



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. B. Abrosimov, On lower bound of edge number of minimal edge 1-extension of starlike tree, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2011, Volume 11, Issue 4, 111–117

DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-3-2-111-117

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

February 9, 2025, 14:02:47





ИНФОРМАТИКА

УДК 519.17

О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА РЕБЕР МИНИМАЛЬНОГО РЕБЕРНОГО 1-РАСШИРЕНИЯ СВЕРХСТРОЙНОГО ДЕРЕВА

М. Б. Абросимов

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ компьютерной безопасности
E-mail: mic@rambler.ru

Граф G^* называется реберным 1-расширением графа G , если граф G можно вложить в каждый граф, получающийся из графа G^* , удалением любого его ребра. Реберное 1-расширение G^* графа G называется минимальным, если графы G и G^* имеют одинаковое число вершин, а среди всех реберных 1-расширений графа G с тем же числом вершин граф G^* имеет минимальное число ребер. Дерево называется сверхстройным, если только одна его вершина имеет степень больше двух. В работе дается нижняя оценка числа дополнительных ребер минимального реберного 1-расширения произвольного сверхстройного дерева и указывается семейство деревьев, на которых эта оценка достигается.

Ключевые слова: минимальное реберное расширение, сверхстройное дерево, звездоподобное дерево, отказоустойчивая реализация.

On Lower Bound of Edge Number of Minimal Edge 1-Extension of Starlike Tree

M.B. Abrosimov

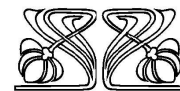
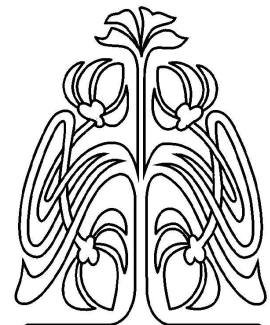
Saratov State University,
Chair of Theoretical Foundations of Computer Security and Cryptography
E-mail: mic@rambler.ru

For a given graph G with n nodes, we say that graph G^* is its 1-edge extension if for each edge e of G^* the subgraph $G^* - e$ contains graph G up to isomorphism. Graph G^* is minimal 1-edge extension of graph G if G^* has n nodes and there is no 1-edge extension with n nodes of graph G having fewer edges than G . A tree is called starlike if it has exactly one node of degree greater than two. We give a lower bound of edge number of minimal edge 1-extension of starlike tree and provide family on which this bound is achieved.

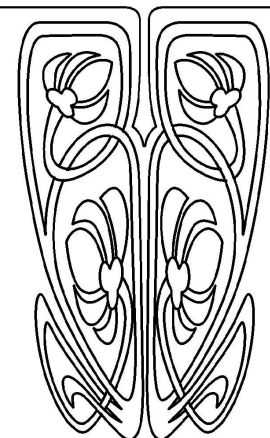
Key words: minimal edge extension, starlike tree, fault tolerance.

ВВЕДЕНИЕ

Минимальные расширения (вершинные или реберные) являются продолжением предложенной Хейзом в работе [1] графовой модели для исследования отказоустойчивости. В этой работе и его последующей статье [2] с соавтором Харари рассматривается отказоустойчивость элементов дискретных систем (node fault tolerance, вершинное расширение). В работе [3] модель была распространена и на отказы связей элементов системы (edge fault tolerance, реберное расширение). Среди рассматриваемых систем особое внимание уделялось системам, граф которых является цепью, циклом или деревом. Исследованию минимальных вершинных 1-расширений частных случаев деревьев посвящены статьи [4–6]. В работе [7] приводятся все минимальные реберные 1-расширения для сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 включительно. Оказалось, что задача является вычислительно сложной [8] и поэтому общего аналитического реше-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





ния описания минимального расширения (вершинного или реберного) для произвольного графа по-видимому не существует. В данной работе рассматриваются минимальные реберные 1-расширения деревьев особого вида, которые называются сверхстройными или звездоподобными. В работе используются понятия теории графов, преимущественно в соответствии с книгой [9].

