ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 136, № 1
июль, 2003

 О. И. Мохов*

КВАЗИФРОБЕНИУСОВЫ АЛГЕБРЫ И ИХ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ N-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ, ЗАДАВАЕМЫЕ СОГЛАСОВАННЫМИ $(N \times N)$-МЕТРИКАМИ ПОСТОЯННОЙ РИМАНОВОЙ КРИВИЗНЫ

Доказано, что уравнения, описывающие согласованные $(N \times N)$-метрики постоянной римановой кривизны, определяют специальный класс интегрируемых N-параметрических деформаций квазифробениусовых (вообще говоря, некоммутативных) алгебр. Обсуждаются связи с открыто-замкнутыми двумерными топологическими теориями поля, уравнениями ассоциативности, фробениусовыми и квазифробениусовыми многообразиями. Выдвинута гипотеза, что открыто-замкнутые двумерные топологические теории поля соответствуют специальному классу интегрируемых деформаций ассоциативных квазифробениусовых алгебр.

Ключевые слова: квазифробениусова и фробениусова алгебры, интегрируемая деформация алгебры, топологическая теория поля, согласованные метрики, метрика постоянной кривизны, квазифробениусово и фробениусово многообразия, уравнения ассоциативности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе доказано, что пучки согласованных $(N \times N)$-метрик постоянной римановой кривизны описываются специальным классом интегрируемых N-параметрических деформаций квазифробениусовых (вообще говоря, некоммутативных) алгебр.

Конечномерная алгебра $\mathcal{Q}$ называется *квазифробениусовой*, если в ней выполняется тождество

$$(ab)c = (ac)b, \qquad a, b, c \in \mathcal{Q}, \tag{1}$$

а также задана инвариантная невырожденная симметричная билинейная форма $\langle a, b\rangle$:

$$\langle ab, c\rangle = \langle a, cb\rangle, \qquad \langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle, \quad a, b, c \in \mathcal{Q}.$$

Напомним, что конечномерная коммутативная ассоциативная алгебра с заданной на ней инвариантной невырожденной симметричной билинейной формой называется *фробениусовой алгеброй* (мы не требуем здесь наличия единицы во фробениусовой алгебре).

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия. E-mail: mokhov@mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru

Всякая коммутативная квазифробениусова алгебра является фробениусовой, т.е. если в квазифробениусовой алгебре выполняется тождество $ab = ba$ (*коммутативность*), то в ней всегда выполняются тождества

$$(ab)c = a(bc) \qquad (\textit{ассоциативность}),$$
$$\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle \qquad (\textit{инвариантность билинейной формы}).$$

Тождество (1), означающее коммутативность операторов правого умножения в алгебре: $R_a R_b = R_b R_a$, где $R_a b = ba$, естественно возникает в качестве одного из соотношений в алгебрах, описывающих некоторые специальные классы скобок Пуассона первого порядка, линейных по полевым переменным (см. [1]–[3]). Теория левосимметричных алгебр с дополнительным тождеством (1), отвечающих линейным одномерным скобкам Пуассона гидродинамического типа и называемых *алгебрами Новикова*, была развита в работах [4]–[6] (*левосимметричные алгебры* или *алгебры Винберга*, т.е. алгебры с тождеством $a(bc) - (ab)c = b(ac) - (ba)c$ или $L_a L_b - L_b L_a = L_{ab-ba}$, где $L_a b = ab$, рассматривались в [7]). Тождество (1) естественно возникает и в алгебрах, описывающих все многомерные скобки Пуассона гидродинамического типа (такие алгебры были изучены автором [8]).

