

УДК 515.162.8

АЛГОРИТМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ В ТЕОРИИ УЗЛОВ

И. А. Дынников

В работе обсуждаются вопросы, связанные с проблемой построения алгоритмов для сравнения узлов и зацеплений. Дается обзор существующих подходов и основных результатов в этой области. В частности, обсуждаются различные комбинаторные способы представления зацеплений, излагаются алгоритм Хакена распознавания тривиального узла и схема построения общего алгоритма сравнения зацеплений, основанного на идеях Хакена; описывается подход, основанный на представлении зацеплений замкнутыми косами; для групп кос описываются известные алгоритмы для решения проблемы равенства и проблемы сопряженности; обсуждается сложность рассматриваемых алгоритмов. В работе приводится также новый способ комбинаторного описания узлов и основанный на нем новый алгоритм распознавания тривиального узла, использующий процедуру монотонного упрощения. В завершение работы сформулировано несколько задач, решение которых позволило бы продвинуться в “алгоритмизации” теории узлов.

Библиография: 76 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	46
2. Способы представления узлов и зацеплений	48
2.1. Выбор комбинаторной модели	48
2.2. Плоские диаграммы	49
2.3. Замкнутые косы	49
2.4. Прямоугольные диаграммы	51
2.5. Переход от одного задания к другому	54
3. Метод Хакена	55
4. Геометризация	59
5. Алгоритмы для кос	60
5.1. Проблема равенства	60
5.2. Проблема сопряженности	65
5.3. Применение к узлам	68
6. Монотонное упрощение	69
7. Сложность алгоритмов	82
8. Некоторые новые алгоритмические задачи теории узлов	84

8.1. Флайпы прямоугольных диаграмм	84
8.2. Алгоритм Хакена и каноническая триангуляция	85
8.3. Сведение классификации зацеплений к проблеме равенства в конечно определенной полугруппе	87
8.4. Вложение группы кос в конечно определенные группы	88
Список литературы	89

1. Введение

Вопрос о возможности сравнения двух данных узлов в \mathbb{R}^3 интересует математиков по меньшей мере с конца XIX века. Первые таблицы узлов малой сложности появились уже в [1], [2]. Основы математической теории узлов сформировались в начале XX века в работах Дж. Александера, М. Дэна, Г. Зейферта и К. Райдемайстера. Тогда же появились первые доказательства нетривиальности конкретных узлов.

В работах [3], [4] узлы были представлены в чисто комбинаторных терминах – с помощью регулярных проекций и движений Райдемайстера. Позднее было придумано другое комбинаторное описание – с помощью замкнутых кос и движений Маркова [5], [6]. Сами группы кос были определены Э. Артином [7], [8], который, кроме того, решил для них проблему равенства. В первой половине XX века появился ряд доказательств нетривиальности и неэквивалентности конкретных узлов (например, с использованием многочлена Александера), однако до середины 1950-х годов не было придумано ни одного общего алгоритма, устанавливающего, является ли данный узел тривиальным, и, тем более, для сравнения двух произвольных узлов.

В [9] В. Хакен, используя теорию нормальных Г. Кнезера [10], предложил алгоритм для распознавания тривиального узла, вычисления рода произвольного узла, а также определения, является ли данное зацепление разводимым. Х. Шуберт [11], продолжая работу Хакена, построил алгоритм для разложения неразводимого зацепления в связную сумму простых слагаемых. Существование и единственность такого разложения для узлов была доказана Шубертом ранее в [12], а на произвольные зацепления этот результат обобщил Й. Хашицуме [13].

Хакен сформулировал также идеи решения общей задачи распознавания зацеплений с помощью распознавания их дополнительных пространств, которые являются так называемыми достаточно большими многообразиями [14], [15]. Значительный прогресс в реализации программы Хакена был достигнут благодаря развитию теории достаточно больших многообразий в работах Ф. Вальдхаузена [16], Йоганнсона [17], У. Джейко и П. Шэлена [18], а также решению Дж. Хемионом проблемы сопряженности в группах классов отображений [19]. Проблема алгоритмической классификации неприводимых достаточно больших многообразий (многообразий Хакена) неоднократно объявлялась решенной [20]–[22]. Однако, как указал С. В. Матвеев [23], этих результатов было все еще недостаточно для завершения программы Хакена. Матвеев заделал пробел с помощью более поздних результатов [24], [25]. Подробное описание алгоритма распознавания многообразий Хакена, дающего в частном случае алгоритм распознавания зацеплений, появилось лишь недавно в [26].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00659).

Таким образом, вопрос о формальной разрешимости задачи сравнения двух данных зацеплений считается решенным. Однако алгоритм в [26] настолько сложен, что превратить его в работающую компьютерную программу практически невозможно даже в тех случаях, когда эквивалентность или неэквивалентность данных узлов “очевидна”. Это обстоятельство наводит на мысль, что существующий алгоритм далеко не оптимален, и мотивирует поиск новых подходов к алгоритмической классификации.

Другой подход к алгоритмической классификации многообразий Хакена основан на теореме Тёрстона о гиперболизации [27], [28]. Однако подробное его описание в литературе отсутствует.

В конце 1960-х в работах Г.С. Маканина [29] и Ф. Гарсайда [30] независимо была решена проблема сопряженности в группах кос. Полученные алгоритмы требовали очень большого перебора. Гарсайд указал также и новый алгоритм для решения проблемы равенства в группе кос, этот алгоритм также был очень медленным. Отметим, что примерно до середины 1980-х годов сложность алгоритмов, не связанных напрямую с решением технических задач, не обсуждалась. Интерес к подобным вопросам появился в связи с широким распространением персональных компьютеров, позволивших применять построенные алгоритмы для дальнейшего исследования. В 1980-х гг. У. Тёрстон существенно улучшил алгоритм Гарсайда для распознавания кос и получил алгоритм с полиномиальной по длине входа оценкой на время работы [31]. Тёрстон доказал, что группы кос обладают биавтоматной структурой.

Впоследствии и алгоритм для распознавания классов сопряженности кос был существенно ускорен [32]–[34].

В конце 1980-х – начале 1990-х Дж. Бирман и У. Менэско стали активно развивать подход Александера–Маркова, основанный на представлении зацеплений замкнутыми косами [35]–[41]. Развитые ими методы привели к построению нового алгоритма для распознавания тривиального узла [42], который, по-видимому, уступает алгоритму Хакена в скорости, но позволяет получать данные, полезные для дальнейшего исследования. Эта теория по-прежнему находится в стадии активной разработки.

В недавней работе [43] автор предложил еще один алгоритм распознавания тривиального узла, принципиальное отличие которого от ранее известных состоит в том, что он не использует дополнительные конструкции такие, как триангуляции дополнительного пространства и расслоенные диски, а работает непосредственно с диаграммами узлов, монотонно их упрощая. Тот же метод позволяет находить разложение зацепления на простые неразводимые слагаемые.

Настоящая работа посвящена обзору результатов, связанных с алгоритмическим распознаванием узлов и зацеплений. По возможности мы приводим ключевые конструкции самих алгоритмов, либо излагаем их основные идеи. При этом мы касаемся далеко не всех алгоритмических аспектов теории узлов. Мы не рассматриваем вопросов, связанных с перечислением узлов, т.е. построением списков узлов, в которых представлен каждый изотопический класс, но не обязательно ровно один раз. По этому поводу см. [44]–[46]. Мы также не обсуждаем вопросов, связанных с алгоритмами вычисления классических инвариантов узлов (исключение составляет род узла). Этому вопросу посвящена, например, работа [47].

Здесь предлагается также доказательство основного результата [43], несколько от-

личное от первоначального. Это доказательство возникло в результате обсуждения с И. Эголом во время моего визита в университет штата Иллинойс в Чикаго в январе 2003 года.

Мы предполагаем известными стандартные понятия теории узлов, которые можно найти в любом учебнике по узлам, например, [48], [49]: узел, зацепление, связная сумма, несвязная сумма, поверхность Зейферта, род узла, тривиальный узел. Рассматриваются только ручные узлы. В зависимости от ситуации, мы работаем в гладкой или кусочно-линейной категории, не оговаривая это специально. Все объемлющие изотопии для простоты называются просто изотопиями, поскольку никаких других мы не рассматриваем.

2. Способы представления узлов и зацеплений

2.1. Выбор комбинаторной модели. Построение любого алгоритма, работающего с топологическими объектами такими, как узлы, естественно начать с выбора некоторого комбинаторного способа задания этих объектов. Вопрос о том, с помощью какой комбинаторной модели лучше представлять узлы, может показаться неважным на первый взгляд. Действительно, все способы, которые мы здесь опишем, “полиномиально эквивалентны” с точки зрения сложности использующих их алгоритмов. А именно, если узел представлен каким-либо из указанных здесь способов, перевести его на другие “языки” можно за время, полиномиальное по сложности исходного представления. Таким образом, если для одного способа представления узлов какой-либо алгоритм оказался полиномиальным, то полиномиальный алгоритм, решающий ту же задачу, найдется и для других способов. На сегодняшний день не существует по-настоящему быстрых алгоритмов, распознающих узлы, и алгоритмическая сложность задач, связанных с узлами, обсуждается на уровне принадлежности классам P и (чаще) NP.

Несмотря на то только что сказанное, мы не исключаем, что удачный выбор “комбинаторной модели” для узлов мог бы подсказать более эффективное решение алгоритмических задач теории узлов. Стоит ли напоминать, насколько важным является выбор позиционной системы счисления для построения алгоритмов выполнения арифметических операций? Возможно, что трудности в построении алгоритмов распознавания узлов связаны, по крайней мере отчасти, с неудачным выбором “системы счисления”.

Обозначим через \mathcal{L} множество изотопических классов всех зацеплений. Формально под *комбинаторной моделью* зацеплений мы понимаем набор (X, M, φ, c) , где X – некоторое перечислимое множество (элементы которого называются *диаграммами*), M – некоторое перечислимое подмножество в $X \times X$ (элементы которого называются *элементарными преобразованиями*), $\varphi: X \rightarrow \mathcal{L}$ – некоторое отображение и $c: X \rightarrow \mathbb{N}$ – некоторая вычислимая функция (называемая *функцией сложности*) такие, что выполнены следующие условия:

- 1) существует алгоритм, вычисляющий по заданной диаграмме D некоторое зацепление L_D из класса $\varphi(D)$ как набор ломаных в \mathbb{R}^3 с целочисленными вершинами, а также алгоритм, вычисляющий по заданному зацеплению L , представленному набором ломаных в \mathbb{R}^3 , некоторую диаграмму D такую, что $L \in \varphi(D)$ (в частности, отображение φ должно быть сюръективно);

- 2) равенство $\varphi(D) = \varphi(D')$ имеет место тогда и только тогда, когда $D \sim D'$, где через \sim мы обозначили отношение эквивалентности в X , порожденное отношением M ;
- 3) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует лишь конечное число диаграмм $D \in X$ таких, что $c(D) \leq n$.

Мы будем пользоваться следующими комбинаторными моделями зацеплений.

2.2. Плоские диаграммы. Это – наиболее часто используемый способ представления зацеплений. В качестве диаграмм используются регулярные проекции зацеплений на плоскость, не имеющие тройных точек. В двойных точках указывается, какая из пересекающихся дуг проходит выше. Такие проекции рассматриваются с точностью до изотопии.

В качестве элементарных преобразований выступают *движения Райдемайстера*, см. рис. 1. Сложность плоской диаграммы D мы определяем как

$$c(D) = \text{число пересечений в } D + \text{число связных компонент } D.$$

Возможность алгоритмически перечислить плоские диаграммы и построить по каждой диаграмме соответствующее зацепление, и наоборот, очевидна. Выполнение условия 2) в определении комбинаторной модели устанавливается следующей теоремой Райдемайстера.

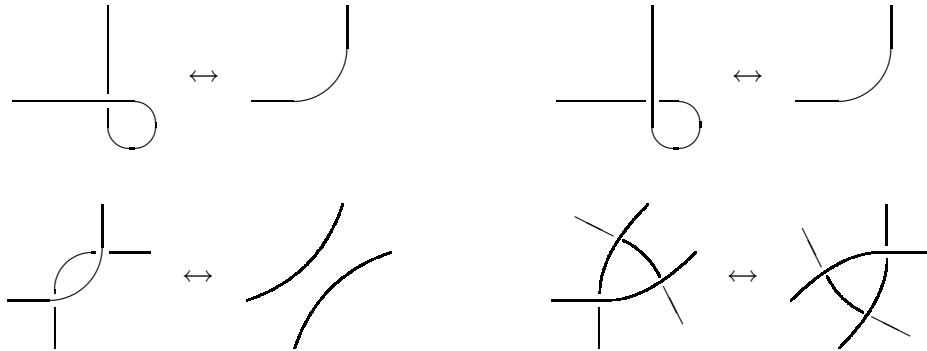


Рис. 1. Движения Райдемайстера

ТЕОРЕМА 2.1 (Райдемайстер [4]). *Плоские диаграммы D и D' задают изотопные зацепления тогда и только тогда, когда найдется конечная последовательность движений Райдемайстера $D = D_0 \mapsto D_1 \mapsto \dots \mapsto D_N = D'$.*

Все, сказанное выше, буквально распространяется на случай ориентированных зацеплений. Для этого вместо обычных плоских диаграмм следует рассматривать ориентированные диаграммы зацеплений.

2.3. Замкнутые косы. *Косой* из n нитей называется одномерное подмногообразие $b \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1\}$, имеющее n связных компонент (называемых нитями), такое, что

- 1) пересечение b с плоскостями $x = 0$ и $x = 1$ состоит из точек $(0, k, 0)$, $(1, k, 0)$, $k = 1, 2, \dots, n$;

- 2) ограничение координаты x на каждую нить является строго монотонной функцией.

Косы называются *эквивалентными*, если они изотопны в $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1\}$, где предполагается, что плоскости $x = 0, 1$ при изотопии фиксированы.

Множество изотопических классов кос на n нитях обозначается через B_n . Для двух кос b_1, b_2 композиция $b_1 \circ b_2$ определяется следующим образом:

$$b_1 \circ b_2 = f_1(b_1) \cup f_2(b_2),$$

где $f_1(x, y, z) = (x/2, y, z)$, $f_2(x, y, z) = ((1+x)/2, y, z)$. Нетрудно видеть, что эта операция корректно задает некоторое умножение в B_n . В дальнейшем мы всегда рассматриваем косы с точностью до изотопии.

Каждой косе $b \in B_n$ сопоставляется ориентированное зацепление L_b , называемое *замыканием* косы b , как показано на рис. 2.

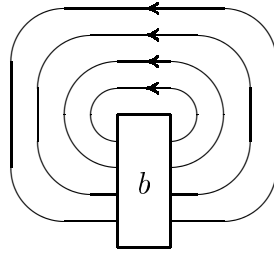


Рис. 2. Замыкание косы b

Возможность использования множества всех кос $B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots$ для построения комбинаторной модели ориентированных зацеплений в смысле данного выше определения вытекает из следующих трех результатов.

ТЕОРЕМА 2.2 (Александр [5]). *Любое ориентированное зацепление изотопно зацеплению вида L_b , где b – некоторая коса.*

Эта теорема была сформулирована Александром в несколько иных терминах еще до того, как группы кос были введены Артином.

ТЕОРЕМА 2.3 (Артин [8]). *Для каждого $n \leq 1$ множество B_n кос вместе с операцией композиции образует группу. Эта группа может быть задана набором образующих σ_i , $i = 1, \dots, n-1$, показанных на рис. 3, и определяющими соотношениями:*

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, & 0 < i < j-1 < n-1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & 0 < i < n-1. \end{aligned} \tag{1}$$

В группе B_n разрешима проблема равенства.

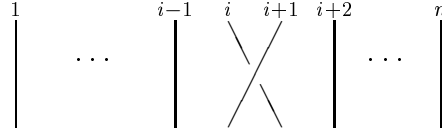


Рис. 3. Коса σ_i (ось Ox направлена вниз)

Набор элементарных преобразований, порождающих отношение изотопности для замкнутых кос, дан в следующей теореме (ее подробное доказательство впервые появилось в [50]).

ТЕОРЕМА 2.4 (А. А. Марков [6]). *Замыкания кос b_1 и b_2 изотопны как ориентированные зацепления в \mathbb{R}^3 тогда и только тогда, когда их можно получить друг из друга конечной последовательностью следующих операций:*

- 1) сопряжение: $b \mapsto bcb^{-1}$, $b, c \in B_n$;
- 2) стабилизация: $b \mapsto \iota_n(b)\sigma_n^{\pm 1}$, $b \in B_n$;
- 3) дестабилизация: операция, обратная к стабилизации.

Здесь ι_n обозначает вложение $\iota_n: B_n \rightarrow B_{n+1}$, заданное отождествлением соответствующих образующих: $\iota_n(\sigma_i) = \sigma_i$.

Операции, перечисленные в этой теореме, называются *движениями Маркова*, при этом сопряжение часто называется первым, а стабилизация или дестабилизация – вторым движением Маркова.

Замыкания кос не используются как комбинаторная модель для неориентированных зацеплений, поскольку для операции обращения ориентации одной из компонент зацепления не известно хорошего описания в терминах кос.

На практике косы обычно представляются с помощью слов в образующих σ_i , поэтому на самом деле в данной комбинаторной модели зацепления представляются парами вида (n, w) , где n – натуральное число, а w – слово в образующих σ_i , $i = 1, \dots, n - 1$. В качестве *сложности* такого представления мы выбираем следующую функцию:

$$c(n, w) = n + |w|,$$

где $|w|$ – это длина слова w . Для косы $b \in B_n$ ее сложность $c(b)$ определяется как

$$c(b) = \min_w (n + |w|),$$

где минимум берется по всем словам w , представляющим b .

2.4. Прямоугольные диаграммы. Этот способ представления зацеплений был введен автором недавно в [43]. *Прямоугольной диаграммой* сложности n мы будем называть набор R целочисленных точек вида (i, j) , $1 \leq i, j \leq n$, на плоскости \mathbb{R}^2 такой, что на каждой прямой $x = k$ и $y = k$, $k = 1, \dots, n$, имеются ровно две точки из R . *Ориентированной прямоугольной диаграммой* сложности n называется прямоугольная диаграмма R сложности n с фиксированным разбиением $R = R_- \cup R_+$ таким, что каждая прямая $x = k$ и $y = k$, $k = 1, \dots, n$, содержит ровно по одной точке из R_- и R_+ .

Прямоугольной диаграмме R мы сопоставляем зацепление

$$L_R = \bigcup_{(i,j) \in R} [(i, 0, 1), (0, j, 0)], \quad (2)$$

где через $[A, B]$ обозначен отрезок, соединяющий точки A и B . Если R – ориентированная прямоугольная диаграмма, то отрезки (2), соответствующие точкам из R_+ , ориентируются по возрастанию третьей координаты, а отрезки, соответствующие точкам из R_- , – наоборот.

