В. М. Александров, В. Ю. Саламатова, Осесимметричная контактная задача для упругого полупространства и кольцевой накладки, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, номер 2, 59–62

5. *Bredon G.E.* Introduction to Compact Transformation Groups. N.Y.; London: Academic Press, 1972.
6. *Kawakubo K.* The Theory of Transformation Groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1991.
7. *Dieck T.* Transformation groups // Gruyter Stud. Math. Vol. 8. Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 1987.
8. *Illman S.* Existence and uniqueness of equivariant triangulations of smooth proper G-manifolds with some applications to equivariant whitehead torsion // J. reine und angew. math. 2000. N 524. 129–183.
9. *Korppi T.* Equivariant triangulations of differentiable and real-analytic manifolds with a properly discontinuous action // Annales Academiæ acientiarum fennicæ matematica dissertationes. N 141. Helsinki: Suomalainen Tiedeakatemia, 2005.

Поступила в редакцию
09.10.2009

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА И КОЛЬЦЕВОЙ НАКЛАДКИ

В. М. Александров[1], В. Ю. Саламатова[2]

Исследуется пространственная задача о контактном взаимодействии тонкой кольцевой жесткой накладки с упругим полупространством, нагруженным на бесконечности равномерным растягивающим усилием, направленным параллельно границе полупространства. Предполагается, что накладка не сопротивляется изгибу. Задача сводится к интегральному уравнению первого рода с ядром, имеющим логарифмическую особенность. Приближенное решение уравнения находится с помощью метода Мультоппа–Каландии и сравнивается с ранее полученным асимптотическим решением.

Ключевые слова: контактная задача, метод Мультоппа–Каландии, накладка.

The problem of the contact interaction of a thin circular rigid cover plate with an elastic isotropic half-space loaded at infinity by a stretching force directed in parallel to the boundary of the half-space is considered. It is assumed that the cover plate is not resistant to bending deformations. The problem can be reduced to an integral equation of the first kind whose kernel has a logarithmic singularity. The equation is solved approximately by the Multopp–Kalandia method. The approximate solution obtained is compared with the well-known asymptotic solution.

Key words: contact problem, Multopp–Kalandia method, cover plate.

Воспользуемся цилиндрической системой координат $(r,\, \varphi,\, z)$. Пусть граница $z = 0$ упругого полупространства $0 \leqslant r < \infty$, $z \leqslant 0$ усилена кольцевой накладкой, жестко сцепленной с границей полупространства. Область контакта между накладкой и полупространством определяется как $\Omega = \{a \leqslant r \leqslant b,\, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$. Полупространство на бесконечности нагружено равномерным растягивающим усилием p, направленным параллельно границе полупространства. Предполагается, что накладка жесткая на растяжение, но не сопротивляется изгибным деформациям.

Граничные условия для полупространства имеют вид

$$\sigma_z(r,0) = 0 \;\; (0 \leqslant r < \infty), \qquad u(r,0) = 0 \;\; (a \leqslant r \leqslant b), \qquad \tau_{rz}(r,0) = 0 \;\; (0 \leqslant r < a,\; b < r < \infty), \tag{1}$$

на бесконечности

$$\sigma_r(r,z) = \sigma_\varphi(r,z) = p, \tag{2}$$

а остальные напряжения исчезают. Здесь σ_r, σ_φ, σ_z, τ_{rz} — компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат, $\tau(r)$ — неизвестное контактное касательное напряжение между нижней

[1] *Александров Виктор Михайлович* — доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Ин-та проблем механики РАН, e-mail: alexand@ipmnet.ru.

[2] *Саламатова Виктория Юрьевна* — асп. каф. теории пластичности мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: salamatova@inbox.ru.

поверхностью накладки и поверхностью полупространства. Также введены обозначения: $u = u_r$, $w = u_z$, где u_r, u_z — компоненты вектора перемещений точек полупространства.

Разыскивая решение уравнений Ламе при граничных условиях (1), (2) в форме

$$u(r,z) = \frac{(1-\nu)p\,r}{2G(1+\nu)} + \int\limits_0^\infty U(\gamma,z)\gamma J_1(\gamma r)\,d\gamma,$$

$$w(r,z) = -\frac{\nu p\,z}{2G(1+\nu)} + \int\limits_0^\infty W(\gamma,z)\gamma J_0(\gamma r)\,d\gamma,$$

где G и ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона полупространства, $J_0(x)$ и $J_1(x)$ — функции Бесселя, и применяя известную технику Ханкеля [1], сведем задачу (1), (2) к определению функции $\tau(r)$ из интегрального уравнения

$$\int\limits_a^b \tau(\rho)K(r,\rho)\,d\rho = -\frac{\pi p r^2}{2(1+\nu)} \quad (a \leqslant r \leqslant b), \tag{3}$$

$$K(r,\rho) = \frac{r^2+\rho^2}{r+\rho}\mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) - (r+\rho)\mathbf{E}\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right),$$