Введение рассматриваемого в статье понятия квазифробениусовых алгебр мотивировано теорией Дубровина фробениусовых многообразий [9] и естественным обобщением фробениусовых многообразий (так называемыми квазифробениусовыми многообразиями), связанным с произвольными плоскими пучками метрик [10] (см. также [11], [12]). Как доказано Дубровиным, двумерным топологическим теориям поля (фробениусовым многообразиям) отвечает специальный класс интегрируемых деформаций фробениусовых алгебр, а также специальный класс квазиоднородных плоских пучков метрик (см. [9], [13]). Общим плоским пучкам метрик локально отвечают квазифробениусовы многообразия (многообразия с квазифробениусовой структурой на касательных пространствах; см. [10]) и, соответственно, специальные деформации квазифробениусовых алгебр. Интегрируемость нелинейных уравнений, описывающих эти деформации квазифробениусовых алгебр, доказана автором [14], [15] методом обратной задачи рассеяния (см. также [11], [16], [17]; в [18] указана также пара Лакса для этих уравнений). В настоящей работе доказано, что пучки согласованных метрик постоянной римановой кривизны также определяют специальные интегрируемые деформации квазифробениусовых алгебр. Мы надеемся, что построенные в статье интегрируемые деформации квазифробениусовых алгебр также окажутся полезными в двумерных топологических теориях поля. В частности, мы предполагаем, что найденные недавно Натанзоном [19] (см. также [20]) деформации некоммутативных ассоциативных алгебр, отвечающие открыто-замкнутым двумерным топологическим теориям поля, интегрируемы методом обратной задачи и являются специальными редукциями рассматриваемого класса интегрируемых деформаций некоммутативных квазифробениусовых алгебр. В связи с этим изучение деформаций некоммутативных квазифробениусовых алгебр и особенно выделение среди них ассоциативных деформаций представляет большой интерес.

2. СОГЛАСОВАННЫЕ МЕТРИКИ ПОСТОЯННОЙ РИМАНОВОЙ КРИВИЗНЫ

Напомним, что две псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *согласованными*, если для любой линейной комбинации этих метрик $g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u)$, где λ_1 и λ_2 – произвольные константы, для которых $\det(g^{ij}(u)) \not\equiv 0$, коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивита и компоненты соответствующих тензоров римановой кривизны связаны тем же самым линейным соотношением: $\Gamma^{ij}_k(u) = \lambda_1 \Gamma^{ij}_{1,k}(u) + \lambda_2 \Gamma^{ij}_{2,k}(u)$ и $R^{ij}_{kl}(u) = \lambda_1 R^{ij}_{1,kl}(u) + \lambda_2 R^{ij}_{2,kl}(u)$, в этом случае мы будем говорить также, что метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют *пучок согласованных метрик* [17], [21]. Плоские пучки метрик, которые есть не что иное, как согласованные невырожденные локальные скобки Пуассона гидродинамического типа (согласованные скобки Дубровина–Новикова [22]), были введены в работе [9]. Две псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ постоянной римановой кривизны K_1 и K_2, соответственно, называются *согласованными*, если любая линейная комбинация этих метрик $g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u)$, где λ_1 и λ_2 – произвольные константы, для которых $\det(g^{ij}(u)) \not\equiv 0$, является метрикой постоянной римановой кривизны $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$, а коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивита связаны тем же самым линейным соотношением: $\Gamma^{ij}_k(u) = \lambda_1 \Gamma^{ij}_{1,k}(u) + \lambda_2 \Gamma^{ij}_{2,k}(u)$ [17], [21]. Мы также будем говорить в этом случае, что метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют *пучок согласованных метрик постоянной римановой кривизны* [17], [21]. Очевидно, что все эти определения взаимно согласованы, и если согласованные метрики являются метриками постоянной римановой кривизны, то они образуют пучок согласованных метрик постоянной римановой кривизны, а если согласованные метрики плоские, то они образуют плоский пучок метрик.

В [23] были введены и изучены нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, имеющие следующий вид (скобки Мохова–Ферапонтова):

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b^{ij}_k(u(x)) u^k_x + K u^i_x \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} u^j_x \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\, dx, \qquad (2)$$

где $I[u]$ и $J[u]$ – произвольные функционалы на пространстве функций (полей) $u^i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, одной независимой переменной x, $u = (u^1, \ldots, u^N)$ – локальные координаты на некотором заданном гладком N-мерном многообразии M, коэффициенты $g^{ij}(u)$ и $b^{ij}_k(u)$ – гладкие функции локальных координат, K – произвольная константа. Эти нелокальные скобки Пуассона играют важную роль в теории систем гидродинамического типа. Вид скобки (2) инвариантен относительно локальных замен координат. Скобка вида (2) называется *невырожденной*, если $\det(g^{ij}(u)) \not\equiv 0$. Если $\det(g^{ij}(u)) \not\equiv 0$, то скобка (2) является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда $g^{ij}(u)$ – произвольная псевдориманова контравариантная метрика постоянной римановой кривизны K, $b^{ij}_k(u) = -g^{is}(u)\Gamma^j_{sk}(u)$, где $\Gamma^j_{sk}(u)$ – риманова связность, порождаемая метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивита) [23] (отметим, что при локальных заменах координат коэффициенты $g^{ij}(u)$ и $b^{ij}_k(u)$ скобки (2) преобразуются как соответствующие дифференциально-геометрические объекты: контравариантная метрика и связность, соответственно, K – инвариант). При $K = 0$ получаем локальные скобки Пуассона гидродинамического типа (скобки Дубровина–Новикова [22]).