Нетрудно получить следующие оценки числа прямоугольных диаграмм данной сложности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Число ориентированных прямоугольных диаграмм зацеплений сложности n равно*

$$(n!)^2 \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Число (неориентированных) прямоугольных диаграмм узлов сложности n равно

$$\frac{(n-1)! n!}{2}.$$

Отсюда следует, что число $N(n)$ (неориентированных) прямоугольных диаграмм зацеплений сложности n удовлетворяет неравенствам

$$(n-1)! n! \leq 2N(n) \leq (n!)^2 \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Набор необходимых элементарных преобразований указан в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.5. *Любое зацепление можно представить прямоугольной диаграммой.*

Две прямоугольные диаграммы задают изотопные зацепления тогда и только тогда, когда одну можно получить из другой конечной последовательностью преобразований следующего вида:

- 1) *циклическая перестановка:* $(i, j) \mapsto (i+1, j)$, $i = 1, \dots, n-1$, $(n, j) \mapsto (1, j)$, или $(i, j) \mapsto (i, j+1)$, $j = 1, \dots, n-1$, $(i, n) \mapsto (i, 1)$;
- 2) *вертикальная рокировка:* четыре точки (i, j) , (i, k) , $(i+1, j')$, $(i+1, k')$, для которых пары (j, k) и (j', k') незацеплены, заменяются на (i, j') , (i, k') , $(i+1, j)$, $(i+1, k)$;
- 3) *горизонтальная рокировка:* четыре точки (i, k) , (j, k) , $(i', k+1)$, $(j', k+1)$, для которых пары (i, j) и (i', j') незацеплены, заменяются на (i', k) , (j', k) , $(i, k+1)$, $(j, k+1)$;
- 4) *стабилизация:* диаграмма R сложности n такая, что $(n, n) \in R$, заменяется на диаграмму сложности $n+1$, которая получается из R одной из следующих четырех замен:

$$(n, n) \mapsto (n, n+1), (n+1, n+1), (n+1, n),$$

$$(i, n) \mapsto (i, n+1), (n+1, n+1), (n+1, n),$$

$$(n, j) \mapsto (n+1, j), (n+1, n+1), (n, n+1),$$

$$(i, n), (n, j) \mapsto (i, n+1), (n, n+1), (n+1, n), (n+1, j);$$
- 5) *дестабилизация:* операция, обратная к стабилизации.

Здесь под *незацепленными* парами $(i, j), (k, l)$ мы понимаем такие, в которых числа i, j, k, l попарно различны и коэффициент зацепления которых в \mathbb{R} равен нулю в обычном гомологическом смысле. Это равносильно условию

$$-\infty < \frac{(i-j)(k-l)}{(i-l)(k-j)} < 1, \quad i \neq j, \quad k \neq l.$$

Теорема 2.5 в несколько другой формулировке содержится в [43]. Она элементарно сводится к теореме Райдемайстера. Ранее утверждение, фактически равносильное теореме 2.5, но сформулированное в геометрических терминах, появилось в [51].

Объясним происхождение прямоугольных диаграмм. Назовем *геометрической прямоугольной диаграммой зацепления* обычную плоскую диаграмму зацепления D , удовлетворяющую следующим ограничениям:

- 1) D состоит из вертикальных и горизонтальных отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой (мы называем их *ребрами*, а их концы – *вершинами* диаграммы D);
- 2) в каждом пересечении вертикального и горизонтального ребра вертикальное проходит сверху, см. рис. 4.

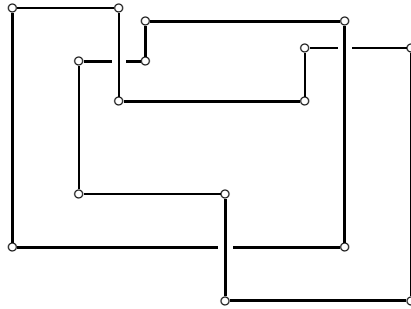


Рис. 4. Геометрическая прямоугольная диаграмма

Определенные выше прямоугольные диаграммы – это комбинаторные классы геометрических прямоугольных диаграмм, т.е. геометрические прямоугольные диаграммы, рассматриваемые с точностью до гомеоморфизмов плоскости вида $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$, где f, g – возрастающие функции. Чтобы увидеть это, занумеруем вертикальные ребра некоторой геометрической прямоугольной диаграммы D слева направо, а горизонтальные – снизу вверх и рассмотрим множество R пар (i, j) таких, что вертикальное ребро с номером i и горизонтальное с номером j имеют общий конец. Получим прямоугольную диаграмму, задающую комбинаторный тип диаграммы D . Нетрудно проверить, что зацепление L_R будет изотопно тому, которое задается плоской диаграммой D .

Прямоугольные диаграммы были введены автором для удобного изображения книжных зацеплений, см. раздел 6, однако можно интерпретировать эту ситуацию и так, что книжные зацепления являются удобным инструментом для изучения свойств прямоугольных диаграмм.

2.5. Переход от одного задания к другому. Указанные способы представления зацеплений легко преобразуются друг в друга. Очевидно, как построить алгоритмы, преобразующие косу или прямоугольную диаграмму в плоскую диаграмму. Доказательство теоремы Александра фактически состоит в построении алгоритма преобразования ориентированной плоской диаграммы в косу. Наиболее простой такой алгоритм был предложен П. Вожелем в [52]. Здесь мы приведем алгоритмы для преобразования плоской диаграммы в прямоугольную и прямоугольной диаграммы в косу. Заметим, что этот подход дает новый, методически очень простой, способ доказательства теорем Александра и Маркова.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Для любой плоской диаграммы сложности n найдется прямоугольная диаграмма сложности $\leq 2n$, задающая изотопное зацепление.*

Идея доказательства проста и проиллюстрирована на рис. 5. Сначала берется некоторая горизонтальная прямая ℓ , проходящая ниже данной диаграммы. Затем пересечения диаграммы одно за другим проталкиваются вниз под ℓ . При этом каждый раз добавляется по два вертикальных ребра, и еще два добавляются на каждую связную компоненту исходной диаграммы. Когда выше ℓ не остается пересечений, все находящиеся там дуги можно продеформировать в объединение вертикальных и горизонтальных отрезков без добавления дополнительных вертикальных ребер.

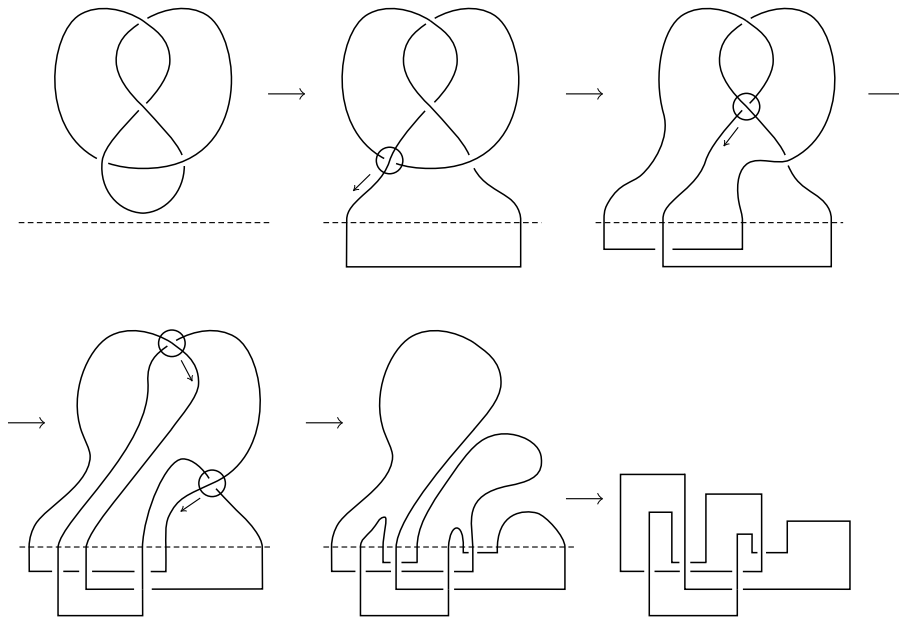


Рис. 5. Превращение плоской диаграммы в прямоугольную

На рис. 6 показано, как по ориентированной прямоугольной диаграмме R построить косу b такую, что $L_R \sim L_b$. Для этого каждое горизонтальное ребро, ориентация которого противоположна ориентации горизонтальной оси, заменяется на два “дополнительных” отрезка. При этом во всех новых пересечениях вертикальные отрезки сно-

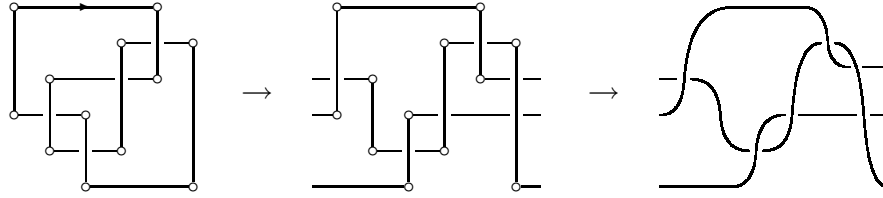


Рис. 6. Превращение ориентированной прямоугольной диаграммы в косу

ва проходят над горизонтальными. После малого шевеления получается регулярная проекция косы b .

Приведем краткую справку о том, как меняется сложность представления (в худшем случае) при переходе от одной комбинаторной модели к другой:

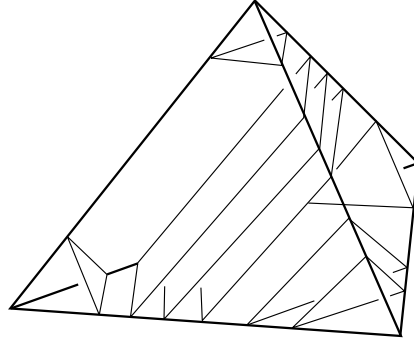
преобразование	изменение сложности
коса \mapsto плоская диаграмма	$n \mapsto n$
плоская диаграмма \mapsto прямоугольная диаграмма	$n \mapsto 2n$
прямоугольная диаграмма \mapsto плоская диаграмма	$n \mapsto n^2/4$
прямоугольная диаграмма \mapsto коса	$n \mapsto n^2/4$

Не указанные здесь преобразования можно получить композицией указанных.

3. Метод Хакена

Пусть M – трехмерное компактное многообразие (возможно, с краем), наделенное триангуляцией T . Собственно вложенная поверхность $F \subset M$ называется *нормальной* по отношению к триангуляции T , если пересечение $F \cap \Delta$ поверхности F с каждым 3-симплексом $\Delta \in T$ состоит из треугольников и четырехугольников, вершины которых лежат на попарно различных ребрах симплекса Δ , см. рис. 7. Такие треугольники и четырехугольники называются *элементарными дисками*. Два элементарных диска принадлежат одному *типу*, если их границы пересекают одни и те же ребра. Всего имеется $7t$ типов элементарных дисков, где t – общее число 3-симплексов в триангуляции T .

ЗАМЕЧАНИЕ. Существует другой, “дуальный”, подход к определению нормальных поверхностей. Для него вместо триангуляции многообразия используется разбиение на ручки. С формальной точки зрения эти подходы совершенно эквивалентны. С точки зрения практического применения подход, основанный на разбиении на ручки, несколько эффективнее: системы уравнений для нахождения фундаментальных поверхностей (см. ниже) получаются проще. Однако речь здесь идет не о качественном улучшении асимптотической сложности алгоритмов, а об улучшении некоторых констант в оценке сложности. В конкретных примерах малой сложности обычно лучше воспользоваться разбиением на ручки. Однако описание метода становится проще, если пользоваться триангуляциями, что мы и будем делать.

Рис. 7. Пересечение $F \cap \Delta$

Нормальные поверхности были введены Х. Кнезером [10], который использовал их для оценки сверху числа попарно непараллельных и непересекающихся несжимаемых сфер в трехмерном многообразии.

Для задания нормальной поверхности Хакен предложил занумеровать типы элементарных дисков и сопоставить каждой нормальной поверхности F целочисленный вектор $x(F) = (x_1, \dots, x_{7t})$, i -я координата которого равна количеству элементарных дисков i -го типа, составляющих поверхность F . Величины $x_i(F)$ называются *нормальными координатами* поверхности F . Вектор $x(F)$ однозначно определяет поверхность F с точностью до изотопии в классе нормальных поверхностей, но не все наборы целых чисел $x \in \mathbb{Z}^{7t}$ соответствуют нормальным поверхностям. Можно выписать систему уравнений и неравенств, задающую подмножество всех векторов вида $x(F)$. Это делается следующим образом.

Во-первых, чтобы вектор x задавал некоторую нормальную поверхность, должно, очевидно, выполняться условие

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 7t. \quad (3)$$

Во-вторых, пусть два 3-симплекса $\Delta_1, \Delta_2 \in T$ имеют общую 2-грань f . Пересечение $F \cap f$ состоит из дуг, концы каждой из которых лежат на разных сторонах грани f . Всего имеется три типа дуг. Количество дуг каждого типа можно вычислить, зная число элементарных дисков в Δ_1 , оно будет иметь вид $x_i + x_j$ (ровно два типа дисков в одном 3-симплексе вносят вклад в количество дуг данного типа). Точно так же, его можно выразить через число элементарных дисков в Δ_2 , скажем, $x_k + x_l$. Таким образом, для каждой 2-грани, не лежащей на крае ∂M , следует выписать три уравнения вида

$$x_i + x_j = x_k + x_l. \quad (4)$$

Наконец, некоторые типы дисков несовместимы в том смысле, что любые диски этих типов обязательно пересекаются, поэтому они не могут одновременно входить в нормальную поверхность. А именно, в каждом 3-симплексе четырехугольные элементарные диски попарно несовместимы. Поэтому векторы $x(F)$ удовлетворяют также условию

$$x_i x_j = 0, \quad (5)$$

где i, j – номера любой пары различных типов четырехугольных элементарных дисков, лежащих в одном 3-симплексе.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Вектор $x \in \mathbb{Z}^{7t}$ задает нормальную поверхность тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям (3)–(5).*

Фундаментальным решением системы (3), (4) называется такое решение $x \in \mathbb{Z}^{7t}$, что x нельзя нетривиальным образом разложить в сумму $x = x_1 + x_2$ двух других решений. Нормальные поверхности F , для которых $x(F)$ является фундаментальным решением системы (3), (4) также называются фундаментальными. Следующее, легко доказываемое, утверждение играет ключевую роль для метода Хакена.

ЛЕММА 3.1. *Множество фундаментальных решений системы (3), (4) конечно и может быть найдено алгоритмически.*

Любое нефундаментальное решение является линейной комбинацией фундаментальных с неотрицательными целыми коэффициентами.

Хакен доказал следующие два утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Пусть M – триангулированное дополнение к открытой трубчатой окрестности произвольного узла $K \subset S^3$. Тогда среди набора фундаментальных поверхностей для M найдется поверхность Зейферта узла K минимально возможного рода.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Пусть M – триангулированное дополнение к открытой трубчатой окрестности произвольного зацепления $L \subset S^3$. Если зацепление L разрывимо, то среди набора фундаментальных поверхностей для M найдется сфера, разлагающая L в нетривиальную несвязную сумму.*

Тем самым в [9] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. *Существует алгоритм, который по заданному узлу за конечное время вычисляет его род.*

Существует алгоритм, который по заданному зацеплению за конечное время отвечает, является ли это зацепление разрывимым и, если да, указывает его разложение в несвязную сумму неразрывимых зацеплений.

Для метода Хакена не имеет принципиального значения, каким именно образом задан узел или зацепление. Первый шаг алгоритма Хакена состоит в нахождении триангуляции дополнения к трубчатой окрестности данного зацепления. Затем выписывается система уравнений и неравенств (3), (4) и находятся ее фундаментальные решения. Среди них отбираются те, которые удовлетворяют условию (5). Наконец, среди найденных фундаментальных поверхностей отбирается: поверхность Зейферта наименьшего рода в случае нахождения рода узла или разбивающая сфера в случае проверки разрывимости данного зацепления.

Результат Хакена позволяет, в частности, построить алгоритм распознавания тривиального узла, поскольку это единственный узел рода нуль.

Следуя методу Хакена, Шуберт доказал в [11] следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2. *Существует алгоритм, который по заданному неразводимому зацеплению отвечает, является ли оно простым и, если нет, указывает его разложение в связную сумму простых зацеплений.*

Доказательство снова основано на том, что поверхность, которая нам нужна, – в данном случае факторизующую сферу – всегда можно найти среди фундаментальных.

Таким образом, задача алгоритмической классификации узлов и зацеплений сводится к задаче сравнения двух простых неразводимых зацеплений. В [14], [15] Хакен предложил программу решения последней, которая была завершена лишь недавно в книге Матвеева [26]. Полученный в итоге алгоритм чрезмерно сложен, так что не имеет смысла обсуждать вопрос о его практической реализации. Кроме метода нормальных поверхностей, для его построения понадобились результаты работ [17]–[19], [24], [25].

Укажем очень кратко и поверхностно идеи и основные трудности при построении только что упомянутого алгоритма сравнения зацеплений. Мы будем следовать интерпретации Матвеева. Прежде всего, для данных зацеплений строятся триангуляции (или разбиения на ручки) их дополнительных пространств, пусть M_1, M_2 . Как известно, дополнительное пространство не содержит полной информации о зацеплении, но если на каждой компоненте его границы указать меридиан и параллель, то полученное *многообразие с узором на крае* однозначно определяет соответствующее зацепление.

Если данные зацепления неразводимы, просты и не являются тривиальными узлами, то многообразия M_1, M_2 принадлежат классу так называемых *многообразий Хакена* (неприводимых, гранично неприводимых и содержащих некоторую несжимаемую поверхность).

ТЕОРЕМА 3.3 [26]. *Существует алгоритм, который по двум ориентированным многообразиям Хакена M_1, M_2 с узором на крае отвечает, существует ли сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $M_1 \rightarrow M_2$, переводящий узор на ∂M_1 в узор на ∂M_2 .*

Это – более общее утверждение, чем требуется для алгоритмического сравнения зацеплений.

Для сравнения двух многообразий Хакена в каждом из них специальным образом находится двумерный полиэдр, разбивающий многообразие на трехмерные шары, после чего найденные разбиения сравниваются. Утверждается, что процедуру нахождения разбиения можно построить таким образом, чтобы результат не зависел от триангуляции многообразия.

Разбивающие полиэдры находятся с помощью построения так называемых *иерархий*. Иерархия в многообразии Хакена M – это последовательность $\partial M = P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_m$ двумерных полиэдров, вложенных в M , в которой каждый следующий, P_{i+1} , получается из предыдущего, P_i , добавлением некоторой поверхности $F_i \subset M \setminus P_i$, а последний полиэдр P_m разбивает M на клетки. На каждом шаге это можно сделать несколькими способами, поэтому сначала алгоритм находит большое семейство разбиений многообразия M , а потом выбирает среди них наименьшее

по отношению к лексикографическому порядку, который возникает при фиксировании способа кодирования разбиений.

