A. Kh. Tabarov, On some varieties of abelian quasigroups, *Diskr. Mat.*, 2000, Volume 12, Issue 3, 154–159

https://www.mathnet.ru/eng/dm346

Дискретная математика

том 12 выпуск 3 * 2000

УДК 512.548

О некоторых многообразиях абелевых квазигрупп

© 2000 г. А. Х. Табаров

Известно, что все примитивные квазигруппы, изотопные группам, характеризуются одним тождеством. Ранее Г. Б. Белявской и автором были описаны многообразия всех примитивных линейных, алинейных и абелевых квазигрупп (T-квазигрупп). В этой работе описываются многообразия абелевых квазигрупп определенного вида.

Известно, что все примитивные квазигруппы, изотопные группам, характеризуются одним тождеством (см. [1]). Г. Б. Белявской и автором в [2, 3] были описаны многообразия всех примитивных линейных, алинейных и абелевых квазигрупп (T-квазигрупп). В этой работе описываются многообразия абелевых квазигрупп определенного вида. Заметим, что совпадение класса примитивных абелевых (в смысле Маккензи) квазигрупп с классом T-квазигрупп доказано в [4].

Приведем основные определения и сведения, необходимые нам в дальнейшем. Согласно [5], квазигруппа $(Q,\cdot)$ — это множество Q с одной обозначаемой точкой бинарной операцией такой, что каждое из уравнений $ax = b$ и $ya = b$ однозначно разрешимо для любых $a, b \in Q$.

Примитивная квазигруппа $(Q,\cdot,/,\backslash)$ определяется как множество Q с тремя бинарными операциями, связанными соотношениями

$$(x/y)y = x, \quad xy/y = x, \quad x(x \backslash y) = y, \quad x \backslash xy = y.$$

Каждой квазигруппе $(Q,\cdot)$ соответствует примитивная квазигруппа $(Q,\cdot,/,\backslash)$, где $(Q,/)$ и $(Q,\backslash)$ — соответственно правая и левая обратные квазигруппы для $(Q,\cdot)$:

$$xy = z \iff z/y = x \iff x \backslash z = y.$$

Квазигруппа $(Q,\circ)$ изотопна квазигруппе $(Q,\cdot)$, если существует такая тройка подстановок $T = (\alpha,\beta,\gamma)$, что

$$\gamma(xy) = \alpha x \cdot \beta y$$

для всех $x, y \in Q$.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется линейной над группой $(Q,+)$ (см. [1]), если $(Q,\cdot)$ изотопна группе $(Q,+)$ и изотопия имеет вид

$$xy = \varphi x + c + \psi y,$$

где $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(Q,+)$, $c \in Q$. Частными случаями линейных квазигрупп являются абелевы квазигруппы или T-квазигруппы [6] (для них $(Q,+)$ — абелева группа).

Квазиавтоморфизм (антиквазиавтоморфизм) квазигруппы $(Q,\cdot)$ — это главная компонента γ автотопии (антиавтотопии) $T(\alpha,\beta,\gamma)$ квазигруппы $(Q,\cdot)$, то есть

$$\gamma(xy) = \alpha x \cdot \beta y \qquad (\gamma(xy) = \alpha y \cdot \beta x).$$

Согласно лемме 2.5 из [5], любой квазиавтоморфизм группы $(Q,+)$ имеет вид

$$\gamma x = R_s \gamma_0 x = L_s \gamma_0' x, \tag{1}$$

где $\gamma_0, \gamma_0' \in \mathrm{Aut}(Q,+)$, $R_s x = x + s$, $L_s x = s + x$.

Как отмечено в [1], утверждение, аналогичное лемме 2.5 из [5], справедливо и для антиквазиавтоморфизма γ (в [1] он называется обратным квазиавтоморфизмом). В этом случае γ_0 и γ_0' из (1) являются антиавтоморфизмами группы $(Q,+)$.