где $\mathbf{K}(k)$, $\mathbf{E}(k)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Сделаем в (3) замену переменных

$$r = a\exp\frac{1+x}{\lambda}, \qquad \rho = a\exp\frac{1+\xi}{\lambda}, \qquad \lambda = -2\left(\ln\left(\frac{a}{b}\right)\right)^{-1},$$

$$\psi(\xi) = \tau\left(a\exp\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right)\right)\exp\left(\frac{3\xi}{2\lambda}\right), \qquad g(x) = -\frac{p\lambda\exp\left(\dfrac{3x}{2\lambda}\right)}{2(1+\nu)},$$

тогда интегральное уравнение (3) можно переписать в виде

$$\int\limits_{-1}^1 \psi(\xi)M\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi = \pi g(x) \qquad (|x| \leqslant 1), \tag{4}$$

где

$$M(t) = \operatorname{ch} t \operatorname{sch}\frac{t}{2}\,\mathbf{K}\left(\operatorname{sch}\frac{t}{2}\right) - 2\operatorname{ch}\frac{t}{2}\,\mathbf{E}\left(\operatorname{sch}\frac{t}{2}\right). \tag{5}$$

Из выражений для ядра (5) и разложений полных эллиптических интегралов при значениях аргумента, близких к единице [2, гл. 8, 3-я ф-ла (113), 3-я ф-ла (114)], $M(t)$ можно представить в виде ряда

$$M(t) = -\ln|t| + F(t), \qquad F(t) = \sum_{i=0}^\infty a_i t^{2i} + \ln|t|\sum_{i=1}^\infty b_i t^{2i}, \tag{6}$$

причем ряды в (6) абсолютно сходятся при $|t| < \pi$. Первые константы разложения имеют следующие значения:

$$a_0 = 0{,}07944, \quad a_1 = 0{,}28573, \quad a_2 = 0{,}00449, \quad b_1 = -0{,}18750, \quad b_2 = -0{,}00098, \quad \ldots.$$

Подставив (6) в уравнение (4), перепишем его в виде

$$-\int\limits_{-1}^1 \psi(\xi)\ln\left|\frac{\xi-x}{\lambda}\right|d\xi = \pi g(x) - \int\limits_{-1}^1 \psi(\xi)F(\xi)\,d\xi. \tag{7}$$

В [3] с помощью метода больших λ (м.б.λ) было найдено приближенное решение уравнения (7) при значениях $\lambda \geqslant 2$. Оно имеет вид

$$\psi(x) = \frac{\phi(x)}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \tag{8}$$

где

$$\phi(x) = \frac{3A\pi}{2}\bigl(\Phi_1(x) + x\Phi_2(x) + O(\lambda^{-6}\ln^3\lambda)\bigr),$$

$$\Phi_1(x) = P\bigl(1+\lambda^{-2}(2a_1+3b_1-2b_1\ln(2\lambda))\bigr)Q_0(x) + \lambda^{-4}\bigl(\alpha_1 Q_1(x)+\alpha_2 Q_0(x)\bigr) - \lambda^{-1}\frac{3}{2}Q_0(x) -$$

$$-\lambda^{-3}\left(\frac{15}{32}Q_1(x)+\frac{9}{64}Q_0(x)\right) - \lambda^{-5}\bigl(\alpha_6 Q_2(x)-\alpha_7 Q_1(x)-\alpha_8 Q_0(x)\bigr),$$

$$\Phi_2(x) = 1-\lambda^{-2}\left(\frac{15}{16}Q_0(x)-a_1-b_1+b_1\ln(2\lambda)\right) - \lambda^{-4}\bigl(\alpha_3 Q_1(x)+\alpha_4 Q_0(x)-\alpha_5\bigr),$$

$$P\bigl(a_0+\ln(2\lambda)+\beta_1\lambda^{-2}+\beta_2\lambda^{-4}\bigr) = \frac{2}{3}\lambda+\frac{3}{8}\lambda^{-1}+\beta_3\lambda^{-3}+\beta_4\lambda^{-5}, \qquad A = -\frac{p}{2(1+\nu)}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
\alpha_1 = -0{,}0195\ln(2\lambda)+0{,}0093; \quad \alpha_2 = 0{,}0410\ln(2\lambda)+0{,}0215; \quad \alpha_3 = 0{,}1807;\\
\alpha_4 = -0{,}0293\ln(2\lambda)-0{,}00073; \quad \alpha_5 = 0{,}03516\ln^2(2\lambda)+0{,}0822\ln(2\lambda)+0{,}0272; \quad \alpha_6 = 0{,}0542;\\
\alpha_7 = 0{,}0073; \quad \alpha_8 = 0{,}0022\ln(2\lambda)-0{,}0225; \quad \beta_1 = 0{,}1875\ln(2\lambda)+0{,}0982;\\
\beta_2 = -0{,}00879\ln^2(2\lambda)+0{,}0018\ln(2\lambda)+0{,}0075; \quad \beta_3 = -0{,}0352\ln(2\lambda)+0{,}0519;\\
\beta_4 = -0{,}0095\ln(2\lambda)+0{,}0007.
\end{gathered} \tag{9}$$

В данной работе предлагается решить интегральное уравнение (7) с помощью модифицированного метода Мултоппа–Каландии [4], суть которого заключается в следующем.