Основная трудность при алгоритмическом построении канонического разбиения многообразия Хакена состоит в формулировке правила, по которому на каждом шаге к полиэдру P_i будет добавляться поверхность F_i . Это правило должно удовлетворять следующим условиям:

- 1) любая иерархия обрывается за конечное число шагов, не превышающее некоторое N , зависящее от многообразия M и выбранной триангуляции;
- 2) для любого уже построенного полиэдра P_i наше правило должно давать лишь конечное число возможностей для добавления поверхности F_i ;
- 3) набор построенных разбиений, рассматриваемых с точностью до гомеоморфизма многообразия M , должен совпадать с некоторым классом разбиений, определяемых топологически, без ссылки на триангуляцию многообразия M .

При построении каждой следующей поверхности F_i используется метод нормальных поверхностей, но гораздо более сложным образом, чем в случае алгоритмов Хакена и Шуберта. Если, скажем, брать в качестве F_i всевозможные фундаментальные поверхности в $M \setminus P_i$, то невыполненным окажется свойство 3), так как набор фундаментальных поверхностей зависит от триангуляции. Если же перебирать в качестве F_i всевозможные несжимаемые поверхности (которые всегда можно произотопировать в нормальные), то невыполненным будет условие 2), поскольку несжимаемых поверхностей может быть бесконечное число, и т. д.

Одной из существенных трудностей в реализации программы Хакена явилась необходимость решать проблему сопряженности в группах классов отображений компактных поверхностей. Эта проблема была решена Хеммоном в [19], после чего задача алгоритмического распознавания зацеплений считалась решенной. Однако несколько лет назад Матвеев указал, что результатов и техники Хеммона на самом деле недостаточно [23]. А именно, в некоторых случаях для построения иерархии нужно решить следующую задачу: для элементов a, b, a', b' группы классов отображений некоторой поверхности найти элемент c такой, что $a' = cac^{-1}$ и $b' = cbc^{-1}$, или доказать, что он не существует. Решение Хеммона проблемы сопряженности в группах классов отображений не обобщается на этот случай. Матвеев преодолел эту трудность, используя теорию Тёрстона [24], [25] диффеоморфизмов поверхностей, которая была опубликована уже после упомянутой работы Хеммона.

4. Геометризация

Существует иной подход к распознаванию зацеплений, также основанный на рассмотрении дополнительного пространства. Его идея, принадлежащая Тёрстону, состоит в нахождении на данном многообразии Хакена M *геометрической структуры* вместо разбиения M на клетки. Если в M имеются несжимаемые торы, то сначала на M находится так называемое *JSJ-разложение* – разрезание многообразия M вдоль торов на зейфертовы многообразия и так называемые простые (simple) многообразия [17], [18], [53]. Нахождение JSJ-разложения и установление структуры зейфертовых кусков происходит так же, как и в методе Хакена. На простых же кусках находится гиперболическая структура, которая существует по теореме Тёрстона о гиперболизации. Доказательство этой теоремы см. в [28].

Так же, как и алгоритм построения иерархий, алгоритм для нахождения гиперболической структуры на простом многообразии Хакена очень сложен. В частности, он требует решения систем алгебраических уравнений, задающих пространство представлений группы $\pi_1 M$ в $PSL(2, \mathbb{C})$. Однако замена “точных” алгебраических вычислений на приближенные не приводит к ошибкам в примерах малой сложности, давая возможность существенно упростить процедуру. На этом основаны программы SNARPEA и KNOTSCAPE, позволившие, в частности, перечислить без повторений все простые узлы с ≤ 16 пересечениями на диаграмме.

Подробного изложения алгоритма, основанного на геометризации, в литературе также не существует, можно найти лишь описание идей его построения, см., например, [54].

5. Алгоритмы для кос

5.1. Проблема равенства. Использование кос как инструмента для изучения узлов и зацеплений мотивировано тем, что группы кос обладают рядом замечательных свойств и хорошо поддаются изучению. На сегодняшний день существует много различных алгоритмов распознавания кос, в том числе очень быстрых. Ниже мы опишем некоторые из них, однако наш список заведомо неполон.

Проблема равенства для групп кос была решена еще Артином в тех же работах [7], [8], где группы кос были определены. Значительная часть рассуждений Артина была геометрической. Алгебраическое изложение его теории было дано в [55] и [56]. Из работы Артина извлекается на самом деле два алгоритма для решения проблемы равенства в группе кос. Один из этих алгоритмов приводит данную косу к некоторому специальному виду, который может быть экспоненциально сложен по длине изначального представления косы. Мы не будем здесь его описывать, а приведем лишь второй алгоритм, основанный на схожих идеях.

Алгоритм Артина использует утверждение, которое на современном языке формулируется так.

ТЕОРЕМА 5.1. *Группа кос B_n изоморфна группе классов отображений $MCG(D^2, n)$ диска D^2 с n отмеченными точками.*

Группа $MCG(D^2, n)$ естественным образом действует автоморфизмами на фундаментальной группе диска D^2 с n проколами, т.е. на свободной группе F_n от n образующих u_1, u_2, \dots, u_n . В стандартных образующих σ_i группы B_n это действие записывается следующим образом (см. рис. 8):

$$\begin{aligned} \sigma_i \cdot u_j &= u_j, \quad \text{если } j \neq i, i+1, \\ \sigma_i \cdot u_i &= u_{i+1}, \\ \sigma_i \cdot u_{i+1} &= u_{i+1}^{-1} u_i u_{i+1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Если данные две косы b_1, b_2 заданы словами в σ -образующих, то равенство $b_1 = b_2$ равносильно $b_1 \cdot (u_1, \dots, u_n) = b_2 \cdot (u_1, \dots, u_n)$. Наборы же $b_{1,2} \cdot (u_1, \dots, u_n)$ можно вычислить по формулам (6) и затем сравнить. Сравнение возможно, поскольку эти строки состоят из элементов свободной группы, а в ней проблема равенства тривиальна.

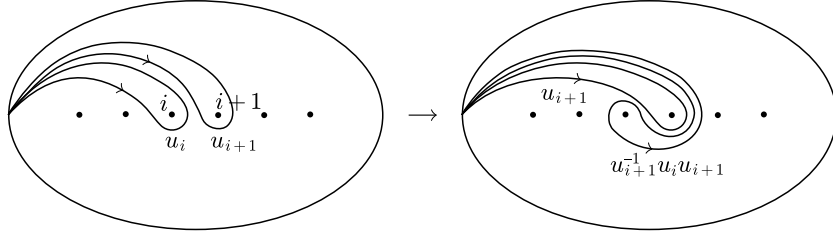


Рис. 8. Действие σ_i на образующие свободной группы

Несмотря на кажущуюся простоту этого алгоритма, применение его на практике затруднительно, поскольку длины слов $b \cdot u_i$ могут расти экспоненциально с ростом длины косы b . Мы используем его как поучительный пример того, как переход к другой “системе счисления” делает алгоритм из экспоненциального полиномиальным.

Для элемента $x \in F_n$, записанного в виде слова в образующих u_i , обозначим через \bar{x} слово, полученное из x следующими заменами:

$$\begin{aligned} u_1 &\mapsto v_1 v_3 v_2^{-1} v_1^{-1}, \\ u_2 &\mapsto v_1 v_2 v_4 v_6 v_5^{-1} v_4^{-1} v_2^{-1} v_1^{-1}, \\ &\dots \\ u_i &\mapsto (v_1 v_2 v_4 \dots v_{3i-5} v_{3i-4} v_{3i-2}) v_{3i} v_{3i-1}^{-1} (v_1 v_2 v_4 \dots v_{3i-5} v_{3i-4} v_{3i-2})^{-1}. \end{aligned}$$

Через $|x|_j$ обозначим количество вхождений букв $v_j^{\pm 1}$ в слово \bar{x} после всевозможных сокращений $v_i^{\pm 1} v_i^{\mp 1} \mapsto \emptyset$. Через $s(x)$ обозначим следующую последовательность целых чисел длины $2n$:

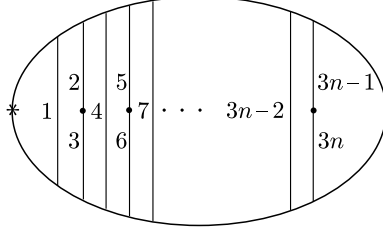
$$s(x) = \left(\frac{|x|_2 - |x|_3}{2}, \frac{|x|_1 - |x|_4}{2}, \dots, \frac{|x|_{3n-1} - |x|_{3n}}{2}, \frac{|x|_{3n-2} - |x|_{3n+1}}{2} \right).$$

ЛЕММА 5.1. *Если элементы $x_1, \dots, x_k \in F_n \cong \pi_1(D^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\})$ можно представить попарно непересекающимися петлями в $D^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$, то они однозначно с точностью до ориентации восстанавливаются по $s(x_1) + \dots + s(x_k) \in \mathbb{Z}^{2n}$.*

Идея доказательства состоит в следующем. Разрежем диск, как показано на рис. 9. Для петли $x \in F_n$ с базовой точкой, отмеченной $*$, числа $|x|_i$ указывают количество пересечений петли x с i -м разрезом при условии, что все “лишние” пересечения удалены. Нетрудно показать, что по количеству пересечений с указанными разрезами набор несамопересекающихся попарно непересекающихся петель можно восстановить, но этот набор не может быть произвольным. Несколько меньший набор, указанный в лемме 5.1, получается “выбрасыванием лишней информации”.

Набор образующих u_1, \dots, u_n можно представить попарно непересекающимися петлями. Из соображений симметрии мы выбираем несколько другой набор образующих: $(u_1, u_1 u_2, \dots, u_1 \dots u_n)$, также обладающий этим свойством. Имеем

$$s(u_1, u_1 u_2, \dots, u_1 \dots u_n) = (0, 1, \dots, 0, 1).$$

Рис. 9. Разрезание диска D^2 на “треугольники”

Возможность использования такого кодирования набора образующих группы F_n является благодаря следующей лемме (доказательство см. в [57; гл. 8]).

ЛЕММА 5.2. Если $s(x_1, \dots, x_k) = (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$, то $s(\sigma_i \cdot x_1, \dots, \sigma_i \cdot x_k) = (a'_1, b'_1, \dots, a'_n, b'_n)$, где $a'_j = a_j$, $b'_j = b_j$ при $j \neq i, i+1$, и

$$\begin{aligned} a'_i &= a_i + (\delta^+ + b_i)^+, \\ a'_{i+1} &= a_{i+1} - (\delta^+ - b_{i+1})^+, \\ b'_i &= b_i - (-\delta')^+ + \delta^+, \\ b'_{i+1} &= b_{i+1} + (-\delta')^+ - \delta^+, \end{aligned} \quad (7)$$

где мы использовали обозначения: $\delta = a_{i+1} - a_i$, $\delta' = a'_{i+1} - a'_i$, $a^+ = \max(0, a)$.

Таким образом, мы имеем легко вычисляемое теоретико-множественное вложение $B_n \rightarrow \mathbb{Z}^{2n}$, заданное формулой

$$b \mapsto b \cdot (0, 1, \dots, 0, 1),$$

где действие образующих σ_i на \mathbb{Z}^{2n} дается формулами (7). Это дает простой и быстрый алгоритм распознавания кос. Этот алгоритм был предложен автором в [58], см. также [59], [57]. Аналогичный алгоритм независимо был построен в [60].

Важный набор инструментов для изучения групп кос был введен Гарсайдом в [30], где с их помощью было дано решение проблемы равенства, принципиально отличающееся от решения Артина, а также решение проблемы сопряженности в группе кос.

Гарсайд рассмотрел моноид B_n^+ , заданный образующими σ_i , $i = 1, \dots, n-1$, и теми же соотношениями (1), что и группа кос. Его элементы называются *положительными косами*. Гарсайд рассмотрел также следующий элемент, называемый *фундаментальной косой*:

$$\Delta = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots \sigma_1. \quad (8)$$

Квадрат Δ^2 этого элемента порождает центр группы B_n при $n \geq 3$. (Центр группы кос был найден уже в [8], [56]. Гарсайд дал еще один способ его нахождения.)

Фундаментальная коса обладает следующим свойством: если элемент $b \in B_n^+$ делится на Δ слева, то b делится на Δ и справа. Для доказательства достаточно установить, что в моноиде B_n^+ имеет место равенство

$$\sigma_i \Delta = \Delta \sigma_{n-i}. \quad (9)$$

Гарсайд доказал следующие два утверждения.

ТЕОРЕМА 5.2. *Естественный гомоморфизм $B_n^+ \rightarrow B_n$, тождественный на образующих, $\sigma_i \mapsto \sigma_i$, является мономорфизмом.*

ТЕОРЕМА 5.3. *Каждую косу $b \in B_n$ можно единственным образом представить в виде*

$$b = \Delta^m \cdot b', \quad (10)$$

где b' – положительная коса, не делящаяся на Δ .

Гарсайд называет (10) *стандартным видом* косы b . Он показал, как найти представление косы в виде (10), где b' может делиться на Δ . А именно, он показал, что Δ делится на каждую из образующих, $\Delta = X_i \sigma_i$, где $X_i \in B_n^+$. В слове, представляющем b , можно сначала заменить все σ_i^{-1} на $\Delta^{-1} X_i$, а затем вынести все Δ^{-1} в начало слова, используя (9).

Сделав это, далее можно найти максимальную степень фундаментальной косы, на которую делится b' . Для этого достаточно найти всевозможные выражения b' через образующие σ_i (не используя σ_i^{-1}). Теорема 5.2 гарантирует, что это можно сделать за конечное время: достаточно найти все положительные слова, получающиеся из одного положительного слова, представляющего b' , применением конечного числа соотношений (1). Здесь важную роль играет тот факт, что определяющие соотношения моноида B_n^+ сохраняют длину слова.

Алгоритм Гарсайда требует выполнить перебор всевозможных слов, задающих косу b' , количество которых растёт экспоненциально быстро с ростом длины косы. Поэтому, как и алгоритм Артина, для практического использования он не годится.

Первый полиномиально сложный алгоритм для распознавания кос был построен Тёрстоном в [31], который существенно уточнил конструкцию Гарсайда стандартного вида косы и показал, как обойтись без экспоненциально большого перебора.

Каждой перестановке $\pi \in S_n$ Тёрстон сопоставил косу $s_\pi \in B_n^+$ по следующему правилу. Перестановку π следует разложить в произведение транспозиций $\tau_i = (i, i+1)$ так, чтобы длина разложения была минимально возможной: $\pi = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_m}$. Тогда по определению $b_\pi = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_m}$. Нетрудно проверить, что это определение корректно. Поскольку соотношения (1) выполнены в группе перестановок S_n , равенство $b_\pi = b_{\pi'}$ имеет место, только если $\pi = \pi'$. Множество $\{b_\pi \mid \pi \in S_n\} \subset B_n^+$ обозначим через P_n .

Элементы подмножества $P_n \subset B_n^+$ характеризуются также тем, что представляются косами, на проекции которых все пересечения положительны и каждые две нити пересекаются не более одного раза. Эти элементы использовались и Гарсайдом, хотя он не указал на их связь с перестановками. Подмножество P_n совпадает с множеством левых (а также с множеством правых) делителей фундаментальной косы Δ в моноиде положительных кос. Сам элемент Δ соответствует перестановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тёрстон усилил теорему 5.3 следующим образом.

ТЕОРЕМА 5.4. Каждая коса $b \in B_n$ единственным образом представляется в виде

$$b = \Delta^m \cdot s_{\pi_1} s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_k}, \quad (11)$$

где $s_{\pi_1} \neq \Delta$, $s_{\pi_k} \neq 1$ и для любых $i = 1, \dots, k-1$, $j = 1, \dots, n-1$ выполнено одно из следующих двух условий:

- 1) s_{π_i} делится на σ_j справа, т.е. $s_{\pi_i} \sigma_j^{-1} \in P_n$;
- 2) $s_{\pi_{i+1}}$ не делится на σ_j слева, т.е. $\sigma_j^{-1} s_{\pi_{i+1}} \notin P_n$.

По-другому вид (11) характеризуется следующими образом: для каждого $i = 1, \dots, k-1$ элемент s_{π_i} является наибольшим общим левым делителем (НОЛД) элементов $s_{\pi_i} \cdots s_{\pi_k}$ и Δ в моноиде B_n^+ . Тёрстон называет разложение $b = s_{\pi_1} s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_k}$, удовлетворяющее этому условию, *жадным слева видом* (right-greedy form) положительной косы b .

Утверждение, эквивалентное теореме 5.4, было также доказано С. И. Адяном в [61].

Тёрстон указывает быстрый метод нахождения жадного слева вида данной положительной косы. Этот метод основан на следующем утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $b = s_{\pi_1} s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_k}$ — жадный слева вид некоторой положительной косы, $\pi \in S_n$ — некоторая перестановка. Тогда

$$\text{НОЛД}(s_\pi \cdot b, \Delta) = \text{НОЛД}(s_\pi s_{\pi_1}, \Delta).$$

Кроме того, $(\text{НОЛД}(s_\pi s_{\pi_1}, \Delta))^{-1} s_\pi s_{\pi_1} = s_{\pi'_1}$ для некоторой перестановки π'_1 , причем $s_{\pi'_1}$ делит s_{π_1} справа.

Пусть положительная коса b уже приведена к жадному слева виду, $b = s_{\pi_1} s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_k}$. Тогда согласно предложению 5.1 жадный слева вид косы $s_\pi \cdot b$ можно найти, выполняя последовательно следующие шаги:

$$\begin{aligned} s_\pi s_{\pi_1} s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_k} &\mapsto s_{\rho_0} s_{\pi'_1} s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_k} \\ &\mapsto s_{\rho_0} s_{\rho_1} s_{\pi'_2} \cdots s_{\pi_k} \\ &\dots \\ &\mapsto s_{\rho_0} s_{\rho_1} s_{\rho_2} \cdots s_{\rho_k}, \end{aligned}$$

где $s_{\rho_i} = \text{НОЛД}(s_{\pi_i}, s_{\pi_{i+1}})$, $s_{\pi'_{i+1}} = s_{\rho_i}^{-1} s_{\pi_i} s_{\pi_{i+1}}$, $i = 0, 1, \dots, k$, $\pi_0 = \pi$, $s_{\pi_{k+1}} = 1$. Это дает возможность привести произвольную положительную косу b к жадному слева виду, применяя рекурсию. А именно, пусть коса b представлена словом, начинающимся с σ_i : $b = \sigma_i \cdot b'$. Поскольку $\sigma_i \in P_n$, мы получим жадный слева вид для b , если сначала приведем к этому виду b' , а затем воспользуемся алгоритмом выше.