Теорема 1. *Для квазигруппы $(Q,\cdot)$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $(Q,\cdot)$ — *абелева квазигруппа,* $xy = \varphi x + c + \psi y$ *и* $\varphi\psi\varphi^{-1} = \psi\varphi^{-1}\psi$;

(2) *в примитивной квазигруппе* $(Q,\cdot,/,\backslash)$ *выполняется тождество*

$$[x(y/u)]z = [x(u/u)](zy/u); \tag{2}$$

(3) *в примитивной квазигруппе* $(Q,\cdot,/,\backslash)$ *выполняется тождество*

$$x[(u \backslash y)z] = (u \backslash yx)[u \backslash u)z]. \tag{3}$$

Доказательство. Докажем, что из 1 следует 2. Пусть $(Q,\cdot)$ — абелева квазигруппа с условием

$$\varphi\psi\varphi^{-1} = \psi\varphi^{-1}\psi.$$

Проверим справедливость тождества (2). Заметим, что из равенства $xy = \varphi x + c + \psi y$ следует, что

$$x/y = \varphi^{-1}x - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi y,$$
$$x \backslash y = -\psi^{-1}\varphi x - \psi^{-1}c + \psi^{-1}y.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
[x(y/x)]z &= \varphi[x(y/u)] + c + \psi z \\
&= \varphi[\varphi x + c + \psi(\varphi^{-1}y - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi u)] + c + \psi z \\
&= \varphi[\varphi x + c + \psi\varphi^{-1}y - \psi\varphi^{-1}c - \psi\varphi^{-1}\psi u] + c + \varphi z \\
&= \varphi^2 x + \varphi c + \varphi\psi\varphi^{-1}y\varphi\psi\varphi^{-1}c\varphi\psi\varphi^{-1}\psi u + c + \psi z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x(u/u)]\cdot(zy/u) &= \varphi[x(u/u)] + c + \psi(zy/u)\\
&= \varphi[\varphi x + c + \psi(u/u)] + c + \psi(zy/u)\\
&= \varphi[\varphi x + c + \psi(\varphi^{-1}u - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi u)]\\
&\quad + c + \psi(\varphi^{-1}(zy) - \varphi^{-1}c - \varphi^{-1}\psi u)\\
&= \varphi[\varphi x + c + \psi\varphi^{-1}u - \psi\varphi^{-1}c\psi\varphi^{-1}\psi u]\\
&\quad + c + \psi\varphi^{-1}(zy) - \psi\varphi^{-1}c - \psi\varphi^{-1}\psi u\\
&= \varphi^2 x + \varphi c + \varphi\psi\varphi^{-1}u - \varphi\psi\varphi^{-1}c - \varphi\psi\varphi^{-1}\psi u\\
&\quad + c + \psi\varphi^{-1}(\varphi z + c + \psi y) - \psi\varphi^{-1}c - \varphi\psi\varphi^{-1}u\\
&= \varphi^2 x + \varphi c - \varphi\psi\varphi^{-1}c - \varphi\psi\varphi^{-1}\psi u\\
&\quad + c + \psi z + \psi\varphi^{-1}c + \psi\varphi^{-1}\psi y - \psi\varphi^{-1}c\\
&= \varphi^2 x + \varphi c + \varphi\psi\varphi^{-1}y - \varphi\psi\varphi^{-1}c - \varphi\psi\varphi^{-1}\psi u + c + \psi z.
\end{aligned}$$

Следовательно, тождество (2) верно.