Графом (неориентированным) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V , называемое отношением смежности. Связный граф без циклов называется *деревом*. Степенью вершины v в неориентированном графе G будем называть количество вершин в G , смежных с данной, и обозначать через $d(v)$. Вектор, составленный из степеней вершин графа G в порядке невозрастания, называется вектором степеней. Будем говорить, что вектор степеней (a_1, \dots, a_n) одного графа *мажорирует* вектор степеней (b_1, \dots, b_n) другого графа, если все компоненты второго не превышают по величине соответствующих компонент первого вектора: $a_i \geq b_i$, $i = 1, \dots, n$.

Дерево называется *сверхстройным* (*звездообразным*), если в точности одна его вершина имеет степень больше двух. Эту вершину будем называть *корнем* сверхстройного дерева. Другое определение звездообразного дерева: это граф, гомеоморфный звезде. На рис. 1 представлены малые сверхстройные деревья.

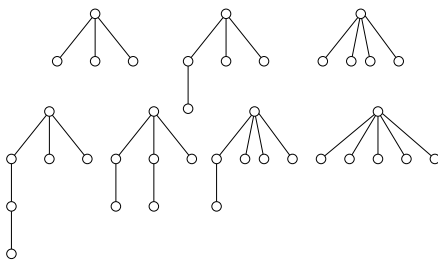


Рис. 1. Сверхстройные деревья с числом вершин 4, 5 и 6

Утверждение. *Дерево является сверхстройным тогда и только тогда, когда количество листьев равно наибольшей из степеней вершин.*

Доказательство. Необходимость. Пусть T — сверхстройное дерево, а v — его корень. Из определения сверхстройного дерева следует, что степень вершины v является наибольшей среди степеней остальных вершин. Пусть u — произвольная вершина, смежная с v . По определению она либо является листом, либо имеет степень 2. Но тогда есть

еще в точности одна вершина смежная с u , кроме v . Продолжая рассуждение, приходим к выводу, что в дереве T количество листьев равно степени корневой вершины v .

Достаточность. Пусть в дереве T вершина v имеет наибольшую степень. Выберем ее в качестве корня. Заметим, что каждая ветвь, исходящая из корня, заканчивается не менее чем одним листом. Ветвь заканчивается одним листом тогда и только тогда, когда она является цепью, т. е. когда все вершины этой ветви, кроме первой (корня) и последней (листа), имеют степень 2. \square

Таким образом, вектор степеней сверхстройного дерева имеет вид $(k, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$, где $k > 2$ и количество листьев равно k . Кратко вектор степеней сверхстройного дерева может быть записан в виде $(k, 2^m, 1^k)$. Среди сверхстройных деревьев есть представители других хорошо известных семейств графов.

В данной статье мы рассматриваем сверхстройные деревья, у которых степень корневой вершины $k > 2$. Однако если это ограничение убрать, то при $k = 1$ или $k = 2$ сверхстройное дерево является цепью P_n .

Если $m = 0$, то сверхстройное дерево является звездой $K_{1,k}$.

Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение k цепей с общей концевой вершиной. При этом дерево можно закодировать вектором, состоящим из длин цепей в порядке неубывания: (m_1, \dots, m_k) , где $m_1 \geq \dots \geq m_k$. Очевидно, что такое кодирование сверхстройных деревьев при $k > 2$ является взаимно однозначным. В самом деле, любому вектору (m_1, \dots, m_k) будет соответствовать единственное с точностью до изоморфизма сверхстройное дерево с числом вершин $m_1 + \dots + m_k + 1$. В этом дереве корневая вершина будет иметь степень k , k вершин будут иметь степень 1, а остальные $m_1 + \dots + m_k - k$ вершин будут иметь степень 2. Будем называть такой код *вектором цепей*. Сверхстройные деревья на рис. 1 имеют коды $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$ и $(1, 1, 1, 1, 1)$. Вектора цепей подсказывают способ перечисления всех сверхстройных деревьев с заданным числом вершин n . Так как $n = m_1 + \dots + m_k + 1$, то, построив все разложения числа $n - 1$ на три и более слагаемых, мы найдем все возможные вектора цепей n -вершинных сверхстройных деревьев. Таким образом, количество неизоморфных сверхстройных деревьев с числом вершин 4, 5, ... есть 1, 2, 4, 7, 11, 17, 25, 36, 50, 70, 94, 127, ... [10]



