензор распределения λ (см. (5)).

Чен [46] доказывает следующее предположение.

Теорема 6. Пусть M_m — CR-подмногообразие келерова многообразия. Тогда: 1) голоморфное распределение D минимально, и 2) распределение D вполне геодезическое, если и только если D интегрируемо и его листы вполне геодезические в M_n.

3. **Свойства листов распределений D и $D^\perp$.** Как было указано выше, вполне вещественное распределение CR-подмногообразия M_m келерова многообразия M_n инволютивно. Следовательно, распределение $D^\perp$ расслаивается на p-параметрическое семейство q-мерных элементов, огибаемых q-мерными листами. При выполнении надлежащих условий голоморфное распределение также может оказаться инволютивным (см. п. 2). Таким образом, для CR-подмногообразий может идти речь о вполне вещественных и о голоморфных листах.

Введем для них обозначения $L^\perp$ и L, соответственно.

Одной из тем при исследовании CR-подмногообразий является изучение свойств этих двух разновидностей листов.

Приведем некоторые предложения, указывающие на свойства листов $L^\perp$ и L.

Лемма 4 ([44]). В келеровом многообразии M_n лист распределения $D^\perp$ вполне геодезический в M_m, если и только если

$$G(B(D, D^\perp), JD^\perp)=0.$$

Это же утверждение справедливо для приблизительно келерова многообразия при дополнительном требовании интегрируемости распределения $D^\perp$ ([63], [62]).

Лемма 5 ([39], [31]). Лист $L^\perp$ вполне вещественого распределения $D^\perp$ CR-подмногообразия M_m келерова многообразия M_n — вполне геодезически погружен в M_m, если и только если:

1. $B(D, D^\perp)\in N_2$, где $(N_2)_x$ — ортогональное дополнение подпространства $JD_x^\perp$ в $T_x^\perp(M_m)$; либо

2. $\overset{*}{\nabla}_x JY\subset JD^\perp$, где $\overset{*}{\nabla}$ — символ ковариантного дифференцирования в связности $\overset{*}{\gamma}$, индуцированной в $T^\perp(M_m)$.

Лемма 6 ([39]. Необходимым и достаточным условием того, чтобы подмногообразие $L^\perp$ было вполне геодезически погружено в M_m, является выполнение соотношения $B(X, Y)\in$

$\in PT^{\perp}(M_m)$ для всех $X\in D^{\perp}$ и $Y\in D$. (P — аффинор f-структуры в нормальном расслоении).

Доказательство приведено в [39].

Определение 3. CR-подмногообразие M_m называется D-геодезическим (соответственно $D^{\perp}$-геодезическим), если его вторая квадратичная форма удовлетворяет соотношениям

$B(D, D)=\{0\}$ (соответственно $B(D^{\perp}, D^{\perp})=\{0\}$).

Лемма 7 ([44]). Лист $L^{\perp}$ вполне вещественного распределения $D^{\perp}$ вполне геодезически погружен в келерово многообразие M_n, если и только если M_m есть $D^{\perp}$-геодезическое и $B(D, D^{\perp})\subset N_2$.

Теорема 7 ([46], [44], [69]). Пусть M_m — CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Тогда

1) Распределение D интегрируемо и его листы вполне геодезически погружены в M_m, если и только если $B(D, D)\subset N_2$, где N_2 — ортогональное дополнение $JD^{\perp}$ в $T^{\perp}(M_m)$.

2) Распределение D интегрируемо и листы вполне геодезически погружены в M_n, если и только если M_m есть D-геодезическое, т. е. $B(D, D)=\{0\}$.

Доказательство приведено в [46].

П.1 теоремы формулируется и следующим образом

Лемма 8 ([46], [44]). Пусть M_m — CR-подмногообразие в келеровом многообразии M_n. Тогда голоморфное распределение интегрируемо, и его листы вполне геодезически погружены в M_m, если и только если $G(B(D, D), JD^{\perp})=\{0\}$.

Приведем также одну теорему, касающуюся листов распределения $D^{\perp}$.

Лемма 9 ([46]). Пусть M_m — CR-подмногообразие келерова многообразия M_n.

a) Если листы распределения $D^{\perp}$ вполне геодезические в M_n, то

$$B(D^{\perp}, D^{\perp})=\{0\},\ G(B(D, D^{\perp}),\ JD^{\perp})=\{0\},$$

$$\tilde{H}_B(X, Z)=2\|B(X, Z)\|^2+2G(A_{JZ}JX, JA_{JZ}X)$$

для всех единичных векторов X из D и Z из $D^{\perp}$, где $\tilde{H}_B$ — голоморфная кривизна сечения в двумерном направлении многообразия M_n.

b) Если a) выполнено, то листы распределения $D^{\perp}$ вполне геодезические в M_n.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ CR-ПОДМНОГООБРАЗИЙ В КЕЛЕРОВОМ МНОГООБРАЗИИ

В настоящем параграфе будут рассмотрены некоторые классы CR-подмногообразий M_m, выделяемые как определенными свойствами самого M_m непосредственно, так и некоторыми свойствами интегральных многообразий максимальной размерности (листами) распределений D и $D^{\perp}$ в случаях, когда эти распределения инволютивны.

Напомним некоторые хорошо известные понятия, к которым мы будем часто прибегать в настоящем параграфе.

— Вторая фундаментальная форма B подмногообразия M_m в многообразии M_n называется параллельной на M_m, если $\nabla_X B=0$ для всех $X \in T(M_m)$.

— Вектор средней кривизны μ подмногообразия M_m определяется формулой $\mu=\frac{1}{n}$ Tr B, где Tr B —след B.

— Если $B \equiv 0$, то M_m называется вполне геодезическим подмногообразием.

— Если $\mu=0$, то M_m называется минимальным подмногообразием.

— Если вторая квадратичная форма удовлетворяет равенству

$$B(X, Y)=G(X, Y)\mu$$

для всех $X, Y \in T(M_m)$, то M_m называется вполне омбилическим.

1. Вполне геодезические CR-подмногообразия. Пусть M_m — вполне геодезическое CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Из теорем 3 или 4, § 2, следует, что распределение D инволютивно. Пусть L — лист распределения D. Из теоремы 2, § 2, следует, что распределение $D^{\perp}$ также инволютивно. Его лист обозначим $L^{\perp}$.

Установлено [40], что L и $L^{\perp}$ вполне геодезические в M_m.

Теорема 1 ([40], [34]). Каждое вполне геодезическое CR-подмногообразие келерова многообразия есть риманово прямое произведение келерова подмногообразия и вполне вещественного подмногообразия.

Доказательство приведено в [40].

2. Смешанно вполне геодезические и $D^{\perp}$- (или D-) вполне геодезические CR-подмногообразия.