Тёрстон заметил также следующий факт. Пусть $b = s_{\pi_1} s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_k}$ — некоторое разложение в произведение элементов из P_n , не обязательно каноническое. Рассмотрим новую косу $\tilde{b} = s_{\pi'_1} s_{\pi'_2} \cdots s_{\pi'_k}$, где $s_{\pi'_{2i+1}} = s_{\pi_{k-2i}}^{-1} \cdot \Delta$, $s_{\pi'_{2i}} = \Delta \cdot s_{k-2i+1}^{-1}$. Тогда $b = s_{\pi_1} s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_k}$ имеет жадный слева вид тогда и только тогда, когда то же верно для $\tilde{b} = s_{\pi'_1} s_{\pi'_2} \cdots s_{\pi'_k}$. Кроме того, в B_n имеет место равенство $\tilde{b} = b^{-1} \cdot \Delta^k$. Это дает возможность построить алгоритм для вычисления жадного слева вида косы $b \cdot s_\pi$,

если b уже приведена к этому виду. А именно, сначала нужно перейти к косе $s_{\pi'} \cdot \tilde{b}$, привести ее к жадному слева виду с помощью алгоритма выше, а затем выполнить операцию, обратную к $b \mapsto \tilde{b}$.

Для произвольной косы $b \in B_n$ канонический вид (11) находится так. Сначала нужно представить b в виде $b = \Delta^p \cdot b_1$, где $b_1 \in B_n^+$ (см. выше). Затем косу b_1 нужно привести к жадному слева виду: $b_1 = s_{\pi_1} s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_q}$. Возможно, в этом разложении несколько первых сомножителей $s_{\pi_1}, s_{\pi_2}, \dots$ совпадают с Δ . Пусть таких сомножителей r штук. Тогда каноническим видом (11) данной косы будет

$$b = \Delta^{p+r} \cdot s_{\pi_{r+1}} \cdots s_{\pi_q}.$$

Тёрстон также доказал, что для каждой косы b единственно следующее разложение:

$$b = (s_{\pi_1} s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_k})^{-1} (s_{\pi'_1} s_{\pi'_2} \cdots s_{\pi'_l}), \quad (12)$$

где $s_{\pi_1} s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_k}$ и $s_{\pi'_1} s_{\pi'_2} \cdots s_{\pi'_l}$ — жадные слева виды некоторых положительных кос такие, что $\text{НОЛД}(s_{\pi_1}, s_{\pi'_1}) = 1$ в B_n^+ .

Для полноты картины упомянем еще два алгоритма, совершенно не похожие на перечисленные выше, которые были придуманы сравнительно недавно П. Деорнуа. Это так называемые *алгоритм обращения слов* [62] и *алгоритм сокращения ручек* [63]. Первый из них за квадратичное по длине исходного слова время выдает “числитель” и “знаменатель” разложения (12), не находя жадных видов для каждого из них. Второй алгоритм приводит слово, задающее косу, к виду, в котором образующая σ_1 встречается либо только в положительных, либо только в отрицательных степенях, либо не встречается вовсе. В последнем случае то же можно сказать про σ_2 , и т. д. Деорнуа показал, что если исходное слово представляло косу $1 \in B_n$, то в результате работы его алгоритма получится пустое слово.

5.2. Проблема сопряженности. Проблема сопряженности в группе кос была решена почти одновременно Маканиным [29] и Гарсайдом [30], но работа Маканина не содержит полного доказательства. Мы будем следовать изложению Гарсайда.

Через $[b]$ мы будем обозначать класс сопряженности косы $b \in B_n$. Степень m в разложении (10) Гарсайд называл степенью (power) косы b . Мы будем пользоваться более современной терминологией, введенной в [32], и называть m *инфимумом* косы b и обозначать $\inf b$. Мы имеем

$$\inf b = \max_{\Delta^{-m} \cdot b \in B_n^+} m.$$

Для каждого класса сопряженности x Гарсайд определяет *верхушку* (summit) класса x как

$$\mathcal{S}(x) = \{b \in B_n \mid \inf b = \max_{b' \in x} \inf b'\}.$$

Это определение имеет смысл по следующей причине. Рассмотрим гомоморфизм $h: B_n \rightarrow \mathbb{Z}$, $h(\sigma_i) = 1$ для всех $i = 1, \dots, n-1$. Будем иметь $h(cbc^{-1}) = h(b)$ для любых $b, c \in B_n$. Кроме того, $h(\Delta) = n(n-1)/2$ и $h(b) \geq 0$ для любой положительной

косы $b \in B_n^+$. Поэтому для любых двух кос b, b' из одного класса сопряженности выполнено

$$\inf b' \leq \frac{2h(b)}{n(n-1)},$$

т.е. функция \inf ограничена сверху на каждом классе сопряженности.

Мы будем использовать обозначение $\mathcal{S}(b)$ для $\mathcal{S}([b])$. Гарсайд доказал утверждение, которое в наших обозначениях формулируется так.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Для любой косы $b \in B_n$ найдется конечная последовательность кос $s_{\pi_i} \in P_n$, $i = 1, \dots, N$, такая, что если положить $b_0 = b$, $b_i = s_{\pi_i}^{-1} b_{i-1} s_{\pi_i}$, то будем иметь:*

$$\inf b_0 \leq \inf b_1 \leq \dots \leq \inf b_N, \quad b_N \in \mathcal{S}(b).$$

Назовем сопряжение $b \mapsto s_{\pi}^{-1} b s_{\pi}$ *допустимым*, если $\inf s_{\pi}^{-1} b s_{\pi} \geq \inf b$. Число допустимых сопряжений, которые можно применить к любой данной косе, конечно. Гарсайд также заметил, что для любых данных $l, m \in \mathbb{Z}$ число кос, удовлетворяющих условиям $h(b) = l$, $\inf b \geq m$, конечно. Поэтому для любой косы b можно найти все косы, получающиеся из b конечным числом допустимых сопряжений. Отсюда вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.5 (Гарсайд [30]). *Существует алгоритм, который для любой косы $b \in B_n$, заданной некоторым словом в образующих σ_i , за конечное время находит $\mathcal{S}(b)$.*

Это дает следующее решение проблемы сопряженности. Для двух данных кос b_1, b_2 мы можем вычислить $\mathcal{S}(b_1)$ и $\mathcal{S}(b_2)$ и затем сравнить. Результат совпадает, только если $[b_1] = [b_2]$.

Этот алгоритм Гарсайда также использует очень большой перебор. В последующих работах [32], [64], [39], [34] он был существенно улучшен.

Э. Аль-Рифай и Х. Мортон [32] используют, кроме инфимума, еще две характеристики косы b : *супремум* $\sup b$ и каноническую длину $\|b\|$, которые для разложения (11) равны, соответственно

$$\sup b = m + k, \quad \|b\| = k.$$

Супремум характеризуется также следующим образом:

$$\sup b = \min_{b^{-1} \cdot \Delta^p \in B_n^+} p.$$

В [32] доказывается следующее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Пусть коса b имеет наименьшую каноническую длину в своем классе сопряженности, $\|b\| = \min_{b' \in [b]} \|b'\|$. Тогда*

$$\inf b = \max_{b' \in [b]} \inf b', \quad \sup b = \min_{b' \in [b]} \sup b'.$$

Таким образом, множество кос, имеющих наименьшую длину в данном классе сопряженности x , целиком содержится в верхушке $\mathcal{S}(x)$, определенной Гарсайдом. Из

работы [32] видно, что использование этого подмножества позволяет построить более эффективный алгоритм, чем алгоритм Гарсайда, поэтому имеет смысл переопределить верхушку как

$$\mathcal{S}(x) = \{b \in B_n \mid \|b\| = \min_{b' \in x} \|b'\|\}, \quad (13)$$

забыв об изначальном определении Гарсайда. (Аль-Рифай и Мортон назвали подмножество (13) *сверхверхушкой* (super summit set), но мы предпочтем не усложнять терминологию.)

Для косы b , представленной в виде (11), Аль-Рифай и Мортон ввели следующие две операции, называемые *cycling* и *decycling*:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(b) &= \Delta^m \cdot s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_k} (\Delta^m s_{\pi_1} \Delta^{-m}), \\ \mathbf{d}(b) &= \Delta^m \cdot (\Delta^{-m} s_{\pi_k} \Delta^m) s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_{k-1}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Обе эти операции не уменьшают \inf и не увеличивают \sup . Очевидно, что $\mathbf{c}(b)$, $\mathbf{d}(b) \in [b]$. Косы $\mathbf{c}(b)$ и $\mathbf{d}(b)$ в (14) уже не имеют вида (11), однако к этому виду их можно привести с помощью указанных выше алгоритмов Тёрстона, после чего операции \mathbf{c} , \mathbf{d} можно итерировать. Так как \inf не уменьшается при применении \mathbf{c} , последовательность $\mathbf{c}^j(b)$, $j = 1, 2, \dots$, не может содержать бесконечно много различных членов. Это значит, что, итерируя \mathbf{c} , мы рано или поздно попадем в цикл. То же верно и для операции \mathbf{d} . Аль-Рифай и Мортон доказали следующее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть для некоторых $j, k > 0$ выполнено $b_1 = \mathbf{c}^j(b) = \mathbf{c}^{j+k}(b)$. Тогда $\inf b_1 = \max_{b' \in [b]} \inf b'$.

Далее, пусть для некоторых $l, m > 0$ выполнено $b_2 = \mathbf{d}^l(b_1) = \mathbf{d}^{l+m}(b_1)$. Тогда $b_2 \in \mathcal{S}(b)$.

Таким образом, чтобы найти какой-нибудь один элемент из верхушки класса $[b]$, не обязательно использовать всевозможные сопряжения, а достаточно применять операции \mathbf{c} и \mathbf{d} .

В работе Дж. Бирман, К. Ко и Дж. Ли [33] была дана следующая эффективная оценка для числа применений \mathbf{c} и \mathbf{d} , достаточного для нахождения одного элемента из верхушки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Для любой косы $b \in B_n$ элемент

$$\mathbf{d}^{n(n-1)/2-1}(\mathbf{c}^{n(n-1)/2-1}(b))$$

лежит в $\mathcal{S}(b)$.

Ранее в другой статье тех же авторов [64] было проделано исследование, аналогичное работам Гарсайда и Тёрстона, но использующее другое семейство образующих: $a_{ij} = (\sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\cdots\sigma_{j+1})\sigma_j(\sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\cdots\sigma_{j+1})^{-1}$, $i > j$. Переход к другим образующим дает некоторую эффективизацию алгоритмов. Например, количество необходимых применений операций \mathbf{c} и \mathbf{d} в аналоге предложения 5.5 меняется с $n(n-1)/2-1$ на $n-2$.

Основным результатом работы [33] явился полиномиальный алгоритм для нахождения по данной косе b одного элемента из верхушки класса $[b]$. Однако, для сравнения двух классов $[b_1]$ и $[b_2]$ этого недостаточно. Чтобы сравнить два класса сопряженности, нам по-прежнему нужно вычислить верхушку хотя бы одного из них полностью.

Трудность этой задачи связана с двумя обстоятельствами: во-первых, для числа элементов $\mathcal{S}(b)$ не известно оценки лучшей, чем экспоненциальная по длине косы b ; во-вторых для того, чтобы убедиться, что найдена вся верхушка $\mathcal{S}(b)$, к каждому из найденных элементов нужно применить всевозможные допустимые сопряжения и проверить, что не получаются новые элементы.

В работе [34] показано, как обойти вторую трудность: для нахождения всей верхушки к каждому найденному элементу $a \in \mathcal{S}(b)$ достаточно применять такие допустимые сопряжения $a \mapsto s_\pi^{-1} a s_\pi$, что для любого левого собственного делителя s_π элемента $s_\pi \in B_n^+$ сопряжение $a \mapsto s_\pi^{-1} a s_\pi$ не является допустимым, т.е. $s_\pi^{-1} a s_\pi \notin \mathcal{S}(b)$. Оказывается, что это существенно сужает перебор, необходимый для нахождения каждого следующего элемента из верхушки, делая его полиномиальным, и дает возможность выполнять алгоритм на практике для кос небольшой длины (10–20 букв σ_i).

5.3. Применение к узлам. Попытка использовать подход Александра–Маркова к описанию зацеплений с помощью замкнутых кос для построения алгоритмов связана с желанием избавиться от необходимости исследовать дополнительное пространство зацепления и оперировать вместо этого объектами, имеющими “более симметричную” природу. Главная трудность с использованием кос для алгоритмической классификации зацепления связана с отсутствием простой алгебраической интерпретации второго движения Маркова (стабилизации и дестабилизации).

В работах [35]–[41] систематически разрабатывается техника, которая, возможно, позволит добиться ясности в этом вопросе. Однако, на сегодняшний день общего алгоритма сравнения двух зацеплений, использующего специфику замкнутых кос, не построено. Имеется, однако, алгоритм для распознавания тривиального узла. Его предложили Дж. Бирман и М. Хирш в [42].

Приведем кратко идеи алгоритма Бирман–Хирша. В пространстве фиксируется цилиндрическая система координат с осью ℓ . Классы сопряженности кос ассоциируются с замкнутыми кривыми, не пересекающими ℓ и трансверсальными полуплоскостям $\theta = \text{const}$, где θ – угловая координата. Если такая замкнутая коса b задает тривиальный узел, то ее можно затянуть диском F таким, что $\partial F = b$. Выбрав такой диск общего положения, можно добиться, чтобы слоение \mathcal{F} , заданное ограничением на $F \setminus \ell$ формы $d\theta$, имело только морсовские особенности. Кроме того, от максимумов/минимумов функции $\theta|_{F \setminus \ell}$ можно избавиться подходящей деформацией диска F (см. аналогичную конструкцию ниже). Тогда слоение \mathcal{F} будет иметь только седла, и без ограничения общности можно считать, что никакие два из них не лежат в одной полуплоскости $\theta = \text{const}$.

Полученное таким образом слоение \mathcal{F} можно описать комбинаторно. Добавив к комбинаторной структуре слоения \mathcal{F} информацию о порядке точек пересечения $F \cap \ell$ на оси ℓ и циклическом порядке седел при положительном обходе вокруг ℓ , мы получим набор данных, по которому класс сопряженности косы b восстанавливается однозначно.

Алгоритм Бирман–Хирша делает следующее. Генерируется список всевозможных слоений на проколоте диске, по возрастанию сложности. Для каждого из них рассматриваются всевозможные циклические упорядочения седел и вершин (точек из $F \cap \ell$). Для каждого полученного набора данных проверяются некоторые условия, отвечающие за их реализуемость при некотором вложении диска D^2 в \mathbb{R}^3 . Затем по каждому реализуемому слоению выписывается коса из соответствующего класса сопряженности.

Этот алгоритм создает список представителей из всевозможных классов сопряженности кос, задающих тривиальный узел. Для каждой данной косы b , представляющей тривиальный узел, ее класс сопряженности должен рано или поздно встретиться в этом списке. С помощью теории нормальных поверхностей дается оценка сверху, сколько элементов списка достаточно перебрать, чтобы в случае, если класс сопряженности косы b среди них не встретился, быть уверенным, что b представляет нетривиальный узел.

Строго говоря, этот алгоритм не дает нового решения проблемы алгоритмической распознаваемости тривиального узла, поскольку использует оценку, происходящую из теории нормальных поверхностей, которой самой по себе уже достаточно для доказательства. Однако алгоритм получается совершенно не похожим на алгоритм Хакена, и главное его преимущество состоит в том, что он генерирует список классов сопряженности кос, задающих тривиальный узел. В работе [65] указывается, как значительно сократить необходимый для этого перебор. Основная цель этого подхода состоит в накоплении конкретной информации, которая могла бы подсказать новые идеи построения алгоритмов классификации узлов и зацеплений.

6. Монотонное упрощение

Было бы интересно найти решение проблемы сравнения узлов и зацеплений в виде алгоритма приведения к каноническому виду, принцип которого состоял бы в упрощении данного зацепления до тех пор, пока это возможно, так, чтобы полученное в результате упрощения представление данного зацепления определялось его изотопическим типом. В частности, любую диаграмму тривиального узла такой алгоритм должен монотонно распутывать до некоторой стандартной, простейшей, диаграммы. (Заметим, что подобный подход наиболее близок к принципу, которым мы пользуемся, распутывая запутанную веревку.)

Известно много примеров плоских диаграмм тривиального узла, из которых нельзя получить диаграмму без пересечений с помощью движений Райдемайстера, не увеличивающих сложность диаграммы по дороге. Бесконечная серия таких примеров построена в [66]. Простейшая диаграмма из этой серии показана на рис. 10.

Подход Александра–Маркова также не дает алгоритма монотонного упрощения. В [67] показано, что замыкание косы $\beta = \sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^3\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1} \in B_4$ является тривиальным узлом, однако любая последовательность движений Маркова, превращающая β в косу $1 \in B_1$, должна использовать стабилизацию. Это значит, что количество нитей, а значит, и сложность косы, должны быть в какой-то момент увеличены.

Следующее утверждение, доказанное автором недавно [43], показывает, что идея приведения зацеплений к каноническому виду имеет право на существование.

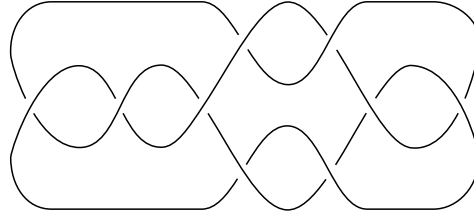


Рис. 10. Диаграмма тривиального узла, которую нельзя монотонно упростить движениями Райдемайстера

ТЕОРЕМА 6.1. *Любая прямоугольная диаграмма тривиального узла допускает нестрогое монотонное упрощение элементарными преобразованиями, т.е. может быть превращена в простейшую диаграмму (сложности два) циклическими перестановками, рокировками и дестабилизациями.*

Определение прямоугольных диаграмм и элементарных преобразований см. в разделе 2. Для доказательства теоремы 6.1 используются так называемые книжные представления зацеплений (arc-presentations of links), см. определение ниже. Прямоугольные диаграммы – это способ кодирования книжных представлений. Поэтому фактически теорема 6.1 утверждает возможность монотонного упрощения любого книжного представления тривиального узла.

Мы приведем здесь полное доказательство теоремы 6.1, несколько отличное от того, которое дано в [43]. Идеи доказательства во многом заимствованы автором из работ [68], [39], [51], поэтому сначала мы дадим подробную историческую справку.

В [68] Д. Беннекен доказал следующее неравенство, связывающее число нитей n произвольной косы b , алгебраическое число m пересечений в b и наименьший возможный род g поверхности Зейферта для L_b , ориентация которой согласована с ориентацией зацепления L :

$$2g - 1 \geq |m| - n. \quad (15)$$

Идея доказательства состояла в следующем. Беннекен рассмотрел в S^3 слоение Рибба \mathcal{R} и представил замкнутые косы как зацепления, трансверсальные этому слоению. Напомним, что слоение Рибба содержит один замкнутый слой, гомеоморфный двумерному тору \mathbb{T}^2 , который разделяет S^3 на два полнотория, назовем их M_1 и M_2 . Любое зацепление, трансверсальное \mathcal{R} , должно целиком лежать в M_1 или M_2 и иметь вид замкнутой косы. Будем считать, что оно лежит в M_1 .