1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k -расширением* (МР- k Р) n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

- 1) граф G^* является реберным k -расширением G , т.е. граф G вкладывается в каждый граф, получающийся удалением из G^* любых его k ребер;
- 2) граф G^* содержит n вершин, т.е. $|V^*| = |V|$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Построение минимального реберного k -расширения можно представить себе как добавление к заданному графу некоторого числа *дополнительных* ребер. Если рассматриваются простые графы, то минимальное реберное k -расширение может быть не у любого графа. Например, полный граф K_n не имеет минимальных реберных k -расширений ни при каких натуральных значениях k . Граф, получающийся из графа G удалением ребра e будем обозначать $G - e$.

Относительно специальных случаев сверхстройных деревьев некоторые результаты известны. Единственное минимальное реберное 1-расширение цепи P_n есть цикл C_n , а любое минимальное реберное k -расширение цепи P_n есть минимальное реберное $(k - 1)$ -расширение цикла C_n (см. [3]).

Минимальное реберное 1-расширение звезды $K_{1,k}$ единственно с точностью до изоморфизма и получается соединением двух листьев со всеми остальными вершинами звезды и между собой. Для $k > 1$ также известен вид всех минимальных реберных k -расширений (см. [11]).

В этой работе мы дадим нижнюю оценку на количество дополнительных ребер минимального реберного 1-расширения произвольного сверхстройного дерева и покажем, что эта оценка является достижимой, указав специальное семейство сверхстройных деревьев, минимальные реберные 1-расширения которых имеют соответствующее число дополнительных ребер.

Пусть T — сверхстройное дерево с вектором цепей (m_1, \dots, m_k) и вектором степеней $(k, 2^m, 1^k)$. Определим ограничения, которым должно удовлетворять любое минимальное реберное 1-расширение T^* сверхстройного дерева T . Заметим, что

- 1) граф T^* не может иметь вершин со степенью меньше двух, так как удаление любого инцидентного такой вершине ребра привело бы к появлению изолированной вершины;
- 2) граф T^* не может иметь единственную вершину степени k , так как удаление любого инцидентного такой вершине ребра привело бы к графу, у которого все вершины имеют степень меньше k .

Из пункта 1 следует, что вектор степеней графа T^* будет мажорировать вектор $(k, 2^{m+k})$.

Из пункта 2 следует две альтернативы: либо в T^* есть вершина степени более k , либо, как минимум, две вершины степени — не менее k . Оценим количество дополнительных ребер в каждом из случаев.

1. Если в графе T^* есть вершина степени более k , то вектор степеней графа T^* будет мажорировать вектор $(k + 1, 2^{m+k})$. Чтобы определить минимально возможное в этом случае число дополнительных ребер, вычтем из суммы компонент этого вектора сумму степеней вершин дерева T и разделим пополам: $(k + 1)/2$.

2. Если в графе T^* есть как минимум две вершины степени не менее k , то вектор степеней графа T^* будет мажорировать вектор $(k, k, 2^{m+k-1})$. Чтобы определить минимально возможное в этом случае число дополнительных ребер вычтем из суммы компонент этого вектора сумму степеней вершин дерева T и разделим пополам: $k - 1$.

Так как $k > 2$, то лишь при $k = 3$ схема 2 может иметь такое же количество дополнительных ребер, как и схема 1, а во всех остальных случаях больше. Таким образом, получаем

Теорема 1. *Минимальное реберное 1-расширение сверхстройного дерева T с вектором степеней $(k, 2, \dots, 2)$ содержит не менее чем $(k + 1)/2$ при нечетном k и $(k + 2)/2$ при четном k дополнительных ребер.*

Далее мы покажем, что оценки из этой теоремы не могут быть улучшены. Исследуем схему 1.