Определение 1 ([31]). CR-подмногообразие келерова многообразия называется:

1) Смешанно вполне геодезическим, если для его второй фундаментальной формы выполняется условие $B(X, Y)=0$ для всех $X \in D$ и $Y \in D^{\perp}$.

2) $D^{\perp}$- (или D-) вполне геодезическим, если $B(X, Y)=0$ для всех X, $Y \in D^{\perp}$ (соответственно $\in D$).

Исследования CR-подмногообразий смешанно вполне геодезических в основном принадлежат Бежанку [29], [31], [34], [33], [39].

Приведем ряд утверждений, устанавливающих важные свойства смешанно вполне геодезических CR-подмногообразий.

Лемма 1 ([34], [39]). Пусть M_m — смешанно вполне геодезическое CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Тогда каждый лист вполне вещественного распределения вполне геодезически погружен в M_m.

Теорема 2 ([31]). Пусть M_m — смешанно вполне геодезическое CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Тогда

1) Каждый лист вещественного распределения $D^{\perp}$ вполне геодезически погружен в M_m.

2) Каждый лист вещественного распределения $D^{\perp}$ вполне геодезически погружен в келерово многообразие M_n тогда и только тогда, когда M_m есть $D^{\perp}$-вполне геодезическое подмногообразие.

Для смешанно вполне геодезического CR-подмногообразия келерова многообразия M_n справедливы следующие утверждения

1) ([33]). M_m является слоеным тогда и только тогда, когда выполняются следующие соотношения:

$$A_V F + F A_V = 0, \text{ где } V \in T^{\perp}(M_m).$$

(A определен в (16), § 1, F — структурный аффинор индуцированной на M_m f-структуры).

2) [29]. Нормальное сечение $V \in JD^{\perp}$ параллельно, если и только если $\nabla_X JV \in D$ для всех $X \in D$.

Лемма 2 ([34], [29]). Пусть M_m — смешанно вполне геодезическое CR-подмногообразие келерова многообразия. Тогда имеем:

$$A_{JV} X = J A_V X \text{ для всех } X \in D \text{ и } V \in N_2$$

(здесь N_2 — подрасслоение нормально оснащающего расслоения $N(M_m)$, причем $N(M_m) = JD^{\perp} \odot N_2$ и $JD^{\perp} \perp N_2$).

В качестве следствия получаем [29]:

$$J \overset{*}{\nabla}_X V = \overset{*}{\nabla}_X JV \text{ и } \overset{*}{\nabla}_X V \in N_2$$

для всех $X \in D$ и $V \in N_2$.

В работе [33] Бежанку изучает специальный класс смешанно вполне геодезических CR-подмногообразий M_m, характеризуемый тем, что элементы вполне вещественного распределения $D^{\perp}$ подмногообразия M_m одномерны.

Отмечается, что геометрия такого CR-подмногообразия во многом схожа с геометрией гиперповерхности.

Изучая связность в нормальном расслоении CR-подмногообразия, Бежанку [29] вводит понятие нормальной связности (D, N_2)-плоской, характеризующейся тем, что тензор кривизны $R^{\perp}$ нормальной связности обладает следующим свойством:

$$R^{\perp}(X, Y) V = [\overset{*}{\nabla}_X, \overset{*}{\nabla}_Y](V) - \overset{*}{\nabla}_{g[X,Y]} V = 0$$

для всех $X, Y \in D$ и $V \in N_2$.

Теорема 3 ([29]). Пусть M_m — смешанно вполне геодезическое слоеное CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Нормальная связность $\overset{*}{\nabla}$ есть (D, N_2)-плоская тогда и только тогда, когда локально существуют $2s$ полей взаимно ортогональных единичных нормальных векторов $N_{\alpha_2} \in N_2$ таких, что каждый из векторов N_{α_2} D-параллелен в нормальном подрасслоении N_2.

Эта теорема устанавливает связь между свойствами (D, N_2)-плоскостности нормальной связности и существованием D-параллельных нормальных сечений в N_2.

Для родовых CR-подмногообразий M_m (т. е. $codM_m = dim D_x^{\perp}$) в келеровом многообразии M_n имеют место следующие теоремы.

Теорема 4 ([31]). Родовое CR-подмногообразие M_m келерова многообразия есть смешанно вполне геодезическое тогда и только тогда, когда каждый лист вполне вещественного распределения вполне геодезически погружен в M_m.

Теорема 5 ([31]). Пусть M_m — родовое CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Тогда каждый лист вполне вещественного распределения геодезически погружен в M_n тогда и только тогда, когда M_m есть смешанно вполне геодезическое и D-вполне геодезическое подмногообразие.

Необходимые и достаточные условия того, что CR-подмногообразие является смешанно вполне геодезическим формулируются в виде следующей леммы.

Лемма 3 ([33], [29], [39]). Пусть M_m — CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Тогда M_m есть смешанно вполне геодезическое, если и только если выполняется одно из двух условий:

1) $A_V X \in D$ для всех $X \in D$ и $V \in T^{\perp}(M_m)$;

2) $A_V X \in D$ для всех $Y \in D^{\perp}$ и $V \in T^{\perp}(M_m)$.

Доказательство условия 1 приведено в [29].

Лемма 4. Пусть M_m — D-вполне геодезическое CR-подмногообразие в келеровом многообразии M_n. Тогда каждый лист голоморфного распределения есть вполне геодезическое голоморфное подмногообразие многообразия M_n [34].

Голоморфной секционной кривизной $H(X)$ CR-подмногообразия M_m, определенной вектором $X \in D$, называется секционная кривизна многообразия M_m в двумерном направлении, определенном парой векторов $\{X, JX\}$ ([26]).

Теорема 6 ([26]). CR-подмногообразие M_m келерова многообразия $M_n(c)$ постоянной кривизны c есть D-вполне геодезическое, если и только если выполнены следующие условия:

1) голоморфное распределение инволютивно;

2) $H(X) = c$ для всех $X \in D$.

3. Слоеные и смешанно слоеные CR-подмногообразия.

Определение 2 ([33]). CR-подмногообразие M_m называется слоеным CR-подмногообразием, если его голоморфное распределение инволютивно.

Определение 3 ([33]). Смешанно слоеным CR-подмногообразием называется CR-подмногообразие, являющееся одновременно смешанно вполне геодезическим и слоеным.

Основные результаты, полученные в исследовании слоеных и смешанно слоеных CR-подмногообразий в келеровых многообразиях и в комплексной пространственной форме, принадлежат Бежанку ([28], [29], [33]).

Предложение ([29]). CR-подмногообразие келерова многообразия M_n есть слоеное CR-подмногообразие, если и только если вторая фундаментальная форма B удовлетворяет условию

$$B(X, JY) = B(JX, Y)$$

для всех $X, Y \in D$.