Задача описания согласованных метрик постоянной римановой кривизны эквивалентна задаче описания согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа, порождаемых метриками постоянной римановой кривизны (согласованных скобок Мохова–Ферапонтова). Напомним, что скобки Пуассона называются *согласованными*, если их произвольная линейная комбинация также является скобкой Пуассона [24]. Как показано в [25], [26] (см. также [17], [27], [28]), согласованные скобки Мохова–Ферапонтова описываются совместной нелинейной системой уравнений, интегрируемой методом обратной задачи рассеяния (случай согласованных скобок Дубровина–Новикова, т.е. согласованных локальных скобок Пуассона гидродинамического типа, проинтегрирован ранее автором [14], [15] (см. также [17], [18])).

3. СОГЛАСОВАННЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ СКОБКИ ПУАССОНА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Лемма 1. *В задаче об описании произвольной пары согласованных нелокальных скобок Пуассона вида* (2) *одну из этих двух скобок всегда можно считать локальной без ограничения общности.*

Действительно, если две согласованные нелокальные скобки Пуассона вида (2) $\{I,J\}_0$ (с соответствующей константой K_0 в нелокальной части) и $\{I,J\}_1$ (с константой K_1) линейно независимы, то в пучке этих скобок Пуассона, т.е. среди скобок Пуассона $\lambda_0\{I,J\}_0+\lambda_1\{I,J\}_1$, где λ_0 и λ_1 – произвольные константы, обязательно есть ненулевая локальная скобка Пуассона $\{I,J\}=\lambda_0'\{I,J\}_0+\lambda_1'\{I,J\}_1$, где λ_0', λ_1' – произвольные константы, удовлетворяющие соотношению $\lambda_0'K_0+\lambda_1'K_1=0$. Эту скобку можно взять в качестве одной из образующих всего рассматриваемого пучка согласованных скобок Пуассона (очевидно, что если эта локальная скобка Пуассона $\{I,J\}$ нулевая, то скобки Пуассона $\{I,J\}_0$ и $\{I,J\}_1$ являются линейно зависимыми: $\lambda_0'\{I,J\}_0+\lambda_1'\{I,J\}_1\equiv 0$).

Рассмотрим задачу о согласованности нелокальной и локальной скобок Пуассона гидродинамического типа

$$\{I,J\}_1=\int\frac{\delta I}{\delta u^i(x)}\left(g_1^{ij}(u(x))\,\frac{d}{dx}+b_{1,k}^{ij}(u(x))u_x^k+K_1u_x^i\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}u_x^j\right)\frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\,dx \tag{3}$$

и

$$\{I,J\}_2=\int\frac{\delta I}{\delta u^i(x)}\left(g_2^{ij}(u(x))\,\frac{d}{dx}+b_{2,k}^{ij}(u(x))u_x^k\right)\frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\,dx, \tag{4}$$

т.е. условие, что при всех значениях константы λ скобка

$$\{I,J\}=\{I,J\}_1+\lambda\{I,J\}_2 \tag{5}$$

является скобкой Пуассона (таким образом, формула (5) определяет *пучок согласованных скобок Пуассона*).

Мы далее предполагаем, что локальная скобка $\{I,J\}_2$ является невырожденной, т.е. $\det(g_2^{ij}(u))\not\equiv 0$, но не налагаем никаких дополнительных условий на скобку $\{I,J\}_1$, т.е., вообще говоря, она может быть и вырожденной. Скобка (5) может быть вырожденной, поэтому укажем здесь общие соотношения на коэффициенты скобки вида (2), эквивалентные условию, что скобка (2) является скобкой Пуассона. Эти общие соотношения (без предположения о невырожденности) были получены в работе [29] (см. также [30], [31]):