Теорема 2. *Сверхстройное дерево T с вектором цепей (m_1, \dots, m_k) тогда и только тогда имеет минимальное реберное 1-расширение с вектором степеней $(k + 1, 2, \dots, 2)$, отличающееся на $(k + 1)/2$ дополнительных ребер, когда:*

- 1) среди его цепей есть цепи всех длин от 1 до m_1 (максимальной длины цепи);



2) цепь максимальной длины m_1 единственна;

3) все остальные цепи можно разбить на пары так, чтобы их длины в сумме давали m_1 .

Доказательство. Пусть k — нечетно и T — сверхстройное дерево с вектором цепей (m_1, \dots, m_k) , а G^* — его минимальное реберное 1-расширение с вектором степеней $(k+1, 2, \dots, 2)$, отличающееся на $(k+1)/2$ дополнительных ребер. Заметим, что последнее условие теоремы эквивалентно тому, что концы всех цепей, кроме максимальной, могут быть соединены таким образом, чтобы все получившиеся циклы имели длину $m_1 + 1$

Нетрудно видеть, что граф G^* , построенный по первой схеме, представляет собой объединение циклов с общей вершиной, которую для определенности обозначим v . Построение графа G^* из дерева T можно представить себе следующим образом: одна висячая вершина соединяется с корневой вершиной, а остальные висячие вершины попарно соединяются между собой.

Количество циклов в G^* обозначим через $t = d(v)/2 = (k+1)/2$. Длины циклов в G^* обозначим через p_1, \dots, p_t . Для определенности будем считать, что $m_1 \geq \dots \geq m_k$ и $p_1 \geq \dots \geq p_t$. Очевидно, что $p_1 \geq m_1 + 1$.

Необходимость. Рассмотрим удаление произвольного ребра в графе G^* . Это ребро принадлежит некоторому циклу длины p_i . Если ребро инцидентно вершине v , то после удаления ребра вместо цикла появится цепь длины $p_i - 1$. Если ребро не инцидентно вершине v , то цикл распадается на две цепи. Так как по предположению дерево T вкладывается в получившийся граф, то для каждой из этих цепей должна найтись цепь такой же длины и в дереве T . В силу произвольности выбора ребра можно сделать вывод, что в дереве T должны быть цепи длины $1, 2, \dots, p_1 - 1$. С учетом полученной ранее оценки $p_1 \geq m_1 + 1$ имеем $p_1 = m_1 + 1$. Таким образом, утверждение 1 доказано.

Предположим, что в дереве T есть несколько цепей максимальной длины m_1 . Так как конец только одной из этих цепей может быть соединен с корневой вершиной и может образовать цикл максимальной длины $p_1 = m_1 + 1$, то концы остальных цепей длины m_1 должны быть соединены с концами некоторых других цепей. Но это приведет к тому, что длины получившихся циклов будут больше, чем $p_1 = m_1 + 1$, а это противоречит предположению о том, что p_1 является максимальной длиной цикла. Таким образом, утверждение 2 доказано.

Предположим, что $p_1 > p_t$, т. е. не все циклы имеют одинаковую длину p_1 . Рассмотрим граф, получающийся из G^* удалением ребра e , инцидентного вершине v из цикла минимальной длины p_t и попробуем построить вложение дерева T в получившийся граф. Вершина v в графе $G^* - e$ имеет степень k и единственным образом соответствует корневой вершине дерева. Из вершины v выходит одна цепь длины $p_t - 1$, и $(k-1)/2$ циклов, из которых нужно выделить $k-1$ цепей. По предположению $p_t - 1 < m_1$, т. е. единственная цепь, получившаяся после удаления ребра e , не может быть цепью максимальной длины. Таким образом, один из циклов максимальной длины p_1 будет содержать в себе цепь максимальной длины m_1 . Однако тогда остается еще $(k-3)/2$ циклов и этого недостаточно, чтобы построить вложение для оставшихся $k-2$ цепей. Полученное противоречие доказывает утверждение 3, а вместе с ним и необходимость.