Решение интегрального уравнения (7) представимо в виде [5] $\psi(x) = \Psi(x)/\sqrt{1-x^2}$, где функция $\Psi(x)$ по крайней мере непрерывна.

Далее, по узлам

$$x_n = \cos\theta_n, \quad \theta_n = \frac{\pi(2n-1)}{2N}, \quad n = 1,2,\dots,N,$$

строится следующий интерполяционный многочлен Лагранжа для $\Psi(x)$:

$$\begin{gathered}
\tilde\Psi(\theta) \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\tilde\Psi(\theta_n)\left(1+2\sum_{m=1}^{N-1}\cos m\theta_n\cos m\theta\right);\\
\tilde\Psi(\theta) \equiv \Psi(\cos\theta) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,
\end{gathered}$$

и задача сводится к определению значений $\tilde\Psi(\theta_n)$, $n = 1,2,\dots,N$.

Система алгебраических уравнений для определения значений $\tilde\Psi(\theta_n)$, $n = 1,2,\dots,i$, имеет вид

$$\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{N}\tilde\Psi(\theta_n)\left(\ln(2\lambda)+2\sum_{m=1}^{N-1}\frac{\cos(m\theta_n)\cos(m\theta_k)}{m}+F\left(\frac{\cos\theta_n-\cos\theta_k}{\lambda}\right)\right) = N\tilde g(\theta_k), \quad k = 1,\dots,N,\\
\tilde g(\theta) \equiv g(\cos\theta).
\end{gathered}$$

В таблице приведены значения $\psi(x)$ и $\psi(x)\sqrt{1-x^2}$, вычисленные по формуле (8), (9) (м.б.λ) и с помощью метода Мультоппа–Каландии (метод М–К) при различных λ (коэффициент Пуассона ν считается равным 0,3). Как видно из полученных значений, ошибка при увеличении параметра λ, характеризующего относительную толщину накладки, уменьшается и результаты, полученные двумя способами, все более и более совпадают.

x	$\psi(x)$					
	$\lambda=2$		$\lambda=4$		$\lambda=8$	
	Метод М–К	М.б.λ	Метод М–К	М.б.λ	Метод М–К	М.б.λ
−0,9	0,426639	0,422179	1,425079	1,424926	3,496039	3,496021
−0,8	0,392350	0,389509	1,181165	1,181065	2,731319	2,731314
−0,7	0,408928	0,406846	1,123205	1,123132	2,460905	2,460905
−0,6	0,445916	0,444325	1,127275	1,127221	2,349919	2,349920
−0,5	0,497121	0,495905	1,164105	1,164066	2,316786	2,316787
−0,4	0,561395	0,560493	1,223651	1,223625	2,331585	2,331586
−0, 3	0,639475	0,638856	1,302268	1,302254	2,381350	2,381353
−0,2	0,733224	0,732868	1,399219	1,399216	2,460418	2,460423
−0,1	0,845501	0,845400	1,515544	1,515553	2,567056	2,567063
0	0,980324	0,980472	1,653763	1,653782	2,702234	2,702241
0,1	1,143257	1,143656	1,818018	1,818049	2,869355	2,869363
0,2	1,342134	1,342786	2,014612	2,014654	3,074658	3,074666
0,3	1,588334	1,589249	2,253118	2,253171	3,328374	3,328383
0,4	1,899185	1,900375	2,548552	2,548614	3,647182	3,647194
0,5	2,302826	2,304312	2,925869	2,925942	4,059438	4,059453
0,6	2,849270	2,851091	3,430336	3,430417	4,617313	4,617330
0,7	3,640059	3,642292	4,155542	4,155633	5,429823	5,429838
0,8	4,930910	4,933749	5,341247	5,341351	6,778649	6,778651
0,9	7,710229	7,714336	7,929352	7,929480	9,779005	9,778982
	$\psi(x)\sqrt{1-x^2}$					
−1	0,142915	0,140684	0,539230	0,539155	1,412622	1,412617
1	3,811071	3,812948	3,723182	3,723219	4,463972	4,463967

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967.
2. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1962.
3. *Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993.
4. *Александров В.М., Ромалис Б.Л.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986.
5. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию
16.06.2008

УДК 539.3

К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А. Р. Улуханян[1]

С использованием метода И.Н. Векуа представления общего решения эллиптических уравнений $2n$-го порядка с помощью n аналитических функций получены общие решения гиперболических уравнений четвертого и шестого порядка в предположении, что правые части этих уравнений разлагаются в ряд по синусам относительно времени. К упомянутым уравнениям и уравнениям гиперболического типа более высокого порядка приводятся си-

[1] *Улуханян Армине Рафаеловна* — ассист. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: armine_msu@mail.ru.