В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, Об асимптотике решения однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка в нормальной форме Лиувилля, *Дифференц. уравнения*, 1998, том 34, номер 8, 1137–1139

1998. Т. 34, № 8. С. 1137 — 1139

УДК 517.984.5

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ЛИУВИЛЛЯ

В. А. Винокуров, В. А. Садовничий

1. Рассматривается задача на собственные значения для линейного дифференциального уравнения второго порядка в нормальной форме Лиувилля

$$y'' + (\lambda + q(x))y = 0 \tag{1}$$

на отрезке $[0,l]$ с вещественным суммируемым потенциалом $q(x)$ и краевыми условиями типа Штурма

$$B_0 Y(0) = 0, \tag{2}$$

$$B_l Y(l) = 0, \tag{3}$$

где $B_0 = (\cos(\varphi_0), \sin(\varphi_0))$ и $B_l = (\cos(\varphi_l), \sin(\varphi_l))$ — матрицы-строки из линейного пространства матриц $M(1 \times 2, \mathbf{R})$, $\varphi_0 \in \mathbf{R}$, $\varphi_l \in \mathbf{R}$, $Y(x) = \operatorname{colon}(y(x), y'(x))$ — матрица-столбец из $M(2 \times 1, \mathbf{R})$, а также с периодическими краевыми условиями

$$Y(0) = Y(l). \tag{4}$$

Известны [1 — 3] асимптотические формулы для величин $\sqrt{\lambda_n}$ с ошибкой порядка $O\left(\dfrac{1}{n^{m+1}}\right)$ при $n \to \infty$ при соответствующих дополнительных предположениях гладкости на функцию $q(x)$, тем больших, чем больше параметр m. На семинаре по спектральной теории МГУ В. А. Садовничим поставлен вопрос о связи свойств гладкости потенциала $q(x)$ с существованием асимптотического представления собственных значений при $n \to \infty$. В настоящей и последующей работах дается ответ на указанный вопрос. А именно, опираясь на явное представление решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений и новую форму ряда Хаусдорфа [4] и используя операторный подход [5], строятся явные асимптотические формулы для собственных значений λ_n и нормированных собственных функций $y_n(x)$ с ошибкой $O\left(\dfrac{1}{n^{m+1}}\right)$ при $n \to \infty$ для любого $m = 0, 1, 2, \ldots,$ предполагая лишь суммируемость потенциала $q(x)$ на сегменте $[0,l]$.

В частном случае первой краевой задачи $(y(0) = 0, y(l) = 0)$ в первом порядке $(m = 1)$ предлагаемые формулы при $n \geq (1/\pi)(125b + 1/4)$ имеют следующий вид:

$$\sqrt{\lambda_n} = n\frac{\pi}{l} - \frac{1}{2\pi n}\int_0^l q(t)\left(1 - \cos\left(2n\frac{\pi}{l}t\right)\right)dt + \psi_{n,1},$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right) + \frac{1}{2\pi n}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{l}x\right)\left(l\int_0^x q(t)dt - x\int_0^l q(t)dt + x\int_0^l q(t)\cos\left(2n\frac{\pi}{l}t\right)dt - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - l\int_0^x q(t)\cos\left(2n\frac{\pi}{l}t\right)dt\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)\left(\int_0^l (l-t)q(t)\sin\left(2n\frac{\pi}{l}t\right)dt - l\int_0^x q(t)\sin\left(2n\frac{\pi}{l}t\right)dt\right)\right)\right) + \Delta y_n(x),$$

где $b \equiv l\int_0^l |q(t)|dt$, а величины $\psi_{n,1}$ и $\Delta y_n(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\psi_{n,1}| \leq 20\frac{b^2}{l(n\pi - 1/4)^2}, \quad |\Delta y_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{256{,}5b^2 + 4{,}1b}{(n\pi - 1/4)^2}.$$

Цель настоящей работы — построение асимптотического представления решения уравнения (1) любой степени точности по спектральному параметру.

2. Матрица-столбец $Y(x)$ удовлетворяет на сегменте $[0,l]$ дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}Y(x) = A(x,\lambda)Y(x), \tag{5}$$

где матрица $A(x,\lambda) \in M(2\times 2, \mathbf{R})$ равна

$$A(x,\lambda) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\lambda + q(x)) & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in [0,l], \quad \lambda \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

Введем матрицу $W(x,\lambda) \in M(2\times 2, \mathbf{R})$ фундаментальной системы решений для однородного линейного дифференциального уравнения (1) или матрицант, определяемый как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}W(x,\lambda) = A(x,\lambda)W(x,\lambda), \tag{7}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$W(0,\lambda) = E, \tag{8}$$

где E — единичная матрица из $M(2\times 2, \mathbf{R})$. Решение начальной задачи (7), (8) понимается в смысле выполнения интегрального уравнения

$$W(x,\lambda) = E + \int\limits_0^x A(t,\lambda)W(t,\lambda)dt, \quad x \in [0,l]. \tag{9}$$

Согласно [4], для суммируемой на $[0,1]$ функции $q(x)$ существует единственное абсолютно непрерывное на $[0,l]$ решение $W(x,\lambda)$ интегрального уравнения (9).