Далее Беннекен рассмотрел ограничение \mathcal{F} слоения \mathcal{R} на произвольную поверхность Зейферта F , $\partial F = L_b$. Он потребовал, чтобы пересечение $F \cap M_2$ состояло из меридианальных дисков. Беннекен показал, что заменой пары L_b, F на изотопную $L_{b'}, F'$ можно избавиться от наличия в слоении \mathcal{F} определенных фрагментов. Для слоения, не содержащего этих фрагментов, неравенство Беннекена получается элементарным подсчетом эйлеровой характеристики $\chi(F)$ в терминах особенностей слоения \mathcal{F} .

Нам не понадобится неравенство Беннекена, но понадобятся топологические приемы, которыми он заменяет пару зацепление+поверхность на изотопную так, чтобы слоение \mathcal{F} изменялось заранее предписанным образом. Мы называем эти приемы трюками Беннекена. Важная особенность этих приемов состоит в том, что возможность

их применения гарантируется структурой слоения \mathcal{F} . Это значит, что, не глядя, как именно поверхность F вложена в S^3 , а зная только, как выглядит на ней слоение \mathcal{F} , мы можем сказать, какие из трюков Беннекена заведомо можно применить и как будет выглядеть слоение после этого.

Заметим, что роль слоения внутри полнотория M_2 в конструкции Беннекена несущественна, поэтому слоение Рибба можно заменить на более простое: полноторие M_2 можно стянуть в окружность $S^1 \subset S^3$, дополнение к которой будет расслоено открытыми дисками такими, что S^1 будет краем замыкания каждого из них.

Заметим также, что Беннекен не обсуждает вопрос, как на алгебраическом языке описать изменение косы $b \mapsto b'$ в результате его трюков, поскольку преследует лишь цель доказать неравенство (15).

В серии работ [35]–[40] Бирман и Менэско получили ряд результатов с использованием трюков Беннекена. Они рассматривали расслоение $S^3 \setminus S^1$ на диски и представляли замкнутые косы как зацепления, трансверсальные этому слоению. Бирман и Менэско проанализировали, что происходит с косой в результате применения трюков Беннекена и ввели *операцию обмена* (exchange move), показанную на рис. 11. Операция обмена разлагается в композицию движений Маркова, включающих одну стабилизацию, одну дестабилизацию и сопряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_n^{-1} b \sigma_n b' &\mapsto \sigma_n^{-2} b \sigma_n b' \sigma_n \mapsto \sigma_n^{-2} b \sigma_n b' \sigma_n \sigma_{n+1} \\ &\mapsto \sigma_n \sigma_{n+1} \sigma_n^{-2} b \sigma_n b' = \sigma_{n+1}^{-2} \sigma_n \sigma_{n+1} b \sigma_n b' \mapsto \sigma_n b \sigma_{n+1} \sigma_n \sigma_{n+1}^{-2} b' \\ &\mapsto \sigma_n b \sigma_n^{-2} \sigma_{n+1} \sigma_n b' \mapsto \sigma_n b' \sigma_n b \sigma_n^{-2} \sigma_{n+1} \mapsto \sigma_n b' \sigma_n b \sigma_n^{-2} \mapsto \sigma_n b \sigma_n^{-1} b'. \end{aligned}$$

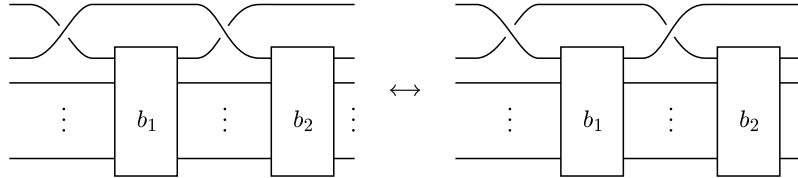


Рис. 11. Операция обмена для кос

Бирман и Менэско доказали следующие три утверждения.

ТЕОРЕМА 6.2. *Если L_b – тривиальный узел, то из b можно получить $1 \in B_1$ конечным числом операций обмена, сопряжений и дестабилизаций.*

ТЕОРЕМА 6.3. *Если L_b – разводимое зацепление, то конечным числом операций обмена и сопряжений b можно привести к виду $b = b_1 b_2$, где $b_1 \in \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1} \rangle$, $b_2 \in \langle \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$.*

ТЕОРЕМА 6.4. *Если L_b – составное зацепление, то конечным числом операций обмена и сопряжений b можно привести к виду $b = b_1 b_2$, где $b_1 \in \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1} \rangle$, $b_2 \in \langle \sigma_i, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. В доказательстве последней теоремы имеется пробел, который был указан в [43] и, как затем показали Бирман и Менэско, может быть легко устранен (исправление должно появиться в печати в ближайшее время). Указанные результаты Бирман и Менэско можно также получить как следствия аналогичных утверждений для книжных представлений [43], что неудивительно, поскольку для доказательства последних использован похожий метод.

ЗАМЕЧАНИЕ. В своих работах Бирман и Менэско использовали более общую операцию обмена, в которой вместо каждой из нитей, показанной на рис. 11, может быть несколько параллельных. Такая, более общая, операция разлагается в композицию обычных операций обмена и сопряжений. Этот факт не указан явно в упомянутых работах, хотя доказательство его несложно и безусловно известно их авторам.

Неформально говоря, результаты Бирман–Менэско можно сформулировать так: для того чтобы найти полное разложение данного зацепления, представленного в виде замыкания косы, на простые неразводимые слагаемые и тривиальные узлы, достаточно применять движения Маркова и операции обмена, не увеличивая количество нитей косы. Однако из этого утверждения не следует немедленно существование алгоритма разложения, основанного на простом переборе кос, получаемых указанными операциями, поскольку группа кос B_n при $n \geq 2$ бесконечна.

Оказалось, что разработанный на основе трюков Беннеке метод Бирман–Менэско расслоенных поверхностей работает столь же эффективно для книжных представлений. Это было замечено П. Кромвеллом [51], который, однако, не поставил вопроса о монотонном упрощении с помощью элементарных преобразований, а показал лишь, что сложность зацепления, измеряемая как минимально возможная сложность его книжного представления, аддитивна (после вычитания двух) при взятии операции связной суммы. Иначе говоря, взяв связную сумму двух книжных зацеплений, простейших в своих классах, некоторым стандартным образом, мы получим книжное представление, которое будет иметь наименьшую возможную сложность в своем классе эквивалентности. При этом Кромвелл повторил ошибку, сделанную Бирман и Менэско в [38].

Хотя Кромвелл и не обсуждает вопроса о монотонном упрощении книжных представлений зацеплений, содержащихся в его работе аргументам достаточно добавить лишь несколько технических замечаний, чтобы доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.5. *Если прямоугольная диаграмма R задает разводимое зацепление, то за конечное число рокировок и циклических перестановок ее можно превратить в несвязную сумму двух нетривиальных диаграмм, т.е. прямоугольную диаграмму, содержащую только вершины (i, j) , для которых $i, j \leq k$ или $i, j \geq k + 1$, где k – некоторое целое в интервале $[2, c(R) - 1]$.*

В работе Кромвелла содержится также существенная часть доказательства аналогичной теоремы для связных сумм.

ТЕОРЕМА 6.6. *Если прямоугольная диаграмма R задает составное неразводимое зацепление, то за конечное число рокировок и циклических перестановок ее можно превратить в связную сумму двух нетривиальных диаграмм, т.е. прямоугольную диаграмму, все вершины (i, j) которой, кроме двух, удовлетворяют $i, j \leq k$ или $i, j \geq k + 1$, где k – некоторое целое в интервале $[2, c(R) - 1]$.*

Для доказательства нужны те же технические замечания, что и для предыдущей теоремы, и нужно рассмотреть случай слоения, пропущенный в [51], а также в [38].

Возможность применения метода Бирман–Менэско для книжных представлений тривиального узла Кромвелл не рассматривал.

Теоремы 6.5 и 6.6 означают существование алгоритма для полного разложения зацепления на простые неразводимые слагаемые и тривиальные узлы. Для нахождения этого разложения нужно представить данное зацепление некоторой прямоугольной диаграммой R и затем перебрать все прямоугольные диаграммы, которые можно получить из R элементарными преобразованиями, не включающими стабилизацию. Как мы знаем (см. предложение 2.1), этот перебор конечен.

Теперь мы приступим к доказательству теоремы 6.1.

В пространстве $\mathbb{R}^3 = S^3 \setminus \infty$ зафиксируем некоторую ориентированную прямую ℓ и свяжем с ней цилиндрическую систему координат (x, r, θ) , где x – координата на ℓ , а θ – угловая координата (координату r мы не будем использовать). Замыкания полу-плоскостей вида $\varphi = t = \text{const}$ будем называть *страницами* и обозначать P_t .

Книжным представлением данного изотопического класса зацеплений X (или, просто, *книжным зацеплением* из X) называется зацепление $L \in X$ такое, что

- 1) пересечение $L \cap \ell$ состоит из конечного числа точек, которые мы называем *вершинами*;
- 2) L состоит из конечного числа простых дуг, каждая из которых лежит в некоторой странице P_t ;
- 3) каждая страница P_t содержит не более одной дуги, входящей в L .

Заметим, что зацепления L_R , построенные в разделе 2 (см. (2)), являются книжными зацеплениями по отношению к обеим прямым $x = z = 0$ и $y = 0, z = 1$. В дальнейшем нам будет удобно считать, что дуги $L \cap P_t$ гладкие.

Соответствие между книжными представлениями зацеплений и прямоугольными диаграммами устанавливается следующим образом. Геометрическая прямоугольная диаграмма, соответствующая книжному зацеплению L , имеет вершинами все точки (x, y) такие, что $y \in [0, 2\pi)$ и L содержит дугу в P_y , один из концов которой – $x \in \ell \cong \mathbb{R}$. Чтобы получить “алгебраическую” прямоугольную диаграмму, соответствующую L , нужно занумеровать дуги $L \cap P_t$ по возрастанию координаты t и вершины $L \cap \ell$ по возрастанию x , а затем выписать таблицу инцидентий между вершинами и дугами зацепления L .

При деформации зацепления в классе книжных зацеплений с фиксированным числом вершин соответствующая прямоугольная диаграмма может претерпевать только циклические перестановки горизонтальных ребер. Мы будем рассматривать ось ℓ как замкнутую окружность, причисляя к ней точку ∞ , а страницы P_t – как замкнутые двумерные диски. Тогда деформация книжного зацепления может также вызывать и циклические перестановки вертикальных ребер. Таким образом, комбинаторные классы книжных представлений – это прямоугольные диаграммы, рассматриваемые с точностью до циклических перестановок.

Введем некоторые обозначения и определения. Для трех точек x_1, x_2, x_3 ориентированной окружности будем писать $x_2 \in (x_1, x_3)$, если точки x_1, x_2, x_3 попарно различны и при положительном обходе вдоль S^1 встречаются в таком порядке: $\dots, x_1, x_2, x_3, x_1, x_2, \dots$. Мы также пишем $x_2 \in [x_1, x_3]$, если $x_2 \in (x_1, x_3)$ или

$x_2 \in \{x_1, x_3\}$. Через γ_{t,x_1,x_2} мы будем обозначать любую дугу, собственно вложенную в P_t , с концами $\partial\gamma_{t,x_1,x_2} = \{x_1, x_2\}$.

Дуги $\gamma_{t_1,x_1,x'_1}, \gamma_{t_2,x_2,x'_2}$, входящие в некоторое книжное зацепление L , называются *соседними* в L , если L не имеет дуг в страницах P_t при $t \in (t_1, t_2)$ или при $t \in (t_2, t_1)$. Соседние дуги $\gamma_{t_1,x_1,x'_1}, \gamma_{t_2,x_2,x'_2}$ называются *скрещивающимися*, если пары (x_1, x'_1) и (x_2, x'_2) зацеплены. Соседние вершины x_1, x_2 называются *скрещивающимися*, если зацеплены пары (t_1, t'_1) и (t_2, t'_2) , где t_i, t'_i — это θ -координаты дуг, концом которых является $x_i, i = 1, 2$.

Нам понадобятся следующие операции над книжными зацеплениями, которые не меняют их изотопического типа (они введены также в [51]):

- перестановка соседних нескрещивающихся дуг*: соседние нескрещивающиеся дуги $\gamma_{t_1,x_1,x'_1}, \gamma_{t_2,x_2,x'_2}$ заменяются на $\gamma_{t_2,x_1,x'_1}, \gamma_{t_1,x_2,x'_2}$;
- перестановка соседних нескрещивающихся вершин*: для двух нескрещивающихся вершин x_1, x_2 дуги $\gamma_{t'_1,x_1,x'_1}, \gamma_{t''_1,x_1,x''_1}, \gamma_{t'_2,x_2,x'_2}, \gamma_{t''_2,x_2,x''_2}$ заменяются на $\gamma_{t'_1,x_2,x'_1}, \gamma_{t''_1,x_2,x''_1}, \gamma_{t'_2,x_1,x'_2}, \gamma_{t''_2,x_1,x''_2}$;
- стабилизация*: замена некоторой дуги $\gamma_{t,x_1,x_2} \subset L$ на пару соседних дуг $\gamma_{t,x_1,x_3} \cup \gamma_{t+\varepsilon,x_2,x_3}$, где $x_3 \notin L$;
- дестабилизация*: операция, обратная к стабилизации.

В терминах соответствующих прямоугольных диаграмм перестановки нескрещивающихся дуг и нескрещивающихся вершин соответствуют рокировке. Введенная нами операция стабилизации для прямоугольных диаграмм представляет собой частный случай стабилизации для книжных зацеплений. Общий случай стабилизации книжных зацеплений с помощью рокировок сводится к частному, когда добавляемая вершина x_3 является соседней с x_1 . Это проиллюстрировано на рис. 12 с помощью соответствующих прямоугольных диаграмм.

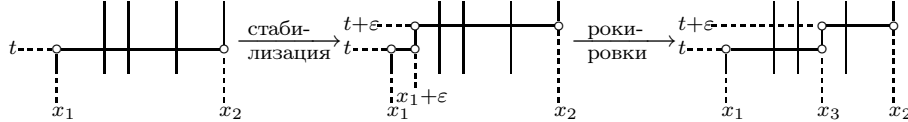


Рис. 12. Сведение общего случая стабилизации к частному

Нам также понадобится следующая операция, обобщающая перестановку вершин, которую мы называем *обобщенной рокировкой*. Пусть $x_1, x_2, x_3 \in \ell \setminus L, x_2 \in (x_1, x_3), t_1, t_2, t_3 \in S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ таковы, что

- 1) ни одна дуга $\gamma_{t,x,x'} \subset L$ не пересекается с γ_{t,x_1,x_2} при $t \in [t_1, t_2]$;
- 2) ни одна дуга $\gamma_{t,x,x'} \subset L$ не пересекается с γ_{t,x_2,x_3} при $t \in [t_2, t_1]$.

Тогда мы называем обобщенной рокировкой перестановку всех вершин из (x_1, x_2) с вершинами из (x_2, x_3) с сохранением порядка вершин внутри каждого из интервалов. Опишем эту операцию более формально. Без ограничения общности можем считать $x_1, x_3 \neq \infty, x_1 < x_2 < x_3$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x + x_3 - x_2, & \text{если } x \in (x_1, x_2), \\ x + x_1 - x_2, & \text{если } x \in (x_2, x_3), \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определяемая нами обобщенная рокировка заменяет в L каждую дугу вида $\gamma_{t,x,x'}$ на $\gamma_{t,f(x),f(x')}$.

На рис. 13 продемонстрировано, что обобщенная рокировка раскладывается в композицию перестановок дуг и перестановок вершин.

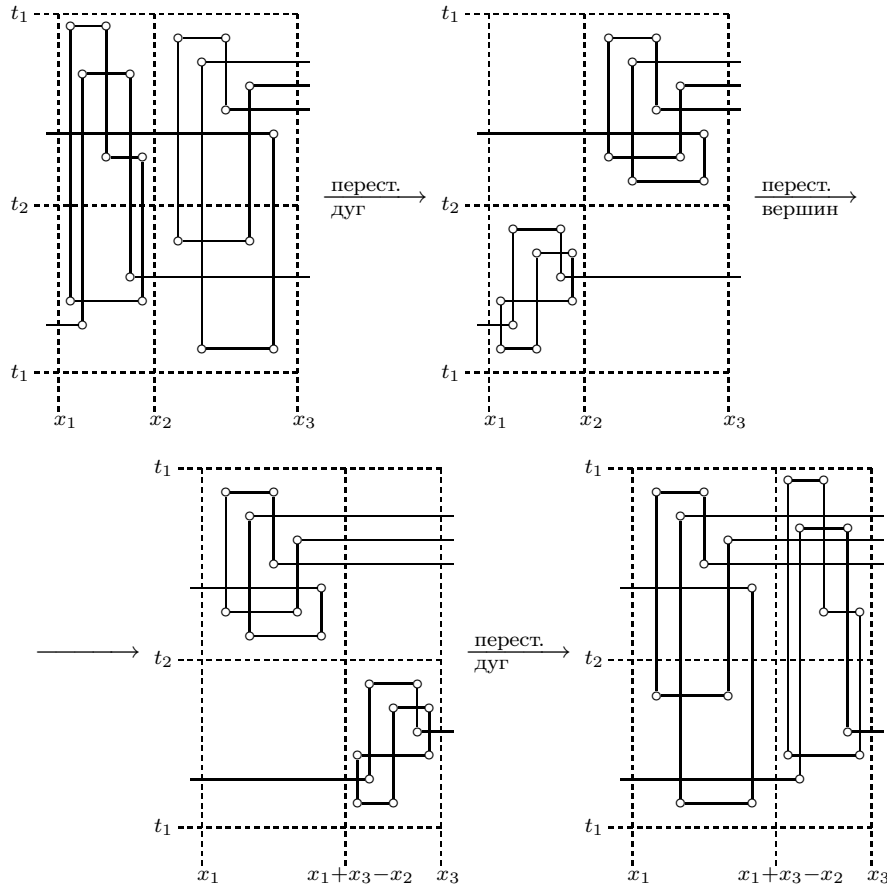


Рис. 13. Разложение обобщенной рокировки в композицию обычных

Пусть K – книжное представление тривиального узла. Тогда найдется вложенный двумерный диск $F \subset S^3$, $F \cong D^2$, границей которого является K . Этот диск можно выбрать так, чтобы он удовлетворял следующим условиям общего положения:

- поверхность F гладкая вплоть до края (за исключением вершин узла K , где нарушена гладкость самого узла);
- внутренность диска F пересекает ось ℓ трансверсально в конечном числе точек;
- ограничение (многозначной) функции θ на $F \setminus \ell$ имеет критические точки только морсовского типа, т.е. седла, максимумы и минимумы.