Лемма 5 ([29]). Пусть M_m — слоеное CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Если M_m — смешанно вполне геодезическое, то

$$JA_V X = -A_V JX$$

для всех $X \in D$ и $V \in T^{\perp}(M_m)$.

Доказательство приведено в [29].

Из определения смешанно слоеных CR-подмногообразий следует, что они характеризуются двумя условиями:

1) D интегрируемо; 2) $B(D, D^{\perp}) = 0$.

Лемма 6 ([44]). Пусть M_n — смешанно слоеное CR-подмногообразие в келеровом многообразии M_n. Тогда для любых единичных векторов $X \in D$ и $Z \in D^{\perp}$ имеем

$$\widetilde{H}_B(X, Z) = -2 \| A_{JZ} X \|^2,$$

где $\widetilde{H}_B(X, Z)$ — голоморфная кривизна многообразия M_n в двумерном направлении $X \wedge Z$.

Теорема 7 ([44]). Пусть M_n — келерово многообразие, у которого $\widetilde{H}_B > 0$. Тогда M_n не допускает смешанно слоеных собственно CR-подмногообразий.

Как следствие Бежанку, Яно и Кон получают аналогичный результат для комплексной пространственной формы $M_n(c)$, где $c > 0$ ([39]).

В работе [44] Чен исследует смешанно слоеные CR-подмногообразия в эрмитовых симметрических пространствах. В частности установлено, что всякое неприводимое компактного типа эрмитово симметрическое пространство не допускает смешанно слоеных собственно антиголоморфных подмногообразий.

В п. 2 введено понятие нормальной связности (D, N_2)-плоской.

Определение 4 ([29]). CR-подмногообразие M_m называется $D^{\perp}$-минимальным, если вторая фундаментальная форма B подмногообразия M_m удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{q}\{B.(E_u, E_u)\}=0,$$

где $\{E_u\}$ — поле локальных реперов в распределении $D^{\perp}$ и $q=\dim D_x^{\perp}$.

Определение 5 ([29]). CR-подмногообразие M_m называется D-минимальным, если вторая фундаментальная форма B подмногообразия M_m удовлетворяет условию

$$\sum_{a=1}^{p}\{B(E_a, E_a)\}=0,$$

где $\{E_a\}$ — поле локальных реперов в распределении D и $p=\dim_R D_x$.

Теорема 8 ([29]). Пусть M_m — смешанно слоеное CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Если нормальная связность есть (D, N_2)-плоская и M_m есть D-минимальное, то тензоры Риччи Ric и $\overline{Ric}$ подмногообразия M_m и многообразия M_n, соответственно, удовлетворяют условию

$$Ric(X, Y)=\overline{Ric}(X, Y)-$$
$$-\sum_{u=1}^{q}\{G(l\nabla_X E_u, l\nabla_Y E_u)+\overline{R}(JE_u, X; Y, JE_u)\}$$

для всех $X, Y\in D$ и всех локальных полей ортогональных реперов $\{E_u\}$ в вертикальном распределении $D^{\perp}$.

В качестве следствия из этой теоремы имеем [29]:

Пусть для M_m выполняется теорема 8.

Если выполнены условия:

1) вертикальное распределение $D^{\perp}$ параллельно вдоль горизонтального распределения,

2) тензор кривизны R удовлетворяет требованию $R(Z, X)Y\in D$ для всех $X, Y\in D$ и $Z\in D^{\perp}$,

то для тензоров Риччи Ric и $\overline{Ric}$ имеем:

$$Ric(X, Y)=\overline{Ric}(X, Y)$$

для всех $X, Y\in D$

4. Вполне омбилические и псевдоамбилические CR-подмногообразия. Как было указано выше, CR-подмногообразие M_m келерова многообразия M_n называется вполне омбилическим, если его вторая фундаментальная форма удовлетворяет условию

$$B(X, Y)=G(X, Y)H \text{ для всех } X, Y\in T(M_m),$$

где H — вектор средней кривизны M_m.

Если нормально оснащающее расслоение $T^{\perp}(M_m)$ CR-подмногообразия M_m допускает следующее разложение

$$T^{\perp}(M_m)=JD^{\perp}\oplus N_2,$$

то в этом случае N_2 есть голоморфное расслоение, т. е. расслоение, инвариантное относительно действия почти комплексной структуры J.

Введем в слоях распределения $D^{\perp}$ и подрасслоения N_2, соответственно, векторные реперы $\{E_u\}$: $E_u=E_u^I e_I$ $(u=1,\ldots,q)$ и

$$\{N_{\hat{\alpha}_2}, N_{\overline{\alpha}_2}=JN_{\hat{\alpha}_2}\}; \quad \hat{\alpha}_2=1,\ldots,s; \quad \overline{\alpha}_2=s+1,\ldots,2s.$$

При этом для второго фундаментального тензора A подмногообразия M_m можно ввести следующие обозначения

$$A_u=A_{JE_u}, \quad A_{\hat{\alpha}_2}=AN_{\alpha_2}, \quad A_{\overline{\alpha}_2}=A_{N\overline{\alpha}_2}.$$

Определение 6 ([34]). CR-подмногообразие M_m называется псевдоомбилическим, если второй фундаментальный тензор A подмногообразия M_m определяется следующим образом:

$$A_uX=a_uX+b_uG(X,E_u)E_u,$$

$$A_{\hat{\alpha}_2}X=a_{\hat{\alpha}_2}X+\sum_{u=1}^{q}b^u_{\hat{\alpha}_2}G(X,E_u)E_u,$$

$$A_{\overline{\alpha}_2}X=a_{\overline{\alpha}_2}X+\sum_{u=1}^{q}b^u_{\overline{\alpha}_2}G(X,E_u),$$

где a_u, b_u, $a_{\hat{\alpha}_2}$, $a_{\overline{\alpha}_2}$, $b^u_{\hat{\alpha}_2}$, $b^u_{\overline{\alpha}_2}$ — дифференцируемые функции на M_m и $X\in T(M_m)$.

Примечание. Определение псевдоомбилического подмногообразия в терминах второй квадратичной формы $B(X,Y)$ для родового подмногообразия келерова многообразия дано в [70]. В этой же работе Яно и Кон проводят исследование родовых псевдоомбилических многообразий. Напомним, что, по терминологии Яно, подмногообразие M_m в почти эрмитовом многообразии называется родовым, если

$$T_x(M_m)=H_x(M_m)\oplus JT_x^{\perp}(M_m),$$

где $H_x(M_m)$ — голоморфное подпространство касательного пространства $T_x(M_m)$.