Абсолютно непрерывное на $[0,l]$ решение $Y(x)$ дифференциального уравнения (5) представимо в виде $Y(x) = W(x,\lambda)C$, где $C \in \mathbf{R}^2$, причем $C = Y(0)$. Краевые условия (2), (3) типа Штурма эквивалентны требованию существования такого ненулевого вектора C, что выполнены соотношения $B_0C = 0$, $B_lW(l,\lambda)C = 0$, т.е. собственное значение λ задачи Штурма — Лиувилля есть корень уравнения $\det\begin{pmatrix} B_lW(l,\lambda) \\ B_0 \end{pmatrix} = 0$. Периодические краевые условия (4) приводят к требованию существования такого ненулевого вектора $C \in \mathbf{R}^2$, что $C = W(l,\lambda)C$, т.е. к требованию, чтобы единица была собственным значением матрицы $W(l,\lambda)$.

Таким образом, краевая задача на собственные значения сведена к изучению матрицанта $W(l,\lambda)$.

3. Пусть $\lambda > 0$, $s \equiv \sqrt{\lambda}$, $s \in \mathbf{R}$. Заменой переменных вида

$$W(x,s^2) = G(s)\exp(xsK_1)W_f(x,s)G^{-1}(s), \tag{10}$$

где $G(s) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ is & -is \end{pmatrix}$, $K_1 \equiv \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, начальная задача (7), (8) для матричной функции $W(x,\lambda) \in M(2\times 2, \mathbf{R})$ сводится к начальной задаче

$$dW_f(x,s)/dx = A_f(x,s)W_f(x,s), \quad W_f(0,s) = E, \tag{11}$$

для матричной функции $W_f(x,s) \in M(2\times 2, \mathbf{C})$ с матрицей

$$A_f(x,s) \equiv (q(x)/s)R(2xs), \tag{12}$$

где матрица $R(t) \in M(2\times 2, \mathbf{C})$, $t \in \mathbf{R}$, имеет вид

$$R(t) \equiv \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & \exp(-it) \\ -\exp(it) & -1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

4. На пространстве Λ^m ($\Lambda = \mathbf{R}$ или $\Lambda = \mathbf{C}$) m-мерных числовых векторов $Q \in \Lambda^m$ введем норму $|Q| \equiv (\sum\limits_{i=1}^m |q_i|^2)^{1/2}$, а на пространстве матриц $M(m\times m, \Lambda)$ — соответствующую операторную норму $|A|$ матрицы $A \in M(m\times m, \Lambda)$.

Далее нам потребуются следующие обозначения и утверждения из [4]. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R^n$ — упорядоченный набор из n вещественных чисел. Сравнивая два соседних числа ξ_i и ξ_{i+1} из набора, говорим, что имеет место подъем, если $\xi_{i+1} > \xi_i$. Число подъемов в данном наборе обозначим через $u(\xi)$. Для натурального числа n и числа $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ определим число $V(n,k) \equiv (-1)^{n-k-1}(n-k-1)!k!/n!$. Введем отображение $\operatorname{val} n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, определенное при каждом $\xi \in \mathbf{R}^n$ правилом $\operatorname{val} n(\xi) \equiv V(n, u(\xi))$. Пусть $i \in \{1,2\}^n$, $i = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$; $\Pi_n \equiv [0,1]^n$ — единичный куб в $\mathbf{R}^n$. Определим коэффициенты

$$\operatorname{kap} n(i) \equiv \int\limits_{\Pi_n}\!\!\ldots\!\int \operatorname{val} n(i+\xi)d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

Пусть $A(x)$ — суммируемая функция аргумента $x \in [0,l]$ со значениями в $M(m\times m, \Lambda)$ и $E \in M(m\times m, \Lambda)$ — единичная матрица.

Утверждение 1. *Если* $\int\limits_0^l |A(x)|dx < 1$, *то решение начальной задачи* $dX(x)/dx = A(x)X(x)$, $X(0) = E$ *в классе абсолютно непрерывных функций* $X(x)$ *на отрезке* $[0,l]$ *со значениями в* $M(m\times m, \Lambda)$ *существует, единственно и представимо в виде* $X(x) = \exp(J(x))$, *где*

$$J(x) = \sum_{k=1}^{\infty} J_k(x), \tag{14}$$

$$J_1(x) \equiv \int\limits_0^x A(\xi_1)d\xi_1, \tag{15}$$

$$J_k(x) \equiv \frac{1}{k}\int\limits_0^x \ldots \int\limits_0^x \operatorname{val} k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)[A(\xi_k), \ldots, [A(\xi_2), A(\xi_1)] \ldots] d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_k, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{16}$$

Здесь $[A, B] \equiv AB - BA$ *— коммутатор двух матриц. Ряд (14) сходится абсолютно и равномерно по* $x \in [0, l]$ *в банаховой алгебре матриц* $M(m \times m, \Lambda)$.