Рассмотрим слоение с особенностями \mathcal{F} на диске F , заданное уравнением $d\theta = 0$. Иначе говоря, слоями \mathcal{F} являются компоненты пересечений $F \cap P_t$. Заметим, что поверхность F может касаться страниц P_t и в точках края. В этом случае слоение \mathcal{F}

будет иметь особенность типа седла на крае. В точках $F \cap \ell$ форма $d\theta$ не определена вовсе. Мы будем называть точки $F \cap \ell$ *вершинами* слоения \mathcal{F} , различая *внутренние*, т.е. лежащие во внутреннейности диска F , и *граничные*, которые являются вершинами узла K . Поведение слоения \mathcal{F} вблизи внутренних и граничных вершин показано на рис. 14 а) и б) соответственно. Особенности слоения \mathcal{F} , показанные на рис. 14 в), г) и д), мы называем *полюсами*, *внутренними седлами* и *граничными седлами* соответственно.

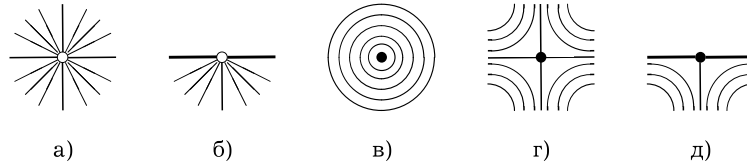


Рис. 14. Слоение \mathcal{F} возле вершин и особых точек

Наложим дополнительное условие на поверхность F :

- никакие два седла, хотя бы одно из которых внутреннее, не соединены сепаратрисой.

Выполнения этого ограничения всегда можно добиться шевелением поверхности F . Отметим, что наличие нескольких седел на одной дуге вида $K \cap P_t$ не запрещено, поскольку малым шевелением поверхности F при фиксированном крае такая ситуация не устраняется.

Диск F можно продеформировать так, что слоение \mathcal{F} не будет иметь полюсов и замкнутых слоев. Делается это точно так же, как, например, в [39]: сначала из диска F удаляются все замкнутые слои, полюсы и особые слои, имеющие вид “восьмерки” (т.е. такие, в окрестности которых лежат лишь замкнутые неособые слои). Получается диск с дырками, край каждой из которых лежит в некоторой странице P_t и содержит одно внутреннее седло. На рис. 15 слева показано, как выглядит слоение в окрестности новой компоненты края. После добавления к нашей поверхности плоского диска, ограничиваемого этой кривой, и малого шевеления, получаем слоение, показанное на рис. 15 справа.

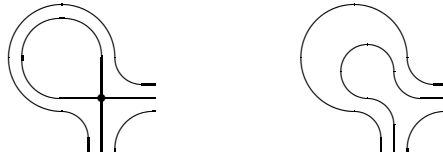


Рис. 15. Удаление замкнутых слоев

Далее мы будем работать с дисками F , для которых слоение \mathcal{F} не имеет замкнутых слоев и полюсов. Неособые слои \mathcal{F} – это открытые дуги, соединяющие две вершины слоения \mathcal{F} . Замыкание объединения неособых слоев, подходящих к данной вершине v , будем называть *звездой* вершины v . Количество седел (внутренних и граничных), содержащихся в звезде вершины v , назовем *валентностью* вершины v .

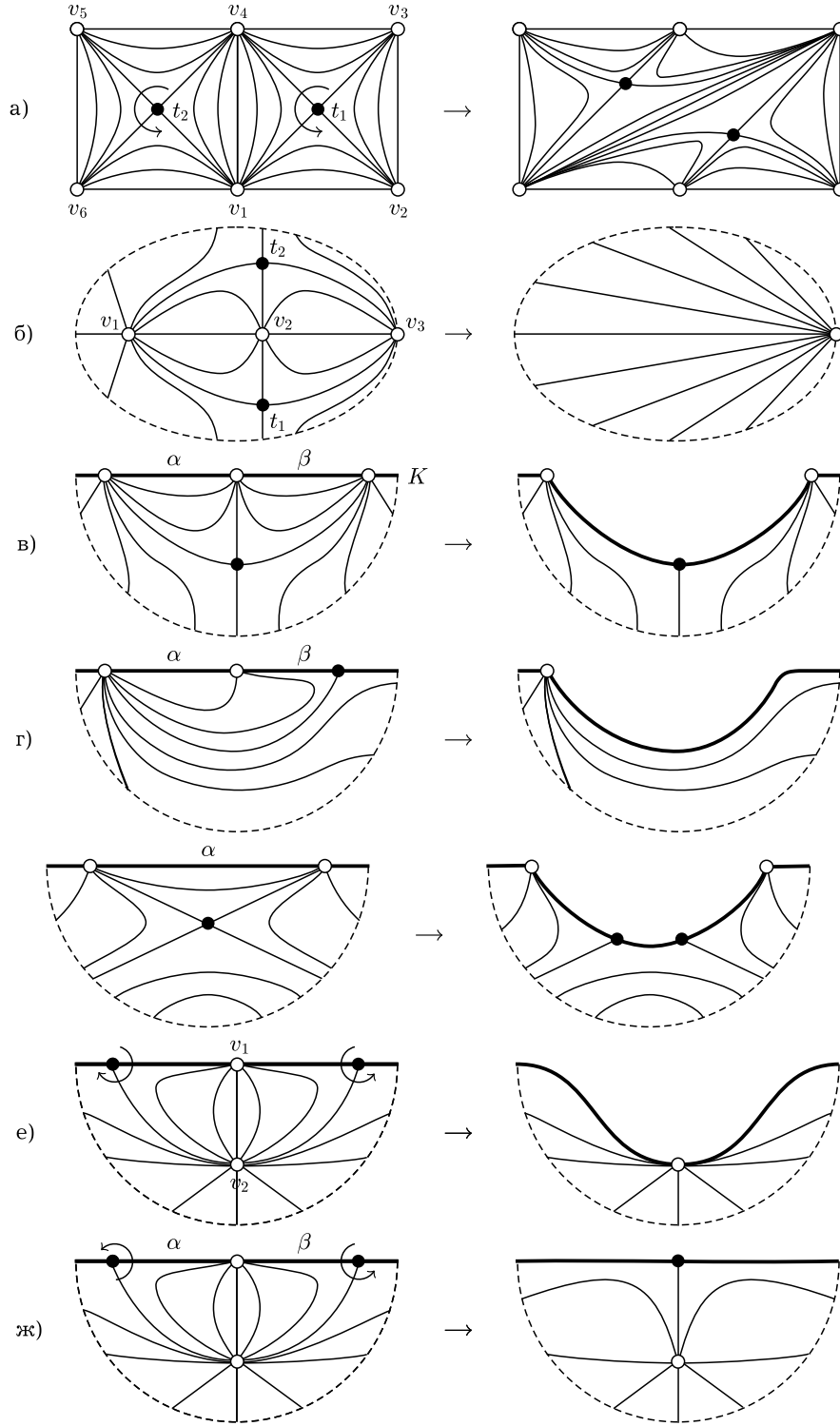


Рис. 16. Упрощение слоения \mathcal{F}

Внутреннюю вершину назовем *хорошей*, если в ее звезде не более одной вершины является граничной. Граничную вершину v назовем *хорошей*, если в границе ее звезды нет граничных вершин, кроме тех, с которыми v соединена отрезком дуги, содержащейся в $K = \partial F$.

Обозначим через V_k количество внутренних вершин валентности k , через V_k^b – количество граничных вершин валентности k , через s – число внутренних седел, через s^b – число граничных седел и, наконец, через q – количество дуг в $K = \partial F$, содержащих хотя бы одно граничное седло. Мы имеем

$$c(K) = \sum_k V_k^b, \quad (16)$$

$$2q \leq c(K) + s^b. \quad (17)$$

Введем понятие сложности диска F как следующую четверку целых чисел:

$$c(F) = (c(K), s, s^b, V_3'), \quad (18)$$

где V_3' – количество хороших трехвалентных вершин. Для таких четверок введем лексикографический порядок: $(i, j, k, l) < (i', j', k', l')$, если либо $i < i'$, либо $i = i'$ и $j < j'$, и т. д.

Для каждого седла x мы определим *ориентацию*, которая задается циклическим порядком вершин, соединенных с x сепаратрисами, на оси ℓ .

Теперь мы введем набор операций, которыми диск F можно монотонно упростить. Обратимся к рис. 16 а)–ж). Мы утверждаем, что для каждого из них выполнено следующее:

если в слоении \mathcal{F} встретился фрагмент, изображенный на рисунке слева, то найдется другой диск F' , граница которого $K' = \partial F'$ также является книжным узлом, такой, что: 1) слоение \mathcal{F}' на F' получается из слоения \mathcal{F} заменой левого фрагмента на правый; 2) узел K' получается из K конечным числом рокировок и (возможно) дестабилизацией.

Отложив на время доказательство этого факта, проверим, что этими операциями (а также им симметричными) диск F всегда можно упростить до диска, показанного на рис. 17.

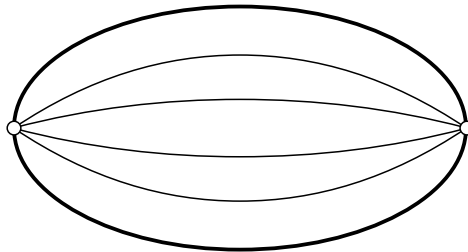


Рис. 17. Простейшее слоение \mathcal{F}

Если слоение \mathcal{F} имеет хорошую одновалентную граничную вершину, то слоение упрощается одной из операций в), г). При этом упрощается узел $K = \partial F$.

Если слоение \mathcal{F} имеет хорошую двухвалентную внутреннюю вершину, то его можно упростить операцией б). Если таких вершин нет, но есть хорошая трехвалентная внутренняя вершина, то два из трех седел, входящих в ее звезду, имеют одинаковую ориентацию, и слоение можно упростить операцией а). При этом хорошая трехвалентная вершина v_1 превращается в хорошую двухвалентную и число хороших трехвалентных вершин уменьшается.

Если на какой-то из дуг, составляющих K , нет ни одного граничного седла и хотя бы один из ее концов является хорошей граничной вершиной, то можно применить операцию д). При этом уменьшится число внутренних седел.

Наконец, если таких дуг нет, но имеется хорошая двухвалентная граничная вершина, то слоение упрощается операцией е) или ж). В случае е) уменьшается число граничных седел, в случае ж) упрощается узел K .

Таким образом, для того, чтобы слоение \mathcal{F} можно было упростить одной из операций, показанных на рис. 16, достаточно наличия в нем хорошей внутренней вершины валентности ≤ 3 или хорошей граничной вершины валентности ≤ 2 .

Из выражения эйлеровой характеристики через топологические индексы особенностей имеем

$$1 = \sum_k V_k + \frac{1}{2} \sum_k V_k^b - s - \frac{1}{2} s^b. \quad (19)$$

Подсчитав сепаратрисы двумя разными способами, получаем

$$\sum_k k(V_k + V_k^b) = 4s + s^b + 2q. \quad (20)$$

Из (16), (19), (20) получаем

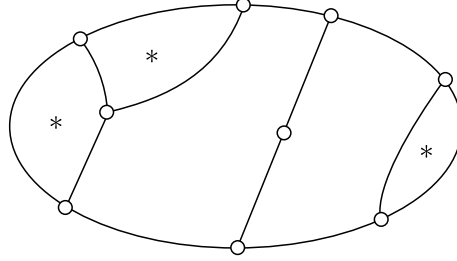
$$4 = \sum_k (4 - k)V_k + \sum_k (3 - k)V_k^b - c(K) - s^b + 2q. \quad (21)$$

Заметим, что внутренних вершин валентности ≤ 1 и граничных вершин валентности нуль в слоении \mathcal{F} нет, если оно не имеет вида, показанного на рис. 17. Поэтому (21), с учетом (17), дает

$$2V_2 + V_3 + 2V_1^b + V_2^b = 4 + \sum_{k \geq 5} (k - 4)V_k + \sum_{k \geq 4} (k - 3)V_k^b + c(K) + s^b - 2q \geq 4. \quad (22)$$

Если все вершины являются хорошими, то из последнего неравенства следует возможность применить одну из операций на рис. 16. Предположим, что хороших внутренних вершин валентности ≤ 3 и хороших граничных вершин валентности ≤ 2 нет. Разрежем диск F вдоль регулярных слоев слоения \mathcal{F} , соединяющих плохие внутренние вершины с граничными, и слоев, соединяющих пары плохих граничных вершин, см. рис. 18. Пусть Γ – объединение всех разрезов.

Среди дисков, полученных в результате разрезания, будет по меньшей мере два *концевых* диска, т.е. таких, граница которых соприкасается с Γ только один раз. На рис. 18 мы поместили концевые диски знаком *.

Рис. 18. Разрезание диска F по “перетяжкам”

Для концевго диска d можно повторить вычисления, сделанные выше, и получить:

$$2V_2 + V_3 + 2V_1^b + V_2^b \geq 4 + c + s^b - 2q,$$

где все обозначения V_2, V_3, s^b, \dots относятся к количеству вершин, седел и т. д. в d . Так как во всем диске F не было внутренних хороших вершин валентности ≤ 3 , их нет и в d . Плохих вершин в d нет по построению. Так что для диска d имеем

$$2V_1^b + V_2^b \geq 4 + c + s^b - 2q. \quad (23)$$

Хорошие одно- и двухвалентные вершины в ∂d могут быть только в $\partial d \cap \Gamma$. Возможны следующие два случая.

Случай 1: пересечение $\partial d \cap \Gamma$ состоит из одной дуги. Концы дуги $\partial d \cap \Gamma$ не могут иметь валентность 1, поэтому имеем $V_2^b \leq 2, V_1^b = 0$. Это противоречит неравенству (23).

Случай 2: пересечение $\partial d \cap \Gamma$ состоит из двух дуг. Так как на этих дугах нет граничных седел, имеем $c + s^b - 2q \geq 2$. Из трех вершин, входящих в $\partial d \cap \Gamma$, не более двух имеют валентность 1. Отсюда $V_1^b \leq 2, V_1^b + V_2^b \leq 3$. Снова получаем противоречие с (23).

Осталось объяснить, почему для каждого рисунка 16 а)–ж) левый фрагмент слоения всегда можно заменить правым с помощью допустимых преобразований узла K и подходящей деформации диска F . Рис. 16 а) и б) соответствуют трюкам Беннеке-на, которые изначально были определены для кос, при этом вместо нашего слоения использовалось слоение Рибба. Однако суть дела здесь та же, что и в [68]. Эти два приема используются в каждой из работ [35]–[40], [51]. Приемы в) и г) были введены в [43]. Приемы д)–ж) являются новыми.

Разберем все случаи по отдельности.

Случай а). Если в слоении \mathcal{F} встретились два соседних одинаково ориентированных внутренних седла, как на рис. 16 а), то это предписывает такой циклический порядок на оси ℓ соединенных с ними вершин: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. Рассмотрим, как изменяется сечение $P_t \cap F$ при росте t . В некоторый момент $t = t_1$ дуги v_1v_2 и v_3v_4 заменяются на v_1v_4, v_2v_3 в результате перестройки, соответствующей одному из седел на рис. 16 а). Затем вплоть до некоторого момента t_2 дуга v_1v_4 сохраняется, а при $t = t_2$ снова происходит перестройка, в результате которой дуги v_1v_4, v_5v_6 заменяются на v_1v_6, v_4v_5 . В промежутке $t \in (t_1, t_2)$ с сечением $P_t \cap F$ могут происходить

и другие события, но, поскольку дуга v_1v_4 остается при этом нетронутой, их можно разделить на следующие две группы: к первой группе отнесем те события, в которых участвуют дуги с концами из (v_1, v_4) , а ко второй – в которых участвуют дуги с концами из (v_4, v_1) .

События первой группы можно свободно переставлять с событиями второй. Поэтому все события из первой группы можно сдвинуть “в будущее”, т.е. так, чтобы они происходили сразу после t_2 , а события из второй – “в прошлое”, т.е. непосредственно перед t_1 . Тогда события

$$(v_1v_2, v_3v_4) \mapsto (v_1v_4, v_2v_3) \quad \text{и} \quad (v_1v_4, v_5v_6) \mapsto (v_1v_6, v_4v_5)$$

будут происходить одно за другим, и их можно будет заменить на пару событий

$$(v_3v_4, v_5v_6) \mapsto (v_3v_6, v_4v_5) \quad \text{и} \quad (v_1v_2, v_3v_6) \mapsto (v_2v_3, v_1v_6),$$

что отражается на слоении \mathcal{F} , как показано на рис. 16 а) справа.

Случай б). Без ограничения общности можно считать $v_2 \in (v_1, v_3)$. Из структуры слоения \mathcal{F} следует, что для некоторых t_1, t_2 мы имеем: $\gamma_{t, v_1, v_2} \in F$ при $t \in (t_1, t_2)$ и $\gamma_{t, v_2, v_3} \in F$ при $t \in (t_2, t_1)$. Это значит, что для достаточно малого ε мы будем иметь $\gamma_{t, v'_1, v'_2} \cap F = \emptyset$ при $t \in [t'_1, t'_2]$ и $\gamma_{t, v'_2, v'_3} \cap F = \emptyset$ при $t \in [t'_2, t'_1]$, где $v'_1 = v_1 + \varepsilon$, $v'_2 = v_2 - \varepsilon$, $v'_3 = v_3 + \varepsilon$, $t'_1 = t_1 - \varepsilon$, $t'_2 = t_2 + \varepsilon$. Таким образом, мы находимся в ситуации, в которой можно применить обобщенную рокировку и переставить отрезки (v'_1, v'_2) и (v'_2, v'_3) оси ℓ . Мы применяем ее не только к узлу K , но и к диску F , используя те же правила. Слоение на диске F при этом не изменяется. Главным итогом этой обобщенной рокировки является то, что вершины v_1 и v_2 становятся соседними, поэтому деформацией диска F , затрагивающей лишь поддиск, изображенный на рис. 16 б) слева, мы можем беспрепятственно устранить точки пересечения v_1, v_2 диска F с осью ℓ . Остальная часть слоения при этом тоже не затрагивается и без ограничения общности можно считать, что не появляются полюсы (иначе мы могли бы их сразу же удалить, как было сделано в самом начале процесса упрощения диска F). Отсюда легко видеть, что после такой деформации указанного поддиска слоение в нем выглядит так, как на рис. 16 б) справа.

Случай в). Этот прием значительно проще. Дуги α и β могут беспрепятственно скользить по диску в направлении седла до тех пор, пока не окажутся соседними. При этом узел K претерпевает конечное число перестановок дуг. Когда α и β оказываются соседними, их можно заменить на одну дугу с помощью операции дестабилизации.