Достаточность. Предположим, что дерево T удовлетворяет условиям 1–3 теоремы. Построим граф G^* из дерева T следующим образом: концевую вершину цепи максимальной длины m_1 соединяем с корневой вершиной, а остальные концевые вершины цепей попарно соединяются между собой, таким образом, чтобы длина цикла была $m_1 + 1$: конец цепи длины 1 соединяется с концом цепи длины $m_1 - 1$, конец цепи длины 2 соединяется с концом цепи длины $m_1 - 2$ и т. д. Докажем, что граф G^* будет минимальным реберным 1-расширением дерева T .

Рассмотрим два случая удаления произвольного ребра e из графа G^* .

1. Ребро e инцидентно корневой вершине v . Удаление ребра e приведет к тому, что из корневой вершины v будет выходить одна цепь длины m_1 и $(k-1)/2$ циклов, каждый из которых имеет длину $m_1 + 1$. Получившаяся цепь будет соответствовать единственной цепи дерева T максимальной длины m_1 , а в каждом из $(k-1)/2$ циклов выделим по две цепи подходящей длины так, чтобы получить оставшиеся $k-1$ цепей дерева T . Вложение построено.

2. Ребро e не инцидентно корневой вершине v . Удаление ребра e приведет к тому, что из корневой вершины v будет выходить две цепи, сумма длин которых будет равна m_1 и $(k-1)/2$ циклов, каждый из которых имеет длину $m_1 + 1$. Получившиеся цепи будут соответствовать подходящим



цепям дерева T . Один из оставшихся циклов используем для вложения цепи максимальной длины m_1 , а в каждом из $(k-1)/2$ оставшихся циклов выделим по две цепи подходящей длины так, чтобы получить оставшиеся $k-1$ цепей дерева T . Вложение построено. Минимальность построенного реберного 1-расширения G^* следует из теоремы 1. Теорема доказана. \square

На рис. 2 представлено 7-вершинное сверхстройное дерево с вектором цепей $(3, 2, 1)$ и все его минимальные реберные 1-расширения (МР-1Р), первое из которых построено по теореме 2. Это дерево является минимальным по числу вершин среди представителей рассматриваемого в теореме 2 семейства.

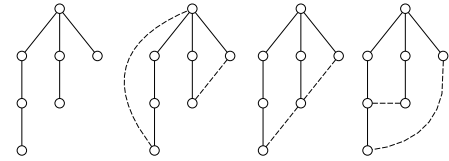


Рис. 2. Сверхстройное дерево $(3, 2, 1)$ и все его МР-1Р

Следствие. Сверхстройные деревья, удовлетворяющие условию теоремы 2, при $k > 3$ имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное реберное 1-расширение.

2. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА

Идея доказательства теоремы 2 легко переносится и на более общий случай сверхстройных деревьев.

Теорема 3. Сверхстройное дерево T с вектором цепей (m_1, \dots, m_k) тогда и только тогда имеет реберное 1-расширение с вектором степеней $(k+d, 2, \dots, 2)$, $d > 0$, отличающееся на $(k+d)/2$ дополнительных ребер, когда:

- 1) среди его цепей есть цепи всех длин от 1 до его высоты m_1 (максимальной длины цепи);
- 2) цепей максимальной длины m_1 в точности d ;
- 3) все остальные цепи можно разбить на пары так, чтобы их длины в сумме давали m_1 .

Доказательство. Пусть $k+d$ — четно и T — сверхстройное дерево с вектором цепей (m_1, \dots, m_k) , а G^* — его реберное 1-расширение (быть может, не минимальное) с вектором степеней $(k+d, 2, \dots, 2)$, отличающееся на $(k+d)/2$ дополнительных ребер. Доказательство следует схеме предыдущей теоремы.