$$
\begin{gathered}
g^{ij}(u) = g^{ji}(u),\\
\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = b^{ij}_k(u) + b^{ji}_k(u),\\
g^{is}(u) b^{jr}_s(u) = g^{js}(u) b^{ir}_s(u),\\
g^{is}(u)\left(\frac{\partial b^{jr}_s}{\partial u^k} - \frac{\partial b^{jr}_k}{\partial u^s}\right) + b^{ij}_s(u) b^{sr}_k(u) - b^{ir}_s(u) b^{sj}_k(u) = K(g^{ir}(u)\delta^j_k - g^{ij}(u)\delta^r_k),\\
\sum_{(i,j,r)} \left[b^{si}_p(u)\left(\frac{\partial b^{jr}_k}{\partial u^s} - \frac{\partial b^{jr}_s}{\partial u^k}\right) + K(b^{ij}_k(u) - b^{ji}_k(u))\delta^r_p + \right.\\
\left. + b^{si}_k(u)\left(\frac{\partial b^{jr}_p}{\partial u^s} - \frac{\partial b^{jr}_s}{\partial u^p}\right) + K(b^{ij}_p(u) - b^{ji}_p(u))\delta^r_k \right] = 0,
\end{gathered}
$$

где $\sum_{(i,j,r)}$ означает суммирование по всем циклическим перестановкам индексов i, j, r.

4. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА СОГЛАСОВАННЫХ ПАР СКОБОК

По теореме Дубровина–Новикова [22] для невырожденной локальной скобки Пуассона гидродинамического типа $\{I, J\}_2$ всегда существуют локальные координаты $u^1, \dots$ $\dots, u^N$ (плоские координаты метрики $g^{ij}_2(u)$), в которых эта скобка постоянна, т.е. $g^{ij}_2(u) = \eta^{ij} = \mathrm{const}$, $b^{ij}_{2,k}(u) = \Gamma^i_{2,jk}(u) = 0$. Таким образом, мы можем выбрать плоские координаты метрики $g^{ij}_2(u)$ и в дальнейшем считать, что скобка Пуассона $\{I, J\}_2$ постоянна и имеет вид

$$
\{I, J\}_2 = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\, dx, \tag{6}
$$

где $\eta^{ij} = \eta^{ji}$, $\eta^{ij} = \mathrm{const}$, $\det(\eta^{ij}) \neq 0$. В дальнейшем мы будем также использовать в рассматриваемых плоских координатах ковариантную метрику η_{ij}, обратную к контравариантной метрике η^{ij}: $\eta^{is}\eta_{sj} = \delta^i_j$.

Теорема 1 [27]. *Произвольная нелокальная скобка Пуассона $\{I, J\}_1$ вида (3) (возможно, вырожденная) согласована с постоянной скобкой Пуассона (6) тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$
\begin{aligned}
\{I, J\}_1 = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \Bigg[&\left(\eta^{is}\frac{\partial H^j}{\partial u^s} + \eta^{js}\frac{\partial H^i}{\partial u^s} - K_1 u^i u^j\right)\frac{d}{dx} + \\
&+ \left(\eta^{is}\frac{\partial^2 H^j}{\partial u^s \partial u^k} - K_1 \delta^i_k u^j\right) u^k_x + K_1 u^i_x \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} u^j_x \Bigg] \frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\, dx,
\end{aligned} \tag{7}
$$

где $H^i(u)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, *– гладкие функции, определенные в некоторой области локальных координат.*

В плоском случае согласованных скобок Дубровина–Новикова ($K_1 = 0$) соответствующее утверждение было сформулировано и доказано автором [32]–[34] (см. также условия на плоские пучки метрик в [9]).

5. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СОГЛАСОВАННОЙ ПАРЫ СКОБОК

Теорема 2 [27]. *Нелокальная скобка вида* (7) (*возможно, вырожденная*) *является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда выполнены следующие уравнения*:

$$\frac{\partial^2 H^i}{\partial u^k \partial u^s}\eta^{sp}\frac{\partial^2 H^j}{\partial u^p \partial u^l} = \frac{\partial^2 H^j}{\partial u^k \partial u^s}\eta^{sp}\frac{\partial^2 H^i}{\partial u^p \partial u^l}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\left(\eta^{ir}\frac{\partial H^s}{\partial u^r} + \eta^{sr}\frac{\partial H^i}{\partial u^r} - K_1 u^i u^s\right)\eta^{jp}\frac{\partial^2 H^k}{\partial u^p \partial u^s} = \\ &= \left(\eta^{jr}\frac{\partial H^s}{\partial u^r} + \eta^{sr}\frac{\partial H^j}{\partial u^r} - K_1 u^j u^s\right)\eta^{ip}\frac{\partial^2 H^k}{\partial u^p \partial u^s}.\end{aligned} \tag{9}$$

В плоском случае ($K_1 = 0$) соответствующая теорема получена в работе [33], где была сформулирована также гипотеза об интегрируемости системы (8), (9) при $K_1 = 0$ методом обратной задачи рассеяния, доказанная впоследствии в работах автора [14], [15], [17] (см. также [18], где указана пара Лакса для этой системы). Соответствующие общие условия на плоские пучки метрик указаны в работе [9].

