В. А. Рукавишников, А. Г. Ереклинцев, О коэрцитивности R_ν-обобщенного решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных,

Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 12, 1680–1689

https://www.mathnet.ru/de11412

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 12, с. 1680–1689

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.223

О КОЭРЦИТИВНОСТИ R_ν-ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С СОГЛАСОВАННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

© 2005 г. В. А. Рукавишников, А. Г. Ереклинцев

1. Введение. Математические модели некоторых физических процессов приводят к краевым задачам, в которых сильная сингулярность решения вызвана вырождением исходных данных (коэффициентов дифференциального уравнения, его правой части и граничных условий). Особенностью таких задач является то, что для них не всегда можно определить обобщенное (слабое) решение или оно не обладает необходимой регулярностью. Поэтому в работе [1] предложено для задач с вырождением исходных данных определить решение как R_ν-обобщенное. При этом было выделено два типа задач: с согласованным и несогласованным вырождениями. Такой подход позволил исследовать существование и единственность, коэрцитивные и дифференциальные свойства краевых задач и разработать для них эффективные методы численного анализа (см., например, [1–7]). Вопросы существования и единственности, коэрцитивные и дифференциальные свойства R_ν-обобщенного решения задачи Дирихле с согласованным вырождением исходных данных в двумерном случае изучены в работах [1, 2] для прямоугольной области. Для произвольной двумерной области Ω в [3] доказана теорема существования и единственности R_ν-обобщенного решения первой краевой задачи с сильной сингулярностью в весовом пространстве Соболева $H^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$. В настоящей работе в выпуклой двумерной области рассматривается первая краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с сильной сингулярностью, вызванной согласованным вырождением исходных данных. Для этой задачи изучены коэрцитивные свойства R_ν-обобщенного решения: его принадлежность пространству $H^2_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ и неравенство коэрцитивности. Доказана также теорема единственности R_ν-обобщенного решения в пространстве $H^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ при всех значениях параметра ν из определенной шкалы.

2. Постановка задачи. Пусть R^2 – двумерное евклидово пространство точек $x=(x_1,x_2)$. Введем следующие обозначения: Ω – ограниченная выпуклая область пространства R^2 с границей $\partial\Omega$; $\overline{\Omega}$ – замыкание области, т.е. $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$. Через $\partial\Omega^0$ обозначим множество, состоящее из n точек границы $\partial\Omega$: $\partial\Omega^{(i)}\in\partial\Omega$, $\partial\Omega^0=\bigcup_{i=1}^n\partial\Omega^{(i)}$. Будем предполагать, что граница $\partial\Omega$ кусочно-гладкая: $\partial\Omega\setminus\partial\Omega^0\in C^2$.

Пусть $\rho(x)$ – весовая функция, бесконечно дифференцируемая и положительная всюду, кроме точек множества $\partial\Omega^0$, и совпадающая в некоторой окрестности каждой точки $\partial\Omega^{(i)}$ $(i=\overline{1,n})$ с расстоянием до нее. Кроме того, пусть производные функции $\rho(x)$ удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{\partial^{|i|}\rho^\gamma(x)}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}\right|\le\delta\rho^{\gamma-i}(x),\tag{1}$$

где $i=(i_1,i_2)$, $|i|=i_1+i_2$, γ, δ – вещественные числа, $\delta>1$.

Нам понадобятся функциональные пространства $W^k_{2,\alpha}(\Omega)$ и $H^k_{2,\alpha}(\Omega)$ – весовые пространства Соболева, которые при фиксированном $k\ge0$ являются пополнением множества $C^\infty(\overline{\Omega})$ бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций по нормам

$$\|u(x)\|^2_{W^k_{2,\alpha}(\Omega)}=\sum_{|\lambda|\le k}\int_\Omega\rho^{2\alpha}(x)|D^\lambda u(x)|^2\,dx,$$

$$\|u(x)\|^2_{H^k_{2,\alpha}(\Omega)}=\sum_{|\lambda|\le k}\int_\Omega\rho^{2(\alpha+|\lambda|-k)}(x)|D^\lambda u(x)|^2\,dx,$$