Случай г). Этот прием аналогичен предыдущему. Дуга α скользит по диску, пока не становится соседней с β , после чего применяется дестабилизация.

Случай д). Дуга α скользит по диску F , пока не достигает седла. Затем мы ее сглаживаем, в результате чего седло, которое теперь стало граничным, превращается в “двукратное” граничное седло. Малым шевелением диска F его можно расщепить на пару простых граничных седел.

Случай е). Этот случай аналогичен случаю б). Здесь можно применить обобщенную рокировку к отрезкам $(v_1 - \varepsilon, v_1 + \varepsilon)$ и $(v_1 + \varepsilon, v_2 - \varepsilon)$, первый из которых содержит только вершину v_1 (ε следует выбрать достаточно малым). Вершины v_1, v_2

окажутся соседними, и число точек в пересечении $F \cap \ell$ можно будет уменьшить, сократив одну внутреннюю вершину.

Случай ж). Отличие от предыдущего случая состоит в том, что указанные седла одинаково ориентированы. Этот случай подобен случаю а). Диск F можно продеформировать так, чтобы эти седла следовали подряд на t -оси. Тогда дуги α и β окажутся соседними, и к ним можно будет применить дестабилизацию.

7. Сложность алгоритмов

Здесь мы кратко обсудим, насколько сложны рассмотренные выше алгоритмы. С практической точки зрения не имеет большого значения, требует ли алгоритм, скажем, n^{10} или 10^n операций для выполнения, где n — это длина входа. Однако вопрос о сложности алгоритмически трудных задач, к коим несомненно относится задача сравнения узлов, принято обсуждать с точки зрения принадлежности тому или иному сложностному классу, поскольку такая информация подсказывает, насколько хорошего улучшения существующего алгоритма можно ожидать. Скажем, если задача оказывается NP-трудной, то, скорее всего, она не имеет полиномиального решения (мы исходим из справедливости гипотезы $N \neq NP$). Если задача лежит в пересечении классов NP и coNP, то имеет смысл поиск ее полиномиального решения (хотя гипотеза $P = NP \cap coNP$ также не доказана).

Из перечисленных выше алгоритмов только алгоритмы для решения проблемы равенства в группе кос B_n являются по-настоящему быстрыми и могут использоваться на практике для кос, длина которых достаточна для любых мыслимых приложений (это не относится к алгоритмам Артина и Гарсайда, которые неоправданно сложны). Вопрос о сложности проблемы равенства в группах B_n был поднят Тёрстоном в [31], где он показал, что канонические виды (11) и (12) для косы на n нитях, заданной словом w длины $|w|$, можно найти за $O(|w|^2 \cdot n \log n)$ операций.

Кроме того, Тёрстон показал, что если две косы из B_n уже представлены в каноническом виде словами w_1, w_2 , то найти канонический вид их произведения можно за $O(|w_1| \cdot |w_2| \cdot n \log n)$ операций.

За счет выборановых образующих и соответствующего изменения определения канонического вида Бирман, Ко и Ли [64] улучшили оценку сложности алгоритма произведения косы к каноническому виду до $O(|w|^2 \cdot n)$.

Алгоритм автора [58] вычисляет $w \cdot (0, 1, \dots, 0, 1)$ для действия (6) за $O((n + |w|)^2)$ операций (на RAM-машине), что при больших n существенно лучше, чем сложность алгоритмов Тёрстона и Бирман–Ко–Ли. Недостатком является то, что вместо какого-либо канонического вида данной косы этот алгоритм выдает набор целых чисел, по которому сама коса не восстанавливается столь же быстро. В совместной работе Б. Виста и автора мы планируем дать полиномиальную оценку времени, необходимого для восстановления косы b по $b \cdot (0, 1, \dots, 0, 1)$ и для вычисления $b_1 b_2 \cdot (0, 1, \dots, 0, 1)$ по данным $b_1 \cdot (0, 1, \dots, 0, 1)$ и $b_2 \cdot (0, 1, \dots, 0, 1)$.

Алгоритм обращения слов П. Деорнуа [62] требует $O(|w|^2 \cdot n^2)$ операций. Другой алгоритм Деорнуа, алгоритм сокращения ручек [63], на практике также работает быстро, но полиномиальная оценка его сложности не доказана.

Что касается проблемы сопряженности в группах кос B_n , то, как мы отмечали выше, вопрос о сложности алгоритма, основанного на нахождении верхушки $\mathcal{S}(b)$, сво-

дится к оценке размера этой верхушки. Н. Франко и Х. Гонзалез-Менесес [34] показали, что если коса $b \in B_n$ задана словом w в σ_i -образующих, то множество $\mathcal{S}(b)$ можно вычислить за $O(|w|^2 n^4 \cdot |\mathcal{S}(b)|)$ операций. Таким образом, если удастся доказать полиномиальную оценку для $|\mathcal{S}(b)|$, то проблему сопряженности в группах кос B_n можно будет отнести к классу P.

О сложности алгоритмов для распознавания узлов на сегодняшний день известно немного. В работах [69] и [70] двумя разными методами, использующими алгоритм Хакена, доказано, что задача распознавания тривиального узла, а также оценки сверху рода узла, лежат в классе NP. Напомним, что принадлежность этих задач классу NP по определению означает, что для каждой пары (D, g) , где D – диаграмма некоторого узла, а $g \geq 0$ – некоторое целое число, существует *сертификат* C (“доказательство, что род узла L_D не превосходит g ”), размер которого полиномиально зависит от сложности записи, кодирующей (D, g) , такой, что некоторый алгоритм, не зависящий от D, g и C , получив на вход (D, g, C) , проверяет за полиномиальное время, подтверждает ли сертификат C , что род L_D не превосходит g .

Оба доказательства используют для построения сертификата нормальную поверхность F рода g , граница которой совпадает с данным узлом (если он тривиален). Как указывалось в разделе 3, такую поверхность можно найти среди фундаментальных. Тогда ее нормальные координаты зависят от сложности n данной диаграммы как $2^{O(n^2)}$, см. [69], а значит, длина записи этих координат растет с n не быстрее, чем полиномиально. Проверить, что данный узел является краем найденной поверхности, и то, что ее эйлерова характеристика равна $2 - 2g$, достаточно легко. Трудность, однако, возникает с построением полиномиального алгоритма, проверяющего, что поверхность F связна.

Для преодоления этой трудности в [69] используется тот факт, что поверхность Зейферта наименьшего рода может быть выбрана среди так называемых *вершинных* решений системы (3), (4), см. [71]. Это такие решения, для которых наибольшее число линейно независимых неравенств (3), ограниченных на пространство решений (4), обращается в равенство. Дж. Хасс, Дж. Лагариас и Н. Пиппенгер включают в сертификат C некоторую вершинную поверхность, и список тех неравенств из (3), проверив линейную независимость которых на пространстве решений (4), можно убедиться, что поверхность действительно вершинная.

И. Эгол, Дж. Хасс и У. Тёрстон [70] показали, как проверить связность поверхности F за полиномиальное время, даже если она не является вершинной. Дело в том, что по заданию нормальной поверхности F в виде решения системы (3), (4) можно описать ее пересечения с ребрами и двумерными гранями триангуляции объемлющего трехмерного многообразия в следующем виде. Пересечения с ребрами отождествляются с целочисленными точками некоторого интервала $[1, N]$, а пересечения с двумерными гранями задают некоторое отношение на этом интервале: мы будем писать $k \leftrightarrow l$, если точки с номерами k и l соединены отрезком, лежащим в одной двумерной грани триангуляции. И число N , и количество пар (k, l) , связанных отношением $k \leftrightarrow l$, может быть экспоненциально большим по сравнению со сложностью n данного узла. Однако для записи этих данных достаточно слова длины $O(n^2)$, и такая запись несложно извлекается из нормальных координат поверхности.

Для этого на каждом ребре триангуляции точки пересечения с F упорядочиваются

естественным образом, после чего каким-либо способом упорядочиваются сами ребра. Отношение \leftrightarrow задается в виде линейного по n числа отождествлений $[i, j] \leftrightarrow [k, l]$, где $|j - i| = |l - k|$, что означает следующее. Пусть $\epsilon = \text{sign}(j - i)$, $\epsilon' = \text{sign}(l - k)$. Тогда $[i, j] \leftrightarrow [k, l]$ означает следующий набор соотношений: $i + r\epsilon \leftrightarrow k + r\epsilon'$, $r = 0, 1, \dots, |j - i|$.

Итак, задача об определении связности F сводится за полиномиальное время к следующей: имеется отрезок $[1, N]$ длины $N = 2^{O(n^2)}$ и внутри него $O(n)$ отождествлений вида $[i, j] \leftrightarrow [k, l]$. Требуется определить, сколько классов эквивалентности имеет отношение, порожденное этими отождествлениями. Эгол, Хасс и Тёрстон показали, что ответ на этот вопрос можно найти за полиномиальное по n время.

В работах [69] и [70] доказывалось, что задача определения, является ли данное зацепление разводимым или составным, также лежит в NP.

Недавно Эгол предложил доказательство принадлежности классу NP задачи оценки рода узла снизу (не опубликовано). В частности, это означает, что задача распознавания тривиального узла лежит также в coNP, а это дает повод для надежды на существование для нее полиномиального алгоритма.

Заметим, что алгоритм монотонного упрощения, основанный на теореме 6.1, имеет оценку времени работы $2^{O(n \log n)}$, но не дает нового доказательства принадлежности задачи классу NP. Для того, чтобы получить такое доказательство, нужно найти полиномиальную оценку сверху для длины упрощающей последовательности. Единственная оценка, которая на сегодня известна автору, вытекает из оценки на общее число прямоугольных диаграмм сложности n , см. предложение 2.1. По-видимому, эту оценку можно существенно улучшить.

Что касается задачи сравнения произвольных узлов и зацеплений, о ее сложности ничего не известно. В частности, для времени работы алгоритма Матвеева не известно никакой оценки сверху, выраженной в элементарных функциях.

Для алгоритма Бирман–Хирша распознавания тривиального узла оценку времени работы выписать можно, но она будет заведомо не лучше, чем для алгоритма Хакена.

8. Некоторые новые алгоритмические задачи теории узлов

В этом разделе сформулировано несколько новых задач, которые естественно возникли при изучении автором вложений узлов в объединения полуплоскостей.

8.1. Флайпы прямоугольных диаграмм. Здесь мы введем единообразно описываемое семейство преобразований прямоугольных диаграмм, содержащее как частные случаи все рокировки, (де)стабилизации, а также отражения относительно диагоналей. Мы называем эти преобразования флайпами. Нам будет удобнее пользоваться языком геометрических прямоугольных диаграмм.

Пусть R – некоторая геометрическая прямоугольная диаграмма, a, b – положительные числа такие, что все вершины диаграммы R лежат в

$$(\mathbb{R}^2 \setminus (0, a+b) \times (0, a+b)) \cup (0, a) \times (0, b) \cup \{(a+t, t) \mid t \in (0, b)\} \cup \{(t, b+t) \mid t \in (0, a)\},$$

а также ни одна точка на отрезках $\{(a+t, t) \mid t \in (0, b)\}$ и $\{(t, b+t) \mid t \in (0, a)\}$, не являющаяся вершиной диаграммы R , не лежит на пересечении двух прямых, содержащих ребра диаграммы R .

Построим новую прямоугольную диаграмму R' , заменив каждую вершину $(x, y) \in (0, a) \times (0, b)$ на $(y + a, x + b)$. На отрезках $\{(a + t, t) \mid t \in (0, b)\}$ и $\{(t, b + t) \mid t \in (0, a)\}$ вершины удаляются или добавляются, исходя из того, чтобы в результате получился набор вершин некоторой прямоугольной диаграммы. Это можно сделать единственным способом. См. пример на рис. 19.

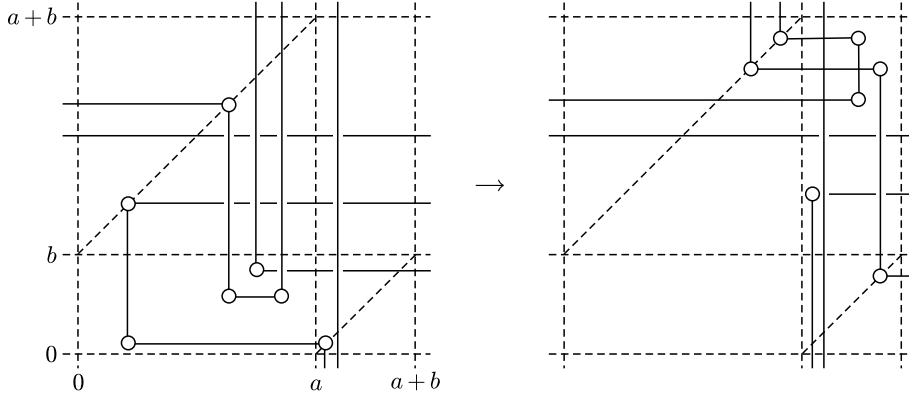


Рис. 19. Пример флайпа

Преобразование $R \mapsto R'$, а также любое, сопряженное ему с помощью поворота на $\pi/2$ или π , назовем *флайпом*. По нашему определению преобразование, обратное к флайпу, также является флайпом. Мы выбрали такое название для описанной только что операции $R \mapsto R'$ потому, что, если рассматривать R как обычную плоскую диаграмму, в некоторых случаях действие нашей операции совпадает с операцией, называемой флайпом в литературе. Однако в общем случае флайп в нашем смысле может давать совершенно другие преобразования. Например, если вся диаграмма R находится внутри прямоугольника $(0, a) \times (0, b)$, то флайп $R \mapsto R'$ сводится к отражению относительно прямой $x = y$ и сдвигу, который для нас несущественен. На рис. 20 продемонстрировано, что стабилизация и рокировка также являются частными случаями флайпов.

Предложение 8.1. *Определенная выше операция флайпа $R \mapsto R'$ всегда сохраняет изотопический тип зацепления: $L_R \sim L_{R'}$.*

Задача 1. Изучить возможности флайпов в общем случае. Всегда ли можно уменьшить сложность диаграммы тривиального узла, применив всего один флайп? Всегда ли флайпами можно перейти от одной прямоугольной диаграммы к другой, не увеличивая сложность, если эти диаграммы задают изотопные зацепления?

Эти вопросы кажутся автору интересными сами по себе. Кроме того, положительный ответ на первый вопрос мог бы позволить построить полиномиальный алгоритм для распознавания тривиального узла, а положительный ответ на второй вопрос мог бы позволить установить принадлежность задачи сравнения зацеплений классу NP.

8.2. Алгоритм Хакена и каноническая триангуляция. По любому комбинаторному описанию зацепления можно так или иначе построить триангуляцию его

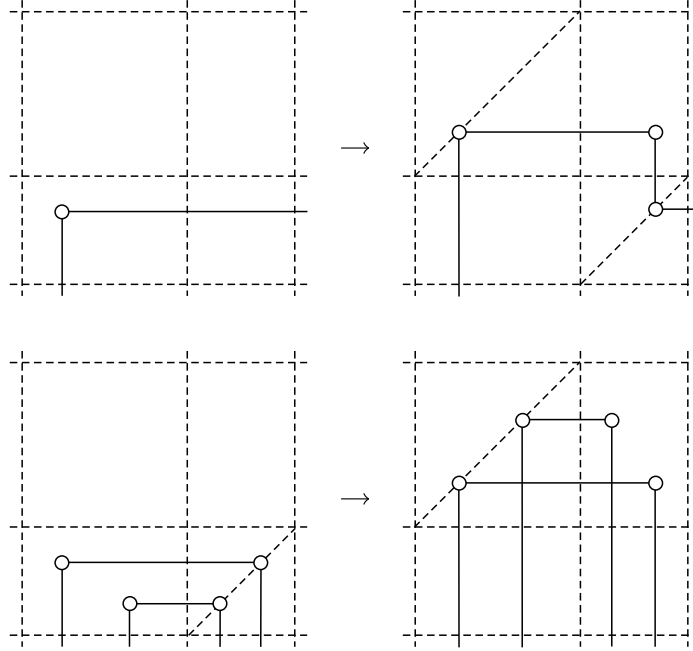


Рис. 20. Стабилизация и рокировка как частные случаи флайпов

дополнительного пространства. В случае прямоугольных диаграмм имеется канонический способ указать триангуляцию T сферы S^3 такую, что данное зацепление будет реализовано подмножеством одномерного скелета триангуляции T . Это делается следующим образом.

Пусть R – прямоугольная диаграмма сложности n . Представим S^3 как джойн двух окружностей, $S^3 = S^1 * S^1$. На каждой из окружностей отметим n точек и занумеруем их в соответствии с ориентацией окружности. Пусть A_1, \dots, A_n – точки на первой окружности, B_1, \dots, B_n – на второй. Для каждой вершины $(i, j) \in R$ нашей прямоугольной диаграммы соединим точку A_i с B_j отрезком $A_i * B_j \subset S^1 * S^1$. Получим зацепление L_R . Оно будет подмножеством одномерного остова триангуляции сферы S^3 , 3-симплексами которой являются $[A_i, A_{i+1}] * [B_j, B_{j+1}] \subset S^1 * S^1$, $i, j \in 1, 2, \dots, n$, где индексы рассматриваются по модулю n , а $[C, D]$ обозначает дугу окружности S^1 между точками C и D . (Формально говоря, мы должны были потребовать $n \geq 3$, чтобы получить настоящую комбинаторную триангуляцию.) Обозначим эту триангуляцию через T_n . Она зависит только от сложности n данной диаграммы R .

Задача 2. Изучить возможности эффективизации метода Хакена при использовании триангуляций T_n . Для этой триангуляции описать явно все фундаментальные сферы.

Такая постановка вызвана тем, что в ряде конкретных примеров удается показать, что эйлерова характеристика поверхности, нормальной по отношению к T_n и не пересекающей L_R , линейно выражается через нормальные координаты с неположительными коэффициентами. Это позволяет сразу сделать вывод о несуществовании нор-

мальных сфер в дополнении к L_R . Эта ситуация имеет место, например, для всех “жестких” зацеплений, т.е. не допускающих ни одной рокировки и дестабилизации.

Заметим, что умение быстро находить фундаментальные сферы в дополнении к зацеплению означает существование быстрого алгоритма для распознавания разводимого зацепления. Последнее в свою очередь влечет наличие быстрого алгоритма для распознавания тривиального узла.

Действительно, пусть K – некоторый узел. Рассмотрим зацепление, получающееся заменой K на две его параллельные копии, имеющие коэффициент зацепления нуль. Легко показать, что L развимо тогда и только тогда, когда узел K тривиален.

Если каким-то образом удастся описать все фундаментальные сферы для триангуляции T_n , то для построения алгоритма распознавания тривиального узла достаточно будет научиться эффективно отбирать среди этих сфер те, которые не пересекают данное семейство ребер.