1. Исследование вполне омбилических CR-подмногообразий в различных классах эрмитовых многообразий занимались Яно и Кон [70], Чен [44], Барруш и Урбано [25], Блэр [40], Бежанку [28], [34], [26] и др.

Бежанку устанавливает следующие важные свойства, характеризующие вполне омбилические CR-подмногоооразия.

Теорема 9 ([26]). Всякое вполне омбилическое CR-подмно гообразие, горизонтальное распределение которого инволютивно, есть вполне геодезическое.

Теорема 10 ([28]). Если M_m — вполне омбилическое CR-подмногообразие келерова многообразия M_n, $m+q=n$, $m\geqslant3$ (где $q=\dim D^{\perp}$) и горизонтальное распределение D параллельно, то M_m вполне геодезическое.

Теорема 11 ([34]). Пусть M_m — вполне омбилическое собственно CR-подмногооразие келерова многообразия M_n. Если $\dim D^{\perp}=q>1$, то M_m вполне геодезическое.

Доказательство приведено в [34].

В связи с этими теоремами, как указано в [34], доказаны следующие две теоремы.

Теорема 12 (Яно и Кон [70]). Пусть M_m — m-мерное родовое подмногообразие (т. е. такое, что $T_x(M_m)=H_x(M_m)\oplus\oplus JT_x{}^{\perp}(M_m)$) келерова многообразия M_n. Если $n-m>1$ и M_m вполне омбилическое, то M_m — вполне геодезическое.

Теорема 13 (Чен [45]). Всякое вполне омбилическое CR-подмногообразие коразмерности 2 келерова многообразия разия есть вполне геодезическое.

Теорема 14 (Барруш, Урбано; см. [68]). Пусть M_m — вполне омбилическое CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Если

a) голоморфное распределение параллельно,

b) f-структура P (см. теорему 2, § 1), определенная в нормальном расслоении, параллельна,

то M_n есть вполне геодезическое подмногообразие.

Лемма 7 ([40]). Если M_m — вполне омбилическое CR-подмногообразие келерова многообразия M_n, то либо вполне вещественное распределение $D^{\perp}$ одномерное, либо вектор средней кривизны H перпендикулярен $JD^{\perp}$.

Применяя лемму к антиголоморфным подмногообразиям, получаем теорему.

Теорема 15 ([40]). Если M_m — вполне омбилическое антиголоморфное подмногообразие келерова многообразия, то M_m либо вполне геодезическое, либо вполне вещественное подмногообразие.

Для CR-подмногообразий плоское сечение $X\wedge Z$, где $X\in D$ и $Z\in D^{\perp}$, называется CR-сечением. Секционная кривизна $K(\pi)$ CR-сечения π называется CR-секционной кривизной.

Теорема 16 ([40]). CR-секционная кривизна вполне омбилического CR-подмногообразия M_m келерова многообразия M_n равна нулю для всех CR-сечений, определенных векторами $X\in D$ и $Z\in D^{\perp}$.

Доказательство приведено в [40].

На основе теоремы 11, и используя теорему 2 и лемму 4, Бежанку доказывает следующую теорему разложения.

Теорема 17 ([34]). Пусть M_m — вполне омбилическое собственно CR-подмногообразие келерова многообразия M_n.

Если $\dim D_x^{\perp}=q>1$, то M_m локально есть риманово прямое произведение вида $M^{\top}\times M^{\perp}$, где $M^{\top}$ — вполне геодезическое голоморфное подмногообразие многообразия M_n комплексной размерности $p/2$, $M^{\perp}$ — q-мерное вполне вещественное подмногообразие многообразия M_n, вполне геодезически погруженное в M_n.

Для доказательства теоремы устанавливается, что структурные объекты F и ω, естественно возникающие на M_m дополнительно реперированной f-структуры (см. § 1, п. 5), параллельны на M_m и, затем, доказывается параллельность распределений D и $D^{\perp}$. Отсюда и следует, что M_m локально есть риманово прямое произведение $M^{\top}\times M^{\perp}$, где $M^{\top}$ — лист распределения D и $M^{\perp}$ — лист распределения $D^{\perp}$. Так как M_m — вполне геодезическое, то для него справедливы леммы 1, 4 и теорема 2. Последним шагом доказательства устанавливается, что подмногообразие $M^{\perp}$ вполне геодезически погружено в M_n и теорема полностью доказана.

Приведем еще одну теорему, которая, как считает ее автор [65], является обобщением известного утверждения, что всякая вещественная гиперповерхность келерова многообразия есть CR-подмногообразие.

Теорема 18 ([65]). Связное не вполне геодезическое вполне омбилическое собственно CR-подмногообразие размерности, превышающей 4, в келеровом многообразии допускает сасакиеву структуру.

В работе [65] приведено полное доказательство. Исходной точкой является справедливость теоремы 11.

В заключение сформулируем теорему, дающую классификацию вполне омбилических CR-подмногообразий келерова многообразия.

Теорема 19 ([49]). Пусть M_m ($\dim M_m\geqslant 5$) полное просто связное вполне омбилическое CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Тогда M_m есть подмногообразие одного из следующих типов:

1. Локально риманово произведение голоморфного и вполне вещественного подмногообразий келерова подмногообразия.
2. Вполне вещественное подмногообразие.
3. Многообразие, изометричное обычной сфере.
4. Многообразие, гомотетичное многообразию Сасаки.

Случаи 3 и 4 имеют место для нечетномерных M_m.

Полное доказательство приведено в [49].

В качестве следствия получается классификация вполне омбилических подмногообразий в комплексной пространственной форме $M_n(c)$.

2. Исследованием непосредственно псевдоомбилических CR-подмногообразий в келеровых многообразиях занимался в основном Бежанку. Основные результаты приведены в [34].

Лемма 8 ([34]). Каждое псевдоомбилическое CR-подмногообразие келерова многообразия есть смешанно вполне геодезическое подмногообразие.

Лемма 9 ([34]). Пусть M_m — псевдоомбилическое собственно CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Если $\dim D_x^{\perp} = q > 1$, то все функции a_u, $a_{\hat{\alpha}_2}$, $a_{\overline{\alpha}_2}$ обращаются в нуль тождественно (см. определение 6).

На базе этой леммы доказана следующая теорема.

Теорема 20 ([34]). Пусть M_m псевдоомбилическое собственно CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Если $q>1$, то вторая фундаментальная форма подмногообразия M_m коммутативна.

Лемма 10 ([34]). Пусть M_m — псевдоомбилическое собственно CR-подмногообразие келерова многообразия M_n такое, что $q>1$ и вторая фундаментальная форма параллельна. Тогда вторая фундаментальная форма каждого листа вполне вещественного распределения параллельна.