Докажем теперь, что из 2 следует 1. Пусть в примитивной квазигруппе $(Q,\cdot,/,\backslash)$ выполняется тождество (2). Фиксируем в (2) переменную u. Тогда по теореме Белоусова о четырех квазигруппах, связанных ассоциативным законом (см. [1]), квазигруппа $(Q,\cdot)$ изотопна группе, поэтому по теоерме Алберта любая лупа, изотопная квазигруппе $(Q,\cdot)$, является группой, в частности, группой является лупа $(Q,+)$, где

$$x + y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}, \qquad a,b \in Q.$$

Перейдем в (2) к операции $+$, тогда

$$R_a^[R_a x + L_b(y/u)] + L_b z = R_a[R_a x + L_b(u/u)] + L_b((R_a z + L_b y)/u).$$

Заменяя x на $R_a^{-1}x$, z на $L_b^{-1}z$ и y на $R_u y$, находим, что

$$R_a[x + L_b y] + z = R_a[x + L_b(u/u)] + L_b R_u^{-1}(R_a L_b^{-1} + L_b R_u y). \tag{4}$$

Полагая в (4) $z = 0$ и учитывая, что u — фиксированный элемент, получаем, что

$$R_a(x + L_b y) = \alpha x + \beta y$$

для соответствующих подстановок α и β, где R_a — квазиавтоморфизм группы $(Q,+)$:

$$R_a x = \varphi x + k, \quad \varphi \in \mathrm{Aut}(Q,+), \quad k \in Q.$$

Положим в (4) $u = a$ и подберем x так, чтобы $R_a(x + L_b(a/a)) = 0$. Тогда

$$\alpha_1 y + z = L_b R_a^{-1}(R_a L_b^{-1}z + L_b R_a y)$$

и $L_b R_a^{-1}$ — антиквазиавтоморфизм группы $(Q,+)$. Но R_a — квазиавтоморфизм, поэтому L_b — антиквазиавтоморфизм: $L_b y = t + \bar\psi y$, где $\bar\psi$ — антиавтоморфизм группы $(Q,+)$, $t \in Q$.

Таким образом,

$$xy = R_a x + L_b y = \varphi x + c + \bar\psi y, \qquad c = k + t.$$

Заметим, что тождество (2) можно записать в виде

$$xy\cdot z = x(u/u)\cdot[(z\cdot yu/u]. \tag{5}$$

Прежде чем перейти в (5) к операции $+$, заметим, что из равенства $xy = \varphi x + c + \bar{\psi}$ следует, что $x/y = \varphi^{-1}x - \varphi^{-1}\bar{\psi}y - \varphi^{-1}c$. Действительно, пусть $xy = z$. Тогда

$$x = z/y, \qquad z = \varphi^{-1}(z/y) + c + \bar{\psi}y,$$
$$\varphi^{-1}(z/y) = z - \bar{\psi}y - c, \qquad z/y = \varphi^{-1}z - \varphi^{-1}\bar{\psi}y - \varphi^{-1}c.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
xy\cdot z &= \varphi(\varphi x + c + \bar{\psi}y) + c + \bar{\psi}z = \varphi^2 x + \varphi c + \varphi\bar{\psi}y + c + \bar{\psi}z,\\
x(u/u)[(z\cdot yu)/u] &= \varphi(\varphi x + c + \bar{\psi}(u/u)) + c + \bar{\psi}[(z\cdot yu)/u]\\
&= \varphi^2 x + \varphi c + \varphi\bar{\psi}(\varphi^{-1}u - \varphi^{-1}\bar{\psi}u - \varphi^{-1}c) + c\\
&\quad + \bar{\psi}[\varphi^{-1}(\varphi z + c + \bar{\psi}(\varphi y + c + \bar{\psi}u) - \varphi^{-1}\bar{\psi}u - \varphi^{-1}c]\\
&= \varphi^2 x + \varphi c - \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}c - \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}u + \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}u + c\\
&\quad + \bar{\psi}[z + \varphi^{-1}c + \varphi^{-1}\bar{\psi}^2u + \varphi^{-1}\bar{\psi}c + \varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y - \varphi^{-1}\bar{\psi}u - \varphi^{-1}c]\\
&= \varphi^2 x + \varphi c - \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}c - \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}u\\
&\quad + \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}u + c - \bar{\psi}\varphi^{-1}c - \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}u\\
&\quad + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}^2u + \bar{\psi}\varphi^{-1}c + \bar{\psi}z.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
\varphi^2 x + \varphi c + \varphi\bar{\psi}y + c + \bar{\psi}z = \varphi^2 x + \varphi c - \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}&\\
- \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}u + \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}u + c - \bar{\psi}\varphi^{-1}c&\\
- \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}u + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}c&\\
+ \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}^2u + \bar{\psi}\varphi^{-1}c + \bar{\psi}z.&
\end{aligned}$$