Очевидно, что любой набор N линейных функций $H^i(u) = a^i_k u^k + a^i$, где a^i_k – произвольная постоянная матрица, $a^i_k = \mathrm{const}$, $a^i = \mathrm{const}$, всегда является решением нелинейной системы (8), (9) и, следовательно, всегда определяет соответствующую каноническую пару согласованных скобок Пуассона (6), (7) (см. [27]).

В плоском случае (при $K_1 = 0$) набор N квадратичных функций $H^i(u) = c^i_{jk} u^j u^k$, где $c^i_{jk} = c^i_{kj}$, $c^i_{jk} = \mathrm{const}$, является решением нелинейной системы (8), (9) тогда и только тогда, когда структурные константы $a^{ij}_k = \eta^{is} c^j_{sk}$ удовлетворяют соотношениям (см. [10])

$$\begin{aligned} a^{ij}_s a^{sk}_l &= a^{ik}_s a^{sj}_l, \\ (a^{is}_l + a^{si}_l)a^{jk}_s &= (a^{js}_l + a^{sj}_l)a^{ik}_s, \end{aligned}$$

которые эквивалентны условию, что N-мерная алгебра с базисом $e^1, \dots, e^N$ и умножением $e^i \cdot e^j = a^{ij}_k e^k$ является алгеброй Новикова, т.е. выполняются тождества

$$(e^i \cdot e^j) \cdot e^k = (e^i \cdot e^k) \cdot e^j, \tag{10}$$

$$e^i \cdot (e^j \cdot e^k) - (e^i \cdot e^j) \cdot e^k = e^j \cdot (e^i \cdot e^k) - (e^j \cdot e^i) \cdot e^k \tag{11}$$

(см. [10]). При этом на этой алгебре Новикова определена инвариантная невырожденная симметричная билинейная форма $(e^i, e^j) = \eta^{ij}$, т.е.

$$(e^i \cdot e^j, e^k) = (e^i, e^k \cdot e^j), \qquad (e^i, e^j) = (e^j, e^i).$$

Таким образом, в этом случае мы получаем специальный класс квазифробениусовых алгебр, а именно в точности класс левосимметричных квазифробениусовых алгебр, описывающих линейные одномерные локальные скобки Пуассона гидродинамического типа (см. [4]).

Лемма 2. *Условие левосимметричности* (11) *в любой алгебре* $\mathcal{B}$ *с умножением* $e^i \cdot e^j = a^{ij}_k e^k$ *и тождеством* (1) (*и, таким образом, в любой квазифробениусовой алгебре*) *эквивалентно условию, что для любого* $u = (u^1, \dots, u^N)$ *симметричная билинейная форма*

$$\langle e^i, e^j \rangle = (a^{ij}_k + a^{ji}_k) u^k$$

является инвариантной, т.е.

$$\langle e^i \cdot e^j, e^k \rangle = \langle e^i, e^k \cdot e^j \rangle.$$

Параметры $u^1, \dots, u^N$ *осуществляют деформацию инвариантной формы.*

В общем случае согласованных метрик постоянной римановой кривизны интересно изучить алгебраические структуры, связанные с наборами N кубических функций $H^i(u) = c^i_{jkl} u^j u^k u^l$, где $c^i_{jkl} = c^i_{kjl} = c^i_{jlk}$, $c^i_{jkl} = \mathrm{const}$. Каждый такой набор кубических функций является решением нелинейной системы (8), (9) тогда и только тогда, когда для структурных констант $a^{ij}_{kl} = \eta^{is} c^j_{skl}$, $a^{ij}_{kl} = a^{ij}_{lk}$, выполняются следующие соотношения:

$$a^{ki}_{ms} a^{sj}_{nl} - a^{kj}_{ns} a^{si}_{ml} + a^{ki}_{ns} a^{sj}_{ml} - a^{kj}_{ms} a^{si}_{nl} = 0,$$

$$\sum_{[l,m,n]} [(3a^{is}_{mn} + 3a^{si}_{mn} - K_1 \delta^i_m \delta^s_n) a^{jk}_{ls} - (3a^{js}_{mn} + 3a^{sj}_{mn} - K_1 \delta^j_m \delta^s_n) a^{ik}_{ls}] = 0,$$