Теорема 21 ([34]). В келеровых многообразиях положительной (или отрицательной) кривизны не существует псевдоомбилических собственно CR-подмногообразий таких, что $q>1$.

Сохраним для ограничения векторных расслоений D, $D^{\perp}$ и N_2 на листе $M^{\perp}$ вполне вещественного расслоения те же обозначения. Нормально оснащающим расслоением многообразия $M^{\perp}$ является $K=D\oplus JD^{\perp}\oplus N_2$. Каждый вектор $Z\in K$ можно представить разложением

$$JZ=\alpha^{\perp}Z+\beta^{\perp}Z,$$

где $\alpha^{\perp}Z\in D^{\perp}$ и $\beta^{\perp}Z\in(D\oplus N)$. Оператор $\beta^{\perp}$ определяет f-структуру в расслоении K [68].

Теорема 22 ([34]). Пусть M_m — псевдоомбилическое собственно CR-подмногообразие келерова многообразия M_n такое, что $q>1$. Тогда следующие условия эквивалентны друг другу:

1) f-структура $\alpha^{\perp}$ параллельна на $T^{\perp}(M_m)$;

2) f-структура $\beta^{\perp}$ параллельна на K;

3) Все функции $b^{u}_{\hat{\alpha}_2}$, $b^{u}_{\overline{\alpha}_2}$ на M_m равны нулю тождественно.

Доказательство приведено в [34].

Теорема 23 ([34]). Пусть M_m — псевдоомбилическое собственно CR-подмногообразие келерова многообразия M_n. Если $q>1$, то M_m локально есть прямое произведение $M^{\top}\oplus M^{\perp}$, где $M^{\top}$ — вполне геодезическое голоморфное подмногоообразие многообразия M_n и $M^{\perp}$ — вполне вещественное подмногообразие M_m, которое вполне геодезически погружено в M_n.

Замечание. Лист подмногообразия $M^{\perp}$ не обязательно вполне геодезически погружается в M_n. Это происходит тогда и только тогда, когда само CR-подмногообразие M_m вполне геодезически погружено в M_n.

К настоящему параграфу следовало бы отнести и другие классы CR-подмногообразий такие, например, как нормальные CR-подмногообразия (см., например, [32], [39], [31]), косимплектические (см.. например, [37]), минимальные и D- (или $D^{\perp}$) минимальные [73], ряд других, на которых мы не имеем возможности остановиться.

§ 4. О РАСШИРЕНИИ ПОНЯТИЯ CR-ПОДМНОГООБРАЗИЯ В МНОГООБРАЗИЯХ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРЫ

1. Существование CR-структуры на подмногообразии M_m в почти комплексном пространстве $M_n(J)$ непосредственно связано с существованием на M_m нормально оснащенного поля $N(M_m)$. В (почти) эрмитовых многообразиях $M_n(J, G)$ вопрос оснащения подмногообразия M_m нормально оснащающим полем в явном виде и не встает, ибо наличие на M_n поля метрического тензора решает однозначно вопрос присоединения к M_m поля ортогональных нормалей $T^{\perp}(M_m)$. Что же касается многообразий M_n, не оснащенных полем метрического тензора (или, проще, неметрических многообразий), то задача построения внутренне присоединенного к подмногообразию M_m многообразия M_n нормально оснащающего поля является весьма сложной и, кроме того, требующей наличия на M_n поля объекта связности.

Для пространств аффинной связности, в том числе и с кручением, задача построения поля нормалей, внутренне присоединенного к подмногообразию, была решена Г. Ф. Лаптевым [4]. Она была решена также и для распределения линейных элементов и для поверхности в пространстве проективной связности [3], [5].

Таким образом, в многообразии $M_n(J)$ подмногообразие M_m должно быть оснащено нормально оснащающим полем. При заданной в нем некоторой связности Γ оно допускает построение такого поля, внутренне присоединенного к нему. Это обстоятельство дает возможность расширить понятие CR-структуры на M_m в $M_n(J)$ и ввести CR-структуру, ассоциированную к некоторому инвариантному относительно групповых преобразований нормально оснащающему полю $\nu(M_m)$ и, более того, ассоциированную полю пучков таких нормалей с общей осью надлежащей размерности, инвариантной относительно допустимых групповых преобразований. Такая структура названа нами CR-структурой, ассоциированной полю нормалей ν (пучков нормалей $\nu(\sigma)$) или CR_{ν}-структурой ($CR_{\nu(\sigma)}$-структурой).

2. В построении теории CR_{ν}-($CR_{\nu(\sigma)}$-) структур так же, как и в теории CR-структур, усматриваются два аспекта: изучение заданной на подмногообразии M_m в $M_x(J)$ CR_{ν}-($CR_{\nu(\sigma)}$-) структуры и изучение CR_{ν}-($CR_{\nu(\sigma)}$-) структуры, индуцированной на

подмногообразии M_m в $M_n(J)$ другими структурами, заданными на M_n [11].

Определение 1. π-структура, заданная на подмногообразии M_m многообразия почти комплексной структуры $M_n(J)$, оснащенном полем нормалей ν, парой распределений D и $\bar{D}$ таких, что в каждой точке $x \in M_m$: $D_x \subset T_x(M_m)$, $\bar{D}_x \subset T_x(M_m)$ и $JD_x = D_x$, $J\bar{D}_x \subset \nu$, называется CR-структурой, ассоциированной нормально оснащающему полю ν или CR_ν-структурой.

Из определения 1 следует, что $T_x(M_m) = D_x \oplus \bar{D}_x$; $\dim \bar{D}_x \leqslant \leqslant \operatorname{cod} M_m$; $\bar{D}_x \cap J\bar{D}_x = \{x\}$; D_x — голоморфное касательное подпространство касательного пространства.

Если $\dim \bar{D}_x = q = \operatorname{cod} M_m$, то $\nu_x \subset JT_x(M_m)$;

Если $\dim \bar{D}_x = q < \operatorname{cod} M_m$, то $\nu_x \cap JT_x(M_m) = J\bar{D}_x$. В этом случае в каждой точке $x \in M_m$ существует $(n-m-q)$-параметрический пучок нормально оснащающих подпространств $\nu_x(\sigma)$ с общей осью $J\bar{D}_x$, порождающих на M_m поле нормально оснащающих пучков $\nu(\sigma)$.

Определение 2. π-структура, заданная на подмногообразии M_m в многообразии почти комплексной структуры $M_n(J)$, оснащенном полем $(n-m-q) = \sigma$-параметрических пучков нормалей $\nu_x(\sigma)$ с общей q-мерной осью h_x, парой распределений D и $\bar{D}$ таких, что в каждой точке $x \in M_m$: $D_x \subset T_x(M_m)$, $\bar{D}_x \subset T_x(M_m)$, $\dim \bar{D}x = q$, $JD_x = D_x$, $J\bar{D}_x = JT_x(M_m) \cap \nu_x(\sigma) = h_x$, называется $CR_{\nu(\sigma)}$-структурой, ассоциированной полю $\nu(\sigma)$ нормально оснащающих σ-параметрических пучков нормалей.