После сокращения получаем, что

$$\begin{aligned}
\varphi\bar{\psi}y + c = \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}c - \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}u + \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}u + c - \bar{\psi}\varphi^{-1}c - \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}u&\\
+ \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}c + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}^2u + \bar{\psi}\varphi^{-1}c.&
\end{aligned}$$

Пусть $u = 0$. Тогда

$$\varphi\bar{\psi}y + c = -\varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}c + c - \bar{\psi}\varphi^{-1}c\bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}c + \bar{\psi}\varphi^{-1}c.$$

Полагая $y = 0$, находим, что

$$c = -\varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}c + c - \bar{\psi}\varphi^{-1}c + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}c + \bar{\psi}\varphi^{-1}c.$$

Подставляя это выражение для c в левую часть предыдущего равенства, находим, что

$$\begin{aligned}
&\varphi\bar{\psi}y - \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}c + c - \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}c + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}c + \bar{\psi}\varphi^{-1}c\\
&\qquad = -\varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}c + c - \bar{\psi}\varphi^{-1}c + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}c + \bar{\psi}\varphi^{-1}c,
\end{aligned}$$

откуда после сокращений приходим к равенству

$$\varphi\bar{\psi}y - \varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}c + c - \bar{\psi}\varphi^{-1}c = -\varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}c + c - \bar{\psi}\varphi^{-1}c + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y.$$

Положим $-\varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}c + c - \bar{\psi}\varphi^{-1}c = p$, где $p \in Q$. Тогда

$$\varphi\bar{\psi}y + p = p + \bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y,$$

или

$$\tilde{R}_p\varphi\bar{\psi}y = \tilde{L}_p\bar{\psi}\varphi^{-1}\bar{\psi}\varphi y, \tag{6}$$

откуда

$$\tilde{L}_p^{-1}\tilde{R}_p y = \bar{\psi}\varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}y.$$

Но $\bar{\psi}\varphi\bar{\psi}\varphi^{-1}$ — антиавтоморфизм группы $(Q, +)$. Поэтому

$$\tilde{L}_p^{-1}\tilde{R}_p(x + y) = \tilde{L}_p^{-1}\tilde{R}_p y + \tilde{L}_p^{-1}\tilde{R}_p x,$$

или

$$-p + x + y + p = -p + y + p - p + x + p,$$

откуда $x + y = y + x$, то есть группа $(Q, +)$ абелева и поэтому $\bar{\psi} = \psi \in Aut(Q, +)$. Следовательно, $(Q, \cdot)$ — абелева полугруппа. Далее, в абелевой группе $\tilde{L}_x = \tilde{R}_x$ для любого $x \in Q$. Поэтому из (6) следует, что $\varphi\psi y = \psi\varphi^{-1}\psi\varphi y$ или $\varphi\psi\varphi^{-1} = \psi\varphi^{-1}\psi$, что и требовалось доказать.

Импликации $1 \Rightarrow 3$ и $3 \Rightarrow 1$ проверяются аналогичным образом.

Следствие 1. *Многообразие всех примитивных абелевых квазигрупп с условием* $\varphi\psi\varphi^{-1} = \psi\varphi^{-1}\psi$ *характеризуется тождеством* (2) *или* (3).

Приведем другие условия на автоморфизмы, приводящие к некоторым подмногообразиям абелевых квазигрупп, связанным с хорошо известными (неуравновешенными) тождествами.