где $\sum_{[l,m,n]}$ означает суммирование по всем перестановкам индексов l, m, n. В этом случае для любого $u = (u^1, \dots, u^N)$ в N-мерной алгебре $\mathcal{C}(u)$ с базисом $e^1, \dots, e^N$ и умножением $e^i * e^j = a^{ij}_{lk} u^l e^k$ выполняется тождество

$$(a * b) * c = (a * c) * b$$

и, кроме того, эта алгебра $\mathcal{C}(u)$ обладает двумя инвариантными симметричными билинейными формами

$$(e^i, e^j) = \eta^{ij}, \qquad \langle e^i, e^j \rangle = 3(a^{ij}_{kl} + a^{ji}_{kl}) u^k u^l - K_1 u^i u^j,$$

т.е.

$$(e^i * e^j, e^k) = (e^i, e^k * e^j), \qquad \langle e^i * e^j, e^k \rangle = \langle e^i, e^k * e^j \rangle.$$

Таким образом, мы получаем в этом случае N-параметрические деформации квазифробениусовых алгебр $(\mathcal{C}(u), (\cdot\,, \cdot))$ и $(\mathcal{C}(u), \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$.

Теорема 3 [25], [26]. *Система нелинейных уравнений* (8), (9) *совместна и интегрируется методом обратной задачи рассеяния.*

Отметим, что в [25], [26] получена и проинтегрирована система нелинейных уравнений, эквивалентная системе (8), (9) и тоже описывающая согласованные нелокальные скобки Пуассона вида (2), но в других специальных локальных координатах, гораздо более удобных для интегрирования (в этих специальных координатах метрики обеих согласованных скобок диагональны). В плоском случае ($K_1 = 0$) соответствующая система в специальных "диагональных" локальных координатах проинтегрирована в [14], [15].

6. КВАЗИФРОБЕНИУСОВЫ АЛГЕБРЫ И ИХ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим скобку Пуассона (7), определяющую каноническую пару согласованных скобок, и определим для любого $u = (u^1, \ldots, u^N)$ алгебру $\mathcal{A}(u)$ в N-мерном векторном пространстве с базисом $e^1, \ldots, e^N$ и умножением

$$e^i \circ e^j = \eta^{is} \frac{\partial^2 H^j}{\partial u^s \partial u^k} e^k.$$

Кроме того, определим на алгебре $\mathcal{A}(u)$ симметричную билинейную форму ("метрику постоянной римановой кривизны K_1")

$$\langle e^i, e^j \rangle = g_1^{ij}(u),$$

т.е.

$$\langle e^i, e^j \rangle = \eta^{is} \frac{\partial H^j}{\partial u^s} + \eta^{js} \frac{\partial H^i}{\partial u^s} - K_1 u^i u^j.$$

Тогда уравнения (8) означают, что в алгебре $\mathcal{A}(u)$ выполняется тождество

$$(e^i \circ e^j) \circ e^k = (e^i \circ e^k) \circ e^j, \tag{12}$$

а уравнения (9) эквивалентны тождеству

$$\langle e^i \circ e^j, e^k \rangle = \langle e^i, e^k \circ e^j \rangle. \tag{13}$$

Таким образом, любое решение интегрируемой нелинейной системы (8), (9) при любом фиксированном $u = (u^1, \ldots, u^N)$ определяет квазифробениусову алгебру $\mathcal{A}(u)$ с умножением $a \circ b$ и инвариантной симметричной билинейной формой $\langle a, b \rangle$, а система (8), (9) определяет N-параметрическую деформацию этой квазифробениусовой алгебры. Отметим, что на построенной квазифробениусовой алгебре $\mathcal{A}(u)$ всегда имеется также недеформируемая инвариантная невырожденная симметричная билинейная форма ("плоская метрика")

$$(e^i, e^j) = \eta^{ij}, \qquad (e^i \circ e^j, e^k) = (e^i, e^k \circ e^j).$$

Таким образом, согласованные метрики постоянной римановой кривизны η^{ij} и $g_1^{ij}(u)$ определяют при каждом $u = (u^1, \ldots, u^N)$ две "согласованные" квазифробениусовы алгебры $(\mathcal{A}(u), (\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ и $(\mathcal{A}(u), \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$. Квазифробениусовы структуры, возникающие в плоском случае при $K_1 = 0$, были рассмотрены в работе [10].