Нетрудно видеть, что граф G^* представляет собой объединение циклов с общей вершиной, которую для определенности обозначим v . Построение G^* из дерева T можно представить следующим образом: d висячих вершин соединяются с корневой вершиной, а остальные висячие вершины попарно соединяются между собой.

Количество циклов в G^* обозначим через $t = d(v)/2 = (k+d)/2$. Длины циклов в G^* обозначим через p_1, \dots, p_t . Для определенности будем считать, что $m_1 \geq \dots \geq m_k$ и $p_1 \geq \dots \geq p_t$. Очевидно, что $p_1 \geq m_1 + 1$.

Необходимость. Рассмотрим удаление произвольного ребра в графе G^* . Это ребро принадлежит некоторому циклу длины p_i . Если ребро инцидентно вершине v , то после удаления ребра вместо цикла появится цепь длины $p_i - 1$. Если ребро не инцидентно вершине v , то цикл распадается на две цепи. Так как по предположению дерево T вкладывается в получившийся граф, то для каждой из этих цепей должна найтись цепь такой же длины и в дереве T . В силу произвольности выбора ребра можно сделать вывод, что в дереве T должны быть цепи длины $1, 2, \dots, p_1 - 1$. С учетом полученной ранее оценки $p_1 \geq m_1 + 1$ имеем $p_1 = m_1 + 1$. Таким образом, утверждение 1 доказано.

Пусть в дереве T есть более d цепей максимальной длины m_1 . Так как концы только d из этих цепей могут быть соединены с корневой вершиной и образовать цикл максимальной длины $p_1 = m_1 + 1$, то концы остальных цепей длины m_1 должны быть соединены с концами некоторых других цепей. Но это приведет к тому, что длины получившихся циклов будут больше, чем $p_1 = m_1 + 1$, а это противоречит предположению о том, что p_1 является максимальной длиной цикла. Таким образом, утверждение 2 доказано.

Предположим, что $p_1 > p_t$, т.е. не все циклы имеют одинаковую длину p_1 . Рассмотрим граф, получающийся из G^* удалением ребра e , инцидентного вершине v , из цикла минимальной длины p_t и попробуем построить вложение дерева T в получившийся граф. Вершина v в графе G^* — e имеет степень $k+1$ и единственным образом соответствует корневой вершине дерева. Из вершины v выходит одна цепь длины $p_t - 1$, и $k/2$ циклов, из которых нужно выделить $k-1$ цепь. По



предположению $p_t - 1 < m_1$, т.е. единственная цепь, получившаяся после удаления ребра e не может быть цепью максимальной длины. Таким образом, два цикла максимальной длины p_1 будут содержать в себе две цепи максимальной длины m_1 . Однако тогда остается еще $(k - 4)/2$ циклов и этого недостаточно, чтобы построить вложение для оставшихся $k - 2$ цепей. Полученное противоречие доказывает утверждение 3, а вместе с ним и необходимость. заменим на абзац: Предположим, что $p_1 > p_t$, т.е. не все циклы имеют одинаковую длину p_1 . Рассмотрим граф, получающийся из G^* удалением ребра e инцидентного вершине v из цикла минимальной длины p_t и попробуем построить вложение дерева T в получившийся граф. Вершина v в графе $G^* - e$ имеет степень $k + d - 1$ и единственным образом соответствует корневой вершине дерева. Из вершины v выходит одна цепь длины $p_t - 1$ и $(k + d - 2)/2$ циклов, из которых нужно выделить $k - 1$ цепь. По предположению $p_t - 1 < m_1$, т.е. единственная цепь, получившаяся после удаления ребра e не может быть цепью максимальной длины. Таким образом, d циклов максимальной длины p_1 будут содержать в себе d цепей максимальной длины m_1 . Однако тогда остается еще $(k - d - 2)/2$ циклов и этого недостаточно, чтобы построить вложение для оставшихся $k - d - 1$ цепей. Полученное противоречие доказывает утверждение 3, а вместе с ним и необходимость.