Теорема 2. *Для абелевой квазигруппы* $(Q, \cdot)$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) *квазигруппа* $(Q, \cdot)$ *имеет вид*

$$xy = \varphi x + \psi y,$$

где $\varphi^2 + \psi = \psi^2 + \varphi = \varphi\psi$, $c = 0$;

(2) *в* $(Q, \cdot)$ *выполняется второе тождество Стейна*

$$x \cdot yx = yx \cdot y.$$

Доказательство. Докажем, что $2 \Rightarrow 1$. Пусть в абелевой квазигруппе $(Q, \cdot)$ выполняется тождество $x \cdot yx = yx \cdot y$. Тогда $(Q, \cdot)$ идемпотентна (см. [8]), следовательно, медиальна (см. [6]) и $c = 0$, $\varphi + \psi = \varepsilon$. Учитывая это, переходим в тождестве $x \cdot yx = yx \cdot y$ к операции $+$ и получаем, что

$$x \cdot yx = \varphi x + \psi(\varphi y + \psi x) = \varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 x,$$
$$yx \cdot y = \varphi(\varphi y + \psi x) + \psi y = \varphi^2 y + \varphi\psi x + \psi y,$$

или

$$\varphi x + \psi\varphi y + \psi^2 x = \varphi^2 y + \varphi\psi x + \psi y. \tag{7}$$

Пусть $x = 0$, тогда $\psi\varphi y = \varphi^2 y + \psi y$, $\psi\varphi = \varphi^2 + \psi$. Полагая в (7) $y = 0$, находим, что

$$\varphi x + \psi^2 x = \varphi\psi x, \qquad \varphi\psi = \psi^2 + \varphi.$$

В силу медиальности $(Q, \cdot)$

$$\varphi^2 + \psi = \psi^2 + \varphi = \varphi\psi.$$

Обратная импликация легко проверяется.

Аналогично можно доказать, что для абелевых квазигрупп справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Для абелевой квазигруппы $(Q, \cdot)$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *квазигруппа $(Q, \cdot)$ имеет вид*

$$xy = \varphi x + \psi y,$$

где $\psi = \varphi + \varepsilon$, $(Q, \cdot)$ — группа экспонента два

$$(xy = \varphi x + c + \psi y, \quad \varphi\psi = J\psi\varphi, \quad \varphi^2 + \psi^2 = \varepsilon, \quad \varphi c + \psi c + c = 0);$$

(2) *в квазигруппе $(Q, \cdot)$ выполняется первое (второе) тождество Шредера*

$$x \cdot xy = xy \cdot y \qquad (xy \cdot yx = x).$$

Список литературы

1. Белоусов В. Д., Уравновешенные тождества в квазигруппах. *Матем. сб.* (1966) **70**, 55–97.
2. Belyavskaya G., Tabarov A., Characterization of primitive linear, alinear, and abelian quasigroups. *Quasigroups and Related Systems* (1994) **1**, №1, 8–21.
3. Белявская Г. Б., Табаров А. Х., Характеристика линейных и алинейных квазигрупп. *Дискретная математика* (1992) **2**, №2, 142–147.
4. Belyavskaya G. B., Abelian quasigroups are T-quasigroups. *Quasigroups and Related Systems* (1994) **1**, №1, 39–49.
5. Белоусов В. Д., *Основы теории квазигрупп и луп.* Наука, Москва, 1967.
6. Kepka T., Nemec P., T-quasigroups. *Acta Univ. Carolinae Math. & Phys.* (1971) **12**, №1, 39–49, №2, 31–49.
7. Табаров А. Х., *T-квазигруппы с дополнительными тождествами.* Деп. ВИНИТИ 09.01.91, №163-В91.
8. Белоусов В. Д., *Парастрофно-ортогональные квазигруппы.* Штиинца, Кишинев, 1983.

Статья поступила 12.02.2000.