Подмногообразие M_m в $M_n(J)$, оснащенное CR_ν-($CR_{\nu(\sigma)}$-) структурой, будем называть CR_ν-подмногообразием и соответственно, $CR_{\nu(\sigma)}$-подмногообразием.

Замечание 1. CR_ν-структура, введенная определением 1, является частным случаем $CR_{\nu(\sigma)}$-структуры, соответствующим ситуации, когда $n-m=q$. Подмногообразие M_m, оснащенное CR_ν-структурой, будем называть родовым CR_ν-подмногообразием.

Замечание 2. Из определения $CR_{\nu(\sigma)}$- (и, в частности, CR_ν-) структуры очевидно, что D_x есть максимальное в $T_x(M_m)$ голоморфное подпространство.

Очевидно, что $D_x = T_x(M_m) \cap JT_x(M_m)$.

Случаи: $\dim D_x = 0$ и $\dim D_x = m$ приводят лишь к тривиальной $CR_{\nu(\sigma)}$-структуре.

В соответствии с предложенными определениями CR_ν- и $CR_{\nu(\sigma)}$-структуры можно различать два случая: $\operatorname{cod} M_m = q = m - -\dim(T_x(M_m) \cap JT_x(M_m))$; $\operatorname{cod} M_m > q$.

3. Теорема 1 ([11]). Если подмногообразие M_m в многообразии почти комплексной структуры M_n снабжено CR_ν-струк-

турой, то на M_m естественно возникает дополнительно нормально оснащенная f-структура ранга p $(=\dim D_x)$.

Из компонент объектов $\{D_a^i\}$ и $\{D_u^i\}$, определяющих, соответственно, элементы распределений D и $\bar{D}$ и обращенных объектов $\{\overset{*}{D}{}_i^a\}$, $\{\overset{*}{D}{}_i^u\}$ строим следующие величины

$$f_k^i \overset{\text{def}}{=} D_a^i \overset{*}{D}{}_k^a; \quad \xi^i \overset{\text{def}}{=} D_{v=\beta-m}^i; \quad \eta_i^\alpha \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{D}{}_i^{u=\alpha-m}$$

(т. к. мы рассматриваем первый случай, то индексы пробегают следующие значения: $a=1,\ldots,p$, $u=p+1,\ldots,m$, $\alpha=m+1,\ldots$ $\ldots, m+q=n$).

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для f, ξ, η выполняются соотношения

$$f_k^i f_j^k = -\delta_j^i + \eta_j^\alpha \xi_\alpha^i; \quad f_k^i \xi_\alpha^k = 0, \quad f_j^i \eta_i^\alpha = 0$$

и, следовательно, $f^3+f=0$.

Очевидно, что объект, определяющий нормально оснащающее поле, эквивалентен объекту $\{J\xi_\alpha{}^i\}$.

Замечание. Теорема обобщается и на второй случай [11].

4. Если подмногообразие M_m в многообразии почти комплексной структуры $M_n(J)$ оснащено полем нормально оснащающих пространств ν, то на M_m естественно возникает $(f\xi\eta\rho)$-структура ([13]) в общем случае ранга m и коранга $(n-m)$.

Если в каждой точке $x \in M_m$ нормаль ν_x пересекает $JT_x(M_m)$ по k-мерному подпространству, то ранг (ρ) снижается на k единиц. В частности, если $k=n-m$, то $\rho\equiv 0$ и $\nu_x \in JT_x(M_m)$.

Если $k=m-p$, где $p \overset{\text{d}}{=} \dim (T_x\ (M_m) \cap JT_x(M_m))$, то ранг (ρ) понижается на $m-p$ единиц. Если при этом ранг $(k) \overset{\text{def}}{=}$ $\overset{\text{def}}{=}$ ранг $\|\xi_\rho \otimes \eta^\rho\| = m-p$, то $(f\xi\eta\rho)$-структура вырождается и порождает на M_m дополнительно нормально оснащенную f-структуру ранга p.

Структурные объекты $\overset{*}{f}$, $\overset{*}{\xi}$, $\overset{*}{\eta}$ этой f-структуры охвачены структурными объектами$(f\xi\eta\rho)$-структуры. Установлено, что η^* есть структурный объект распределения p-мерных голоморфных подпространств касательного расслоения $T(M_m)$, $\overset{*}{\xi}$ определяет на M_m распределение $m-p$ подпространств и в каждой точке $x \in M_m$ $T_x(M_m) =$ $= (\overset{*}{\eta})_x \oplus (\overset{*}{\xi})_x$ и $J(\overset{*}{\xi})_x \subset \nu_x$.

Из этого следует, что объекты $\overset{*}{\eta}$ и $\overset{*}{\xi}$ определяют на M_m-структуру, ассоциированную полю σ-параметрических пучков $(n-m)$-мерных нормально оснащающих пространств с общей $(m-p)$-мерной осью $(J\overset{*}{\xi})_x$.

Теорема 2 ([11]). На подмногообразии M_m в многообразии почти комплексной структуры $M_n(J)$, оснащенном полем

σ-параметрических пучков нормально оснащающих $(n-m)$-мерных пространств $\nu(\sigma)$ с общей $(m-p)$-мерной осью, естественно возникает $CR_{\nu(\sigma)}$-структура с голоморфным распределением p-мерных подпространств и $\nu(\sigma)$-антиинвариатным распределением подпространств дополнительной размерности. (Понятие $\nu(\sigma)$-антиинвариантности введено Н. Д. Поляковым [15]).