Утверждение 2. *Пусть матрицы* $A(1), A(2) \in M(m \times m, \Lambda)$ *удовлетворяют условию* $|A(1)| + |A(2)| < 1$. *Тогда справедливо равенство* $\exp(A(2))\exp(A(1)) = \exp(H(A(1), A(2)))$, *где функция Хаусдорфа* $H(A(1), A(2))$ *задается абсолютно сходящимся в банаховой алгебре* $M(m \times m, \Lambda)$ *рядом* $H(A(1), A(2)) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} H_k(A(1), A(2))$ *с членами* $H_1(A(1), A(2)) \equiv A(1) + A(2)$, $H_k(A(1), A(2)) \equiv \dfrac{1}{k} \sum\limits_{i \in \{1,2\}^k} \operatorname{kap} k(i) A[i]$, $k = 2, 3, \ldots$, *где* $A[i] \equiv$ $\equiv [A(i_k), \ldots, [A(i_2), A(i_1)] \ldots]$.

5. Из выражений (12), (13) следует представление

$$A_f(x, s) = (q(x)/(2s))(K_1 + \sin(2xs)K_2 + \cos(2xs)K_3),$$

где K_1, K_2, K_3 — матрицы вида

$$K_1 \equiv \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad K_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы K_1, K_2, K_3 линейно независимы над полем $\mathbf{C}$ и для них справедливы соотношения коммутации $[K_1, K_2] = 2K_3$, $[K_1, K_3] = -2K_2$, $[K_2, K_3] = -2K_1$. Линейную оболочку матриц K_1, K_2, K_3 над полем $\mathbf{R}$ в алгебре матриц $M(2 \times 2, \mathbf{C})$ обозначим через Lit. Множество Lit — алгебра Ли размерности 3 с базисом из элементов K_1, K_2, K_3, который назовем K-базисом. Каждая матрица $A \in \mathrm{Lit}$ представляется единственным образом в виде линейной комбинации $A = a_1K_1 + a_2K_2 + a_3K_3$ с действительными коэффициентами a_1, a_2, a_3 — координатами матрицы A в K-базисе.

6. Применяя утверждение 1 к решению начальной задачи (11), преобразуем представление (10) матриканта.

Теорема 1. *Пусть* $a > \int\limits_0^l |q(x)|dx$, *тогда на множестве* $D(l, a) \equiv \{(x, s) \in \mathbf{R}^2 |\ x \in [0, l],\ |s| \geq a\}$ *справедливо представление матриканта* $W(x, s^2) = G(s)\exp(xsK_1)\exp(J(x, s))G^{-1}(s)$. *Здесь* $J(x, s)$ *есть сумма ряда*

$$J(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} J_k(x, s), \tag{17}$$

члены которого строятся по формулам (15), (16) с функцией $A(x) \equiv A_f(x, s)$. *Ряд (17) сходится абсолютно и равномерно на множестве* $D(l, a)$ *к функции* $J(x, s)$, *непрерывной и имеющей непрерывную частную производную по* s.

Обозначим через $\lambda_{n,0}$ n-е положительное собственное значение невозмущенной краевой задачи с $q(x) \equiv 0$, а через $\mu_n = \sqrt{\lambda_{n,0}}$ положительное значение квадратного корня. В окрестности значения $s = \mu_n$ введем величину $r \equiv s - \mu_n$, тогда $s = \mu_n + r$ и $\exp(xsK_1)\exp(J(x, s)) = \exp(x\mu_nK_1)\exp(xrK_1)\exp(J(x, s))$. Применяя к произведению экспонент $\exp(xrK_1)\exp(J(x, s))$ утверждение 2, получаем новое представление матриканта.

Теорема 2. *Пусть натуральное число* n *удовлетворяет условию* $l\mu_n \geq 5b + 1/4$, *тогда в прямоугольнике* $S \equiv \{(x, r) \in \mathbf{R}^2 |\ x \in [0, l],\ r \in [-1/(4l), 1/(4l)]\}$ *справедливо представление матриканта*

$$W(x, s^2) = G(s)\exp(x\mu_nK_1)\exp(H(J(x, s), xrK_1))G^{-1}(s),$$

причем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} H_k(J(x, s), xrK_1)$ *сходится в прямоугольнике* S *абсолютно и равномерно к непрерывной функции* $H(J(x, s), xrK_1)$ *аргументов* (x, r), *имеющей непрерывную частную производную по переменной* r.

Литература

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
2. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М., 1970.
3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
4. *Винокуров В. А.* // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 4. С. 792 — 797.
5. *Садовничий В. А.* Теория операторов. М., 1986.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 11 марта 1998 г.