Гипотеза. *Деформации некоммутативных ассоциативных алгебр, недавно полученные Натанзоном* [19] (*см. также* [20]) *и отвечающие открыто-замкнутым двумерным топологическим теориям поля, принадлежат к интегрируемому классу деформаций некоммутативных квазифробениусовых алгебр и являются интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния.*

Построение соответствующих интегрируемых редукций является очень интересной и важной задачей.

7. ДЕФОРМАЦИИ ФРОБЕНИУСОВЫХ АЛГЕБР

Допустим, что умножение в алгебре $\mathcal{A}(u)$ коммутативно: $e^i \circ e^j = e^j \circ e^i$, т.е.

$$\eta^{is}\,\frac{\partial^2 H^j}{\partial u^s \partial u^k} = \eta^{js}\,\frac{\partial^2 H^i}{\partial u^s \partial u^k}.$$

Тогда существуют $c_{pl} = \mathrm{const}$ такие, что

$$\eta_{ps}\,\frac{\partial H^s}{\partial u^l} = \eta_{ls}\,\frac{\partial H^s}{\partial u^p} + c_{lp} - c_{pl},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial(\eta_{ps}H^s + c_{ps}u^s)}{\partial u^l} = \frac{\partial(\eta_{ls}H^s + c_{ls}u^s)}{\partial u^p}.$$

Таким образом, существует функция $\Phi(u)$ ("потенциал") такая, что

$$H^i(u) = \eta^{is}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u^s} - \frac{1}{2}(c_{sk} - c_{ks})u^k\right), \tag{14}$$

где использовано, что симметричная часть матрицы (c_{ks}) легко включается в "потенциал" $\Phi(u)$:

$$\frac{1}{2}(c_{sk} + c_{ks})u^k = \frac{1}{2}\frac{\partial(c_{pr}u^p u^r)}{\partial u^s}.$$

Таким образом, для коммутативной алгебры $\mathcal{A}(u)$ имеем

$$e^i \circ e^j = \eta^{is}\eta^{jp}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^s \partial u^p \partial u^k}\,e^k,$$

$$\langle e^i, e^j\rangle = 2\eta^{is}\eta^{jp}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^s \partial u^p} - K_1 u^i u^j.$$

Из соотношений (12) и (13) следует, что коммутативная алгебра $\mathcal{A}(u)$ является ассоциативной:

$$(e^i \circ e^j) \circ e^k = e^i \circ (e^j \circ e^k),$$

и обладает инвариантной симметричной билинейной формой

$$\langle e^i \circ e^j, e^k\rangle = \langle e^i, e^j \circ e^k\rangle,$$

т.е. при любом $u = (u^1, \ldots, u^N)$ алгебра $\mathcal{A}(u)$ является фробениусовой.

В результате редукции (14) уравнения (8) приобретают вид уравнений ассоциативности Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде–Дубровина (см. [9], [35]–[38]):

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^k \partial u^i \partial u^s}\eta^{sp}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^p \partial u^j \partial u^l} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^k \partial u^j \partial u^s}\eta^{sp}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^p \partial u^i \partial u^l}, \tag{15}$$

а уравнения (9) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^i \partial u^s} - \frac{K_1}{2}\eta_{ir}\eta_{sl}u^r u^l\right)\eta^{sp}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^p \partial u^j \partial u^k} &= \\ = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^j \partial u^s} - \frac{K_1}{2}\eta_{jr}\eta_{sl}u^r u^l\right)\eta^{sp}&\frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^p \partial u^i \partial u^k}.\end{aligned} \tag{16}$$

Отметим, что в плоском случае (при $K_1 = 0$) все дубровинские потенциалы $\Phi(u)$, определяющие двумерные топологические теории поля, всегда являются решениями обоих соответствующих уравнений (15) и (16) с $K_1 = 0$ (см. [9]).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00803) и фонда INTAS (грант № 99-1782).