Примечание. Если на $M_n(J)$ задать риманову метрику, согласованную с почти комплексной структурой J, то $CR_{\nu(\sigma)}$- и CR_ν-структура превращается в CR-структуру, ассоциированную полю $T^\perp(M_m)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балазюк Т. Н., Остиану Н. М.*, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. IV. Подмногообразия коразмерности I в многообразиях почти комплексной структуры. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1983, *15*, 127—164 (РЖМат, 1984, 5А743)
2. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.*, Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1979, *9*, 247 с. (РЖМат, 1980, 1А800)
3. *Лаптев Г. Ф.*, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, № 2, 275—382 (РЖМат, 1953, 433)
4. —, Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности. Докл. АН СССР, 1959, *126*, № 3, 490—493 (РЖМат, 1960, 4526)
5. —, Об оснащении поверхности в пространстве аффинной связности. Лит. мат. сб., 1963, *3*, № 2, 212 (РЖМат, 1964, 12А408)
6. —, Структурные уравнения главного расслоенного многообразия. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Т. 2 (Ин-т науч. информ. АН СССР)». М., 1969, 161—178 (РЖМат, 1970, 4А623)
7. —, Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Т. *1* (Ин-т науч. информ. АН СССР)». М., 1966, 139—189 (РЖМат, 1967, 6А382)
8. —, Распределения касательных элементов. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Т. *3* (Всес. ин-т науч. и техн. информ. АН СССР)». М., 1971, 29—48 (РЖМат, 1972, 6А685)
9. —, *Остиану Н. М.*, $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 7 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975; 5—22 (РЖМат, 1976, 9А622)
10. *Остиану Н. М.*, Дифференциально-геометрические структуры на многомерной поверхности почти комплексного пространства. VI. Всес. геометр. конф. по соврем. пробл. геометрии. Тезисы докл. Вильнюс. гос. пед. ин-т. Вильнюс, 1975 (РЖМат, 1975, 12А583К)
11. —, О расширении понятия CR-подмногообразия в многообразиях почти комплексной структуры. ВИНИТИ АН СССР, М., 1987. 7 с., ил. Библиогр. 7 (Рукопись деп. в ВИНИТИ).
12. —, *Домбровский Р. Ф., Поляков Н. Д.*, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. II. Подмногообразия коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1982, *13*, 27—76 (РЖМат, 1982, 9А590)
13. —, *Поляков Н. Д.*, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. I. Ито-

ги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1980, *11*, 3—64 (РЖМат, 1980, 11А728)
14. *Паламодов В. П.*, Деформация комплексных пространств. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. направл., 1986, *10*, 123—221 (РЖМат, 1987, 2А596)
15. *Поляков Н. Д.*, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. III. $N(\sigma)$-антиинвариантные подмногообразия в многообразии почти контактной структуры. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1984, *13*, 77—117 (РЖМат, 1982, 9А591)
16. —, $CR_{\nu(\sigma)}$-подмногообразие в почти контактном многообразии. ВИНИТИ АН СССР, М., 1987. 24 с., ил. Библиогр. 11 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ).
17. —, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. VI. *CR*-подмногообразия в многообразии почти контактной структуры. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1987, *19*, 23—57
18. *Пушников А. Ю.*, Продолжение *CR*-отображений с порождающих аналитических многообразий. «Материалы 22 Всес. науч. студ. конф.: Студент и науч.-техн. прогресс, Новосибирск, 1984». Новосибирск, 1984, 48—54 (РЖМат, 1985, 9А580)
19. *Рослый А. А.*, *Худавердян О. М.*, *Шварц А. С.*, Суперсимметрия и комплексная геометрия. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. направл., 1986, *9*, 247—284 (РЖМат, 1986, 10А794)
20. *Туманов А. Е.*, *Геометрия CR*-многообразий. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. направл., 1986, *9*, 225—246 (РЖМат, 1986, 10А743)
21. *Хенкин Г. М.*, Метод интегральных представлений в комплексном анализе. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. направл., 1985, *7*, 23—124 (РЖМат, 1986, 6Б232)
22. *Abe K.*, Applications of Riccati type differential equation to Riemannian manifolds with totally geodesic distributions. Tohoku Math. J., 1973, *25*, № 4, 425—444 (РЖМат, 1974, 9А824)
23. *Barros M.*, *Chen B.-J.*, *Urbano F.*, Quaternion *CR*-submanifolds of quaternion manifolds. Kodai Math. J., 1981, *4*, № 3, 399—417 (РЖМат, 1982, 8А690)
24. —, *Urbano F.*, *CR*-submanifolds of a nearly Kähler manifold. I. (to appear)
25. —, —, *CR*-submanifolds of generalized complex space forms. An. şti. Univ. Iaşi. 1979, sec. Ia, *25*, № 2, 355—363 (РЖМат, 1980, 8А619)
26. *Bejancu A.*, Une classe de sous-variétiés d' une variété kahlerienne. C. r. Acad. sci., 1978, *AB286*, № 13, 597—599 (РЖМат, 1978, 11А722)
27. —, On integrability conditions on a *CR*-submanifold. An. şti. Univ. Iaşi, 1978, Sec. Ia, *24*, № 1, 21—24 (РЖМат, 1979, 5А652)
28. —, *CR*-submanifolds of a Kaehler manifold. I. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *69*, № 1, 135—142 (РЖМат, 1979, 2А546)
29. —, *CR*-submanifolds of a Kaehler manifold. II. Trans. Amer. Math. Soc., 1979, *250*, 333—345 (РЖМат, 1980, 1А815)
30. —, Integrability conditions on odd dimensional submanifolds of a complex manifold. Proc. Colloq. Geom. and Topol., Cluj-Napoca, Sept. 22—24, 1978». Cluj-Napoca, 1979, 90—95 (РЖМат, 1983, 1А698)
31. —, On the geometry of leaves on a *CR*-submanifold. An. şti. Univ. Iaşi, 1979, Sec. Ia, *25*, № 2, 393—398 (РЖМат, 1980, 9А639)
32. —, Normal *CR*-submanifolds of a Kaehler manifold. An. şti. Univ. Iaşi, sec. Ia.: Mat., 1980, *26*, № 1, 123—132 (РЖМат, 1980, 12А723)
33. —, On a class of mixed totally geodesic *CR*-submanifolds. An. Univ. Timişoara. Ser. şti. mat., 1980, *18*, № 1, 11—23 (РЖМат, 1981, 12А710)
34. —, Umbilical *CR*-submanifolds of a Kähler manifold. Rend. mat., 1980, *13*, № 3, 431—446 (РЖМат, 1981, 8А723)