Достаточность. Предположим, что дерево T удовлетворяет условиям 1–3 теоремы. Построим граф G^* из дерева T следующим образом: концевые вершины цепей максимальной длины m_1 соединим с корневой вершиной, а остальные концевые вершины цепей попарно соединяются между собой, таким образом, чтобы длина цикла была $m_1 + 1$: конец цепи длины 1 соединяется с концом цепи длины $m_1 - 1$, конец цепи длины 2 соединяется с концом цепи длины $m_1 - 2$ и т.д. Докажем, что граф G^* будет реберным 1-расширением дерева T .

Рассмотрим два случая удаления произвольного ребра e из графа G^* .

1. Ребро e инцидентно корневой вершине v . Удаление ребра e приведет к тому, что из корневой вершины v будет выходить одна цепь длины m_1 и $(k + d - 2)/2$ циклов, каждый из которых имеет длину $m_1 + 1$. Получившаяся цепь будет соответствовать цепи дерева T максимальной длины m_1 , $d - 1$ циклов будут содержать остальные цепи максимальной длины, а в каждом из $(k - d)/2$ циклов выделим по две цепи подходящей длины так, чтобы получить оставшиеся $k - d$ цепей дерева T . Вложение построено.

2. Ребро e не инцидентно корневой вершине v . Удаление ребра e приведет к тому, что из корневой вершины v будет выходить две цепи, сумма длин которых будет равна m_1 и $(k + d - 2)/2$ циклов, каждый из которых имеет длину $m_1 + 1$. Получившиеся цепи будут соответствовать подходящим цепям дерева T . Из оставшихся циклов d штук используем для вложения d цепей максимальной длины m_1 , а в каждом из $(k - d - 2)/2$ оставшихся циклов выделим по две цепи подходящей длины так, чтобы получить оставшиеся $k - d - 2$ цепей дерева T . Вложение построено. Теорема доказана. \square

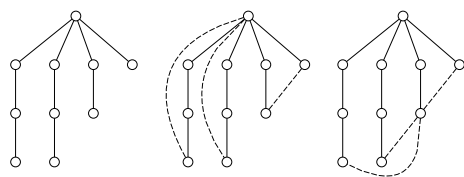


Рис. 3. Сверхстройное дерево $(3, 2, 2, 1)$ и все его МР-1Р

На рис. 3 представлено 10-вершинное сверхстройное дерево с вектором цепей $(3, 3, 2, 1)$ и все его минимальные реберные 1-расширения, первое из которых построено по теореме 3.

Следствие. Для сверхстройных деревьев, удовлетворяющих условию теоремы 3, при $d = 2$ соответствующее реберное 1-расширение будет и минимальным.

Библиографический список

1. Hayes J.P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol. 25. № 9. P. 875–884.
2. Harary F., Hayes J.P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol. 23. P. 135–142.
3. Harary F., Hayes J.P. Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. Vol. 27. P. 19–23.
4. Harary F., Khurum M. One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. 1995. Vol. 56. P. 135–143.
5. Кабанов М.А. Об отказоустойчивых реализациях графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов, 1997. Вып.1. С. 50–58.
6. Абросимов М.Б. Минимальные расширения графов // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Томск, 2000. С. 59–64.



7. Минимальные реберные расширения сверхстройных деревьев с малым числом вершин / М.Б. Абросимов, Д. Д. Комаров; Саратов. гос. ун-т. Саратов, 2010. 27 с. Деп. в ВИНТИ 18.10.2010, № 589-В2010.
8. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 5. С. 643–650.
9. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М., 1997. 368 с.
10. Sloane N. J. A., Plouffe S. The Encyclopedia of Integer Sequences. San Diego, 1995. 587 p.
11. Абросимов М. Б. Минимальные расширения неориентированных звезд // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов, 2006. Вып. 7. С. 3–5.