Список литературы

[1] *И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман.* Функц. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. № 4. С. 13–30.

[2] *И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман.* Функц. анализ и его прилож. 1981. Т. 15. № 3. С. 23–40.

[3] *I. Dorfman.* Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations. Chichester: Wiley, 1993.

[4] *А. А. Балинский, С. П. Новиков.* ДАН СССР. 1985. Т. 283. № 5. С. 1036–1039.

[5] *С. П. Новиков.* УМН. 1985. Т. 40. № 4. С. 79–89.

[6] *Е. И. Зельманов.* ДАН СССР. 1987. Т. 292. № 6. С. 1294–1297.

[7] *Э. Б. Винберг.* ДАН СССР. 1961. Т. 141. № 3. С. 521–524.

[8] *О. И. Мохов.* Функц. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. № 4. С. 92–93.

[9] *B. Dubrovin.* Geometry of 2D topological field theories. In: Integrable Systems and Quantum Groups. Lectures given at the 1st Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E) (Montecatini Terme, Italy, June 14–22, 1993). Lecture Notes in Math. V. 1620. Eds. M. Francaviglia, S. Greco. Berlin: Springer, 1996. P. 120–348; hep-th/9407018.

[10] *B. Dubrovin, Y. Zhang.* Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov–Witten invariants. Preprint SISSA 65/2001/FM. Trieste: SISSA, 2001; math.DG/0108160.

[11] *О. И. Мохов.* ТМФ. 2002. Т. 133. № 2. С. 279–288; math.DG/0201281.

[12] *О. И. Мохов.* УМН. 2001. Т. 56. № 6. С. 161–162.

[13] *B. Dubrovin.* Flat pencils of metrics and Frobenius manifolds. Preprint SISSA 25/98/FM. Trieste: SISSA, 1998; math.DG/9803106.

[14] *О. И. Мохов.* ТМФ. 2002. Т. 130. № 2. С. 233–250; math.DG/0005081.

[15] *О. И. Мохов.* УМН. 2001. Т. 56. № 2. С. 221–222.

[16] *О. И. Мохов.* УМН. 2002. Т. 57. № 1. С. 157–158.

[17] *О. И. Мохов.* Функц. анализ и его прилож. 2001. Т. 35. № 2. С. 24–36; math.DG/0005051.

[18] *E. V. Ferapontov.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 2377–2388; math.DG/0005221.

[19] *S. M. Natanzon.* Extended cohomological fields theory and noncommutative Frobenius manifolds. math-ph/0206033.

[20] *A. Alexeevski, S. Natanzon.* Non-commutative extensions of two-dimensional topological field theories and Hurwitz numbers for real algebraic curves. math.GT/0202164.

[21] *О. И. Мохов.* УМН. 2000. Т. 55. № 4. С. 217–218.

[22] *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков.* ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785.

[23] *О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов.* УМН. 1990. Т. 45. № 3. С. 191–192.

[24] *F. Magri.* J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 5. P. 1156–1162.

[25] *О. И. Мохов.* Функц. анализ и его прилож. 2002. Т. 36. № 3. С. 36–47; math.DG/0201280.

[26] *О. И. Мохов.* УМН. 2002. Т. 57. № 3. С. 155–156.

[27] *О. И. Мохов.* Функц. анализ и его прилож. 2003. Т. 37. № 2 (в печати); math.DG/0201223.

[28] *О. И. Мохов.* УМН. 2002. Т. 57. № 5. С. 157–158.

[29] *O. I. Mokhov.* Phys. Lett. A. 1992. V. 166. № 3–4. P. 215–216.

[30] *О. И. Мохов.* УМН. 1998. Т. 53. № 3. С. 85–192.

[31] *O. I. Mokhov.* Rev. Math. Math. Phys. 2001. V. 11. № 2. P. 1–204.

[32] *О. И. Мохов.* УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 171–172.

[33] *О. И. Мохов.* Тр. МИРАН. 1999. Т. 225. С. 284–300.

[34] *O. I. Mokhov.* Rep. Math. Phys. 1999. V. 43. № 1/2. P. 247–256.

[35] *E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 340. P. 281–332.

[36] *E. Witten.* Surv. Diff. Geom. 1991. V. 1. P. 243–310.

[37] *R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 352. P. 59–86.

[38] *B. Dubrovin.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 379. P. 627–689.

Поступила в редакцию 24.IX.2002 г.