35. —, F-connections on a CR-submanifolds. Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1981, Ser. 1 27, № 1-2, 33—40 (РЖМат, 1983, 1A695)
36. —, Pinching theorems for sectional curvatures of a CR-submanifold. Rend. mat. e appl., 1983, *3*, № 1, 65—71 (РЖМат, 1984, 2A707)
37. —, Anti-holomorphis submanifolds of almost Hermitian manifolds. Math. Repts Toyama Univ., 1983, *6*, 179—196 (РЖМат, 1984, 2A709)
38. —, A survey on CR-submanifolds of Kaehlerian manifolds. Lect. Notes Math., 1985, *1156*, 14—23 (РЖМат, 1986, 7A807)
39. —, *Kon Masahiro, Yano Kentaro,* CR-submanifolds of a complex space form. J. Different. Geom.», 1981, *16*, № 1, 137—145 (РЖМат, 1982, 5A639)
40. *Blair D. E., Chen B.-Y.,* On CR-submanifolds of Hermitian manifolds. Isr. J. Math., 1979, *34*, № 4, 353—363 (РЖМат, 1980, 12A720)
41. —, —, *Ludden G. D., Yano K.,* Induced structures on submanifolds. Kodai Math. Semin. Repts, 1970, *22*, № 2, 188—198 (РЖМат, 1971, 2A612)
42. —, —, Hypersurfaces of an odd-dimensional spheres. J. Different. Geom., 1971, *5*, № 3-4, 479—486 (РЖМат, 1972, 2A889)
43. *Chen Bang-yen,* Differential geometry of real submanifolds in a Kähler manifold. Monatsh. Math., 1981, *91*, № 4, 257—274 (РЖМат, 1982, 1A882)
44. —, CR-submanifolds of a Kaehler manifold. I. J. Different. Geom., 1981, *16*, № 2, 305—322 (РЖМат, 1982, 7A744)
45. —, Totally umbilical submanifolds of Kaehler manifolds. Arch. Math., 1981, *36*, № 1, 83—91 (РЖМат, 1981, 9A520)
46. —, CR-submanifolds of an Kaehler manifold. II. J. Different. Geom., 1981, *16*, № 3, 493—509 (РЖМат, 1982, 11A591)
47. *Chern Shiing-shen,* Projective geometry, contact transformations and CR-structures. Arch. Math., 1982, *38*, № 1, 1—5 (РЖМат, 1982, 8A688)
48. —, *Moser J.,* Real hypersurfaces in complex manifolds. Acta math., 1974, *133*, № 3—4, 219—271 (РЖМат, 1976, 4A645)
49. *Deshmukh Sharief, Husain S. I.,* Totally umbilical CR-submanifolds of a Kaehler manifold. Kodai Math. J., 1986, *9*, № 3, 425—429 (РЖМат, 1987, 5A720)
50. *Dini G., Parrini C.,* Extenging CR-distributions. Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur., 1980, *68*, № 1, 42—43 (РЖМат, 1981, 11A734)
51. *Duggal K. L.,* CR-structures and Lorentzian geometry. Acta appl. math., 1986, *7*, № 3, 211—223 (РЖМат, 1987, 5A718)
52. *Greenfield S.,* Cauchy-Riemann equations in several varialles. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1968, *22*, № 2, 275—314 (РЖМат, 1969, 8A413)
53. *Hsu Chen-Jung,* Conditions for a CR-submanifold in a complex-space-form to be non proper. Tamkang J. Math., 1985, *16*, № 4, 113—121 (РЖМат, 1987, 2A674)
54. *Ishihara S.,* Normal structure f satisfying $f^3+f=0$; Kodai Math. Semin. Repts, 1966, *18*, № 1, 36—47 (РЖМат, 1967, 6A385)
55. *Kim In-Bae,* Submanifolds of Kaehlerian manifolds and metric compound structures. Hiroshima Math. J., 1983, *13*, № 2, 401—413 (РЖМат, 1984, 2A700)
56. *Kuranishi M.,* Cartan connections and CR-structures with non-degenerate Levi-form. Astérisque, 1985, num. hors. sér., 273—288 (РЖМат, 1986, 7A801)
57. *Pák Jin Suk, Kang Tae Ho,* CR-submanifolds with cubic geodesic immersion in a complex space form. Math. Repts Toyama Univ., 1986, *9*, 97—104 (РЖМат, 1987, 4A772)
58. *Pertici D.,* CR-structura e geometria riemanniana delle ipersuperficie di C^n Rend. Circ. mat. Palermo, 1984, *33*, № 3, 382—406 (РЖМат, 1986, 2A769)
59. —, Geometria riemannianna delle CR-sottovatrietà di varieta kähleriane. Boll. Unione mat. ital., 1986, *B5*, № 2, 421—440 (РЖМат, 1987, 4A773)

60. *Roşca R.*, *CR*-sous-variétés co-isotropes d'une variété parakählérienne. C. r. Acad. sci., 1984, sér. 1, *298*, № 7, 149—151 (РЖМат, 1984, 11A629)
61. *Sato N.*, Certain anti-holomorphic submanifolds of almost Hermitian manifolds. Sci. Repts Niigata Univ., 1982, *A*, № 18, 1—9 (РЖМат, 1983, 1A693)
62. —, Certain *CR*-submanifolds of almost Hermitian manifolds. (to appear)
63. *Sekigawa K.*, Some *CR*-submanifolds in a *G*-dimensional sphere. Tensor, 1984, *41*, № 1, 13—20 (РЖМат, 1986, 8A774)
64. *Simionescu S.*, *CR*-submanifolds of codimension 2 of an almost Hermitian manifold. Lucr. 15 Conf. naţ. geom. şi topol. Timişoara, 2—7 iul, 1984, S. l., s. a., 275—278 (РЖМат, 1987, 2A671)
65. *Toyonari T.*, *Nemoto H.*, Totally umbilical *CR*-submanifolds of Kähler manifolds. TRU Mathematics, 1985, *21*, № 1, 61—66 (РЖМат, 1986, 3A876)
66. *Urbano F.*, *CR*-submanifolds Totally real submanifolds of quaternionic manifolds. Thesis at Granda Univ. (1970) (in Spanish)
67. *Yano K.*, *Ishihara S.*, The *f*-structure induced on submanifod of complex and almost complex spaces. Kodai Math. Semin. Repts. 1966, *18*, № 2, 130—160 (РЖМат, 1967, 12A617)
68. —, *Kon M.*, Totally real submanifolds of complex space forms. II. Kodai Math. Semin. Repts, 1976, *27*, № 3, 385—399 (РЖМат, 1977, 1A685)
69. —, —, *CR*-sous-variétés d'un espace projectif complexe. C. r. Acad. sci., 1979, *AB288*, № 9, A515—A517 (РЖМат, 1979, 10A505)
70. —, —, Generic submanifolds. Ann. mat. pura ed appl., 1980, *123*, 59—92 (РЖМат, 1981, 2A700)
71. —, —, Differential geometry of *CR*-submanifolds. Geom. dedic., 1981, *10*, № 1—4, 369—391 (РЖМат, 1981, 8A722)
72. —, —, *CR*-submanifolds of a complex projective space. J. Different. Geom., 1981, *16*, № 3, 431—444 (РЖМат, 1982, 11A608)
73. —, —, Generic minimal submanifolds with flat normal connection. II. Tensor, 1982, *36*, № 3, 267—269 (РЖМат, 1984, 9A657)
74. —, —, *CR*-submanifolds of Kaehlerian and Sasakian manifolds. Boston e. a. Birkhäuser. 1983, x, 214 pp. (Progr. Math. vol. 30) (РЖМат, 1985, 4A681K)