8.3. Сведение классификации зацеплений к проблеме равенства в конечно определенной полугруппе. Пусть Y_3 – полугруппа, заданная множеством образующих $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i \in \mathbb{Z}_3}$ и соотношениями

$$\begin{aligned} a_i &= a_{i+1}d_{i-1}, & b_i &= a_{i-1}c_{i+1}, & c_i &= b_{i-1}c_{i+1}, & d_i &= a_{i+1}c_{i-1}, \\ d_1d_2d_3 &= 1, & b_id_i &= d_ib_i = 1, \\ x_iy_i &= y_ix_i, \end{aligned}$$

где $x_i \in \{a_{i-1}b_{i-1}, d_{i-1}c_{i-1}, b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}\}$, $y_i \in \{a_i, b_i, c_i, b_{i-1}d_id_{i-1}\}$, $i \in \mathbb{Z}_3$.

Пусть Y_4 – полугруппа, заданная множеством образующих $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i \in \mathbb{Z}_4}$ и соотношениями

$$\begin{aligned} a_id_{i+1} &= a_{i+1}b_i, & d_ic_{i+1} &= b_{i+1}c_i, & a_id_i &= a_{i+1}b_{i+1}, & b_ic_i &= d_{i+1}c_{i+1}, \\ d_1d_2d_3d_4 &= 1, & a_ib_ic_id_i &= 1, & b_id_i &= d_ib_i = 1, \\ x_iy_{i+2} &= y_{i+2}x_i, \end{aligned}$$

где $x_i \in \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$, $y_i \in \{a_i, b_i, c_i, d_i, b_{i-1}a_id_{i-1}, b_{i-1}b_id_{i-1}, b_{i-1}c_id_{i-1}\}$, $i \in \mathbb{Z}_4$.

При $n \geq 5$ пусть Y_n – полугруппа, заданная множеством образующих $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i \in \mathbb{Z}_n}$ и соотношениями

$$\begin{aligned} a_id_{i+1} &= a_{i+1}b_i, & d_ic_{i+1} &= b_{i+1}c_i, & a_id_i &= a_{i+1}b_{i+1}, & b_ic_i &= d_{i+1}c_{i+1}, \\ d_1d_2 \cdots d_n &= 1, & a_ib_ic_id_i &= 1, & b_id_i &= d_ib_i = 1, \\ x_iy_j &= y_jx_i \end{aligned}$$

для всех $i, j \in \mathbb{Z}_n$ таких, что $i - j \notin \{-1, 0, 1\}$ и $x_i \in \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$, $y_j \in \{a_j, b_j, c_j, d_j\}$.

Наконец, при $n \geq 5$ пусть Z_n – полугруппа, заданная множеством образующих $\{a_i, c_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{2n}}$ и соотношениями

$$\begin{aligned} a_{i \pm 1}x_ic_{i \pm 1} &= x_i, & a_ic_{i \pm 1}a_{i \pm 1}c_i &= 1, \\ a_1c_0a_3c_2 \cdots a_{2n-1}c_{2n-2} &= 1, & a_2c_1a_4c_3 \cdots a_{2n}c_{2n-1} &= 1, \\ x_iy_j &= y_jx_i, \end{aligned}$$

где $i, j \in \mathbb{Z}_{2n}$, $x_i \in \{a_i, c_i\}$, $y_j \in \{a_j, c_j\}$, $i - j \neq -1, 0, 1 \in \mathbb{Z}_{2n}$.

В работах [72]–[75] неориентированные зацепления реализованы как центральные элементы каждой из полугрупп Y_n , $n \geq 3$. Конструкция основана на рассмотрении так называемых n -страничных зацеплений, которые напоминают книжные зацепления. Различие в том, что число страниц, которые могут содержать дуги зацепления, фиксировано, но в каждой из страниц может быть любое количество дуг. Такие зацепления несложным образом кодируются словами в алфавите $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i \in \mathbb{Z}_n}$, а указанные выше соотношения порождают отношение изотопности.

Подобным образом в работе [76] ориентированные зацепления реализованы как центральные элементы каждой из полугрупп Z_n , $n \geq 5$.

ЗАДАЧА 3. Решить проблему равенства в полугруппах Y_n и Z_n алгебраическими средствами.

Решение этой задачи означало бы новое решение проблемы алгоритмической классификации зацеплений. Заметим, что, хотя зацеплениям соответствуют только центральные элементы полугруппы Y_n или Z_n , существование алгоритма сравнения многообразий Хакена с узором на крае влечет разрешимость проблемы равенства во всей полугруппе, а не только в центре. Таким образом, мы уже знаем, что эта задача разрешима, вопрос лишь в том, можно ли разумным образом изложить ее решение в алгебраических терминах, не прибегая к топологическим аргументам.

8.4. Вложение группы кос в конечно определенные группы. В работах [72]–[75] были также описаны группы D_n обратимых элементов каждой из полугрупп Y_n . Группа D_n задается образующими $\{d_i\}_{i \in \mathbb{Z}_n}$ и теми из соотношений в задании Y_n , которые содержат только буквы d_i .

А именно, группа D_3 задается соотношениями

$$\begin{aligned} d_1 d_2 d_3 &= 1, \\ d_i u_i &= u_i d_i, \quad u_i u_{i+1} = u_{i+1} u_i, \end{aligned}$$

где $u_i = d_{i+1}^{-1} d_{i-1} d_{i+1} d_{i-1}^{-1}$, $i \in \mathbb{Z}_3$.

Группа D_4 задается соотношениями

$$\begin{aligned} d_1 d_2 d_3 d_4 &= 1, \\ d_i d_{i+2} &= d_{i+2} d_i, \quad d_{i+2} (d_{i-1}^{-1} d_i d_{i-1}) = (d_{i-1}^{-1} d_i d_{i-1}) d_{i+2}, \end{aligned}$$

где $i \in \mathbb{Z}_4$.

При $n \geq 5$ группа D_n задается соотношениями

$$\begin{aligned} d_1 d_2 \cdots d_n &= 1, \\ d_i d_j &= d_j d_i, \quad \text{если } i - j \neq \pm 1, \end{aligned}$$

где $i, j \in \mathbb{Z}_n$.

В [72]–[75] был доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 8.1. *Для любого $n \geq 3$ коммутант группы D_n изоморфен группе кос B_∞ на бесконечном числе нитей.*

Под группой B_∞ подразумевается прямой предел последовательности групп $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$. Изоморфизм $B_\infty \cong [D_n, D_n]$ во всех случаях можно описать явно в терминах образующих.

Задача 4. Исследовать группы D_n , исходя из указанных выше заданий образующими и соотношениями. Найти для этих групп эффективное решение проблемы сопряженности, независимое от решения аналогичной задачи для групп кос.

Группы D_n очень близки по структуре к группам кос, однако задаются образующими и соотношениями совершенно по-другому. Не исключено, что специфика этих соотношений позволит решить проблему сопряженности эффективнее, хотя и может случиться, что с введением “более простых” соотношений задача лишь усложнится. Во всяком случае, автору кажется, что новые соотношения заслуживают того, чтобы взглянуть на них с чисто алгебраической точки зрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. P. Kirkman. The enumeration, description and construction of knots of fewer than ten crossings // *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*. 1885. V. 32. P. 281–309.
- [2] P. G. Tait. On knots // *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*. 1877. V. 28. P. 145–190.
- [3] J. W. Alexander, G. B. Briggs. On types of knotted curves // *Ann. of Math.* 1926/27. V. 28. P. 562–586.
- [4] K. Reidemeister. *Knotentheorie*. Berlin: Springer-Verlag, 1932. (Ergeb. Math. Grenzgeb. V. 1. № 1.)
- [5] J. W. Alexander. A lemma on systems of knotted curves // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 1923. V. 9. P. 93–95.
- [6] A. A. Markoff. Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe // *Матем. сб.* 1936. Т. 1 (43). № 1. С. 73–78.
- [7] E. Artin. Theorie der Zöpfe // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*. 1925. V. 4. P. 47–72.
- [8] E. Artin. Theory of braids // *Ann. of Math. (2)*. 1947. V. 48. № 1. P. 101–126.
- [9] W. Haken. Theorie der Normalflächen. Ein Isotopiekriterium für der Kreisknoten // *Acta Math.* 1961. V. 105. № 3–4. P. 245–375.
- [10] H. Kneser. Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten // *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein*. 1929. V. 38. P. 248–260.
- [11] H. Schubert. Bestimmung der Primfaktorzerlegung von Verkettungen // *Math. Z.* 1961. V. 76. P. 116–148. (Рус. пер.: Х. Шуберт. Алгоритм для разложения зацеплений на простые слагаемые // *Математика: Сб. перев.* 1966. Т. 10. № 4. С. 45–78.)
- [12] H. Schubert. Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten // *S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.* 1949. V. 1949. № 3. P. 57–104.
- [13] Y. Hashizume. On the uniqueness of the decomposition of a link // *Osaka Math. J.* 1958. V. 10. P. 283–300; 1959. V. 11. P. 249.
- [14] W. Haken. Ein Verfahren zur Aufspaltung einer 3-Mannigfaltigkeit in irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten // *Math. Z.* 1961. V. 76. P. 427–467.
- [15] W. Haken. Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten. I // *Math. Z.* 1962. V. 80. P. 89–120.
- [16] F. Waldhausen. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large // *Ann. of Math. (2)*. 1968. V. 87. P. 56–88.
- [17] K. Johannson. *Homotopy Equivalences of 3-Manifolds with Boundaries*. Berlin: Springer-Verlag, 1979. (Lecture Notes in Math. V. 761.)
- [18] W. Jaco, P. Shalen. Seifert fibered spaces in 3-manifolds // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1979. V. 21. № 220.
- [19] G. Hemion. On the classification of homeomorphisms of 2-manifolds and the classification of 3-manifolds // *Acta Math.* 1979. V. 142. № 1–2. P. 123–155.

- [20] F. Waldhausen. Recent results on sufficiently large 3-manifolds // Algebraic and Geometric Topology. Part 2. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1978. P. 21–38. (Proc. Sympos. Pure Math. V. 32.)
- [21] K. Johannson. Classification problems in low-dimensional topology // Geometric and Algebraic Topology. Warsaw: PWN, 1986. P. 37–59. (Banach Center Publ. V. 18.)
- [22] G. Hemion. The Classification of Knots and 3-Dimensional Spaces. New York: Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 1992.
- [23] S. V. Matveev. On the recognition problem for Haken 3-manifolds // Proceedings of the Workshop on Differential Geometry and Topology (Palermo, June 3–9, 1996) / ed. R. Grimaldi et al. Palermo: Circolo Matematico di Palermo, 1997. P. 131–148. (Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo. V. 49.)
- [24] W. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1988. V. 19. №2. P. 417–431.
- [25] M. Bestvina, M. Handel. Train-tracks for surface homeomorphisms // Topology. 1995. V. 34. №1. P. 109–140.
- [26] S. V. Matveev. Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 2003. (Algorithms Comput. Math. V. 9.)
- [27] W. P. Thurston. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1982. V. 6. P. 357–379.
- [28] М. Капович. Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups. Boston, MA: Birkhäuser, 2001. (Progr. Math. V. 183.)
- [29] Г. С. Маканин. Проблема сопряженности в группе кос // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182. №3. С. 495–496.
- [30] F. A. Garside. The braid group and other groups // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1969. V. 20. №78. P. 235–254.
- [31] D. B. A. Epstein, J. W. Cannon, D. F. Holt, S. V. F. Levy, M. S. Patterson, W. P. Thurston. Word Processing in Groups. Boston: Jones and Bartlett, 1992.
- [32] E. A. El-Rifai, H. R. Morton. Algorithms for positive braids // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1994. V. 45. №180. P. 479–497.
- [33] J. Birman, K. H. Ko, S. J. Lee. The infimum, supremum, and geodesic length of a braid conjugacy class // Adv. Math. 2001. V. 164. №1. P. 41–56.
- [34] N. Franco, J. González-Meneses. Conjugacy problem for braid groups and Garside groups // J. Algebra. 2003. V. 266. №1. P. 112–132.
- [35] J. Birman, W. Menasco. Studying links via closed braids. I: A finiteness theorem // Pacific J. Math. 1992. V. 154. №1. P. 17–36.
- [36] J. Birman, W. Menasco. Studying links via closed braids. II: On a theorem of Bennequin // Topology Appl. 1991. V. 40. №1. P. 71–82.
- [37] J. Birman, W. Menasco. Studying links via closed braids. III: Classifying links which are closed 3-braids // Pacific J. Math. 1993. V. 161. №1. P. 25–113.
- [38] J. Birman, W. Menasco. Studying links via closed braids. IV: Composite links and split links // Invent. Math. 1990. V. 102. №1. P. 115–139.
- [39] J. Birman, W. Menasco. Studying links via closed braids. V: The unlink // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 329. №2. P. 585–606.
- [40] J. Birman, W. Menasco. Studying links via closed braids. VI: A nonfiniteness theorem // Pacific J. Math. 1992. V. 156. №2. P. 265–285.
- [41] J. Birman, W. Menasco. Stabilization in the braid groups // <http://arxiv.org/abs/math.gt/0310279>.
- [42] J. Birman, M. Hirsch. A new algorithm for recognizing the unknot // Geom. Topol. 1998. V. 2. №9. P. 175–220.
- [43] И. А. Дынный. Arc-presentations of links. Monotonic simplification // arxiv.org/abs/math.gt/0208153.
- [44] J. H. Conway. An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties // Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967). Oxford: Pergamon, 1970. P. 329–358.

- [45] C. H. Dowker, M. B. Thistlethwaite. Classification of knot projections // *Topol. Appl.* 1983. V. 16. № 1. P. 19–31.
- [46] J. Hoste, M. Thistlethwaite, J. Weeks. The first 1,701,936 knots // *Math. Intelligencer.* 1998. V. 20. № 4. P. 33–48.
- [47] F. Jaeger, D. L. Vertigan, D. J. A. Welsh. On the computational complexity of the Jones and Tutte polynomials // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1990. V. 108. № 1. P. 35–53.
- [48] R. H. Crowell, R. H. Fox. *Introduction to Knot Theory.* Boston: Ginn, 1963. (Рус. пер.: Р. Кроуэлл, Р. Фокс. Введение в теорию узлов. М.: Мир, 1967.)
- [49] G. Burde, H. Zieschang. *Knots.* Berlin: de Gruyter, 1985. (de Gruyter Stud. Math. V. 5.)
- [50] J. Birman. *Braids, Links, and Mapping Class Groups.* Princeton / Tokyo: Princeton Univ. Press / Univ. of Tokyo Press, 1974. (Ann. of Math. Stud. V. 82.)
- [51] P. Cromwell. Embedding knots and links in an open book. I: Basic properties // *Topology Appl.* 1995. V. 64. P. 37–58.
- [52] P. Vogel. Representation of links by braids: A new algorithm // *Comment. Math. Helv.* 1990. T. 65. № 1. С. 104–113.
- [53] W. D. Neumann, G. A. Swarup. Canonical decompositions of 3-manifolds // *Geom. Topol.* 1997. V. 1. P. 21–40.
- [54] J. Hass. Algorithms for recognizing knots and 3-manifolds // *Chaos Solitons Fractals.* 1998. V. 9. № 4–5. P. 569–581.
- [55] F. Bohnenblust. The algebraical braid group // *Ann. of Math. (2).* 1947. V. 48. P. 127–136.
- [56] W.-L. Chow. On the algebraical braid group // *Ann. of Math. (2).* 1948. V. 49. № 3. P. 654–658.
- [57] P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, B. Wiest. Why are Braids Orderable? Paris: Soc. Math. France, 2002. (Panor. Synthèses. V. 14.)
- [58] И. А. Дынкин. Об одном отображении Янга–Бакстера и упорядочении Деорнуа // *УМН.* 2002. Т. 57. № 3. С. 151–152.
- [59] P. Dehornoy. *Braids and Self-Distributivity.* Basel: Birkhäuser, 2000. (Progr. Math. V. 192.)
- [60] А. В. Малютин. Быстрые алгоритмы распознавания и сравнения кос // *Зап. науч. семин. ПОМИ.* 2001. Т. 279. С. 200–215.
- [61] С. И. Адян. О фрагментах слова Δ в группе кос // *Матем. заметки.* 1984. Т. 36. № 1. С. 25–34.
- [62] P. Dehornoy. Groups with a complemented presentation // *J. Pure Appl. Algebra.* 1997. V. 116. № 1–3. P. 115–137.
- [63] P. Dehornoy. A fast method for comparing braids // *Adv. Math.* 1997. V. 125. № 2. P. 200–235.
- [64] J. Birman, K. H. Ko, S. J. Lee. A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups // *Adv. Math.* 1998. V. 139. № 2. P. 322–353.
- [65] J. S. Birman, P. Boldi, M. Rampichini, S. Vigna. Towards an implementation of the B-H algorithm for recognizing the unknot // *J. Knot Theory Ramifications.* 2002. V. 11. № 4. P. 601–645.
- [66] L. Goeritz. Bemerkungen zur knotentheorie // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* 1934. V. 10. P. 201–210.
- [67] H. R. Morton. An irreducible 4-string braid with unknotted closure // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1983. V. 93. № 2. P. 259–261.
- [68] D. Bennequin. Entrelacements et équations de Pfaff // *Astérisque.* 1983. V. 107–108. P. 87–161. (Рус. пер.: Д. Беннекен. Зацепления и уравнения Пфаффа // *УМН.* 1989. Т. 44. № 3. С. 3–53.)
- [69] J. Hass, J. C. Lagarias, N. Pippenger. The computational complexity of knot and link problems // *J. ACM.* 1999. V. 46. № 2. P. 185–211.
- [70] I. Agol, J. Hass, W. Thurston. The computational complexity of knot genus and spanning area // <http://arxiv.org/abs/math.gt/0205057>.

- [71] W. Jaco, J. L. Tollefson. Algorithms for the complete decomposition of a closed 3-manifold // Illinois J. Math. 1995. V. 39. № 3. P. 358–406.
- [72] И. А. Дынников. Трехстраничные представления узлов. Кодирование и локальные движения // Функц. анализ и его прил. 1999. Т. 33. № 4. С. 25–37.
- [73] И. А. Дынников. Трехстраничные представления узлов. Универсальная полугруппа // Функц. анализ и его прил. 2000. Т. 34. № 1. С. 29–40.
- [74] И. А. Дынников. Конечно определенные группы и полугруппы в теории узлов // Труды МИАН. 2000. Т. 231. С. 231–248.
- [75] I. A. Dynnikov. A new way to represent links. One-dimensional formalism and untangling technology // Acta Appl. Math. 2001. V. 69. № 3. P. 243–283.
- [76] I. A. Dynnikov. Finitely presented semigroups in knot theory. Oriented case // Geometry, Topology and Mathematical Physics: S. P. Novikov's Seminar 2001–2003 / ed. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 2004 (to appear).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Laboratoire international franco-russe de mathématiques
et interactions en informatique et en physique théorique
E-mail: dynnikov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
07.10.2003