где k – некоторое целое неотрицательное число, α – вещественное число, $\alpha > -1$. Кроме введенных норм, для функций из этих пространств будут необходимы полунормы

$$|u(x)|^2_{W^s_{2,\alpha}(\Omega)} = \sum_{|\lambda|=s} \int_\Omega \rho^{2\alpha}(x)|D^\lambda u(x)|^2\,dx,$$

$$|u(x)|^2_{H^s_{2,\alpha}(\Omega)} = \sum_{|\lambda|=s} \int_\Omega \rho^{2(\alpha+|\lambda|-k)}(x)|D^\lambda u(x)|^2\,dx,$$

где s – некоторое целое неотрицательное число, $s \le k$. При $k = 0$ пространства $H^0_{2,\alpha}(\Omega)$ и $L_{2,\alpha}(\Omega)$ совпадают.

Пусть $\overset{\circ}{H}{}^k_{2,\alpha}(\Omega) = \{u(x)|\ u(x) \in H^k_{2,\alpha}(\Omega);\ u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$. Норма в $\overset{\circ}{H}{}^k_{2,\alpha}(\Omega)$ имеет тот же вид, что и в $H^k_{2,\alpha}(\Omega)$. Через $H^k_{\infty,-\alpha}(\Omega, C)$ будем обозначать множество функций, норма в котором удовлетворяет неравенству

$$\|u(x)\|_{H^k_{\infty,-\alpha}(\Omega,C)} = \max_{|\lambda|\le k}\ \underset{\forall x\in\Omega}{\mathrm{vraimax}}\, |\rho^{-\alpha+|\lambda|}(x) D^\lambda u(x)| \le C$$

с положительной постоянной C, не зависящей от $u(x)$.

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$-\sum_{l,s=1}^{2} a_{ls}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_l \partial x_s} + \sum_{l=1}^{2} a_l(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_l} + a(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

с граничным условием

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Предположим, что $a_{12}(x) = a_{21}(x)$ и выполняются следующие условия:

$$a_{ls}(x) \in H^1_{\infty,-\beta}(\Omega, C_1) \quad (l, s = 1, 2), \tag{4}$$

$$a_l(x) \in L_{\infty,-(\beta-1)}(\Omega, C_2) \quad (l = 1, 2), \tag{5}$$

$$a(x) \in L_{\infty,-(\beta-2)}(\Omega, C_3), \tag{6}$$

$$\sum_{l,s=1}^{2} a_{ls}(x)\xi_l\xi_s \ge C_4\rho^\beta(x)\sum_{l=1}^{2}\xi_l^2, \tag{7}$$

$$a(x) \ge C_5\rho^{\beta-2}(x) \quad \text{почти всюду на } \Omega, \tag{8}$$

где C_i $(i = \overline{1,5})$ – положительные постоянные, не зависящие от x, ξ_1, ξ_2 – произвольные вещественные числа, одновременно не равные нулю, β – вещественное число,

$$f(x) \in L_{2,\mu}(\Omega), \tag{9}$$

где μ – неотрицательное вещественное число.

Краевую задачу (2), (3) при выполнении условий (4)–(9), следуя [1], будем называть *первой краевой задачей с согласованным вырождением исходных данных.*

Введем соответственно билинейную и линейную формы

$$a(u,v) = \sum_{l,s=1}^{2} \int_\Omega \Big[a_{ls}(x)\rho^{2\nu}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_s}\,\frac{\partial v(x)}{\partial x_l} + a_{ls}(x)\frac{\partial \rho^{2\nu}(x)}{\partial x_l}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_s}\,v(x) +$$

$$+\frac{\partial a_{ls}(x)}{\partial x_l}\rho^{2\nu}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_s}v(x)\Bigg]dx+\sum_{l=1}^{2}\int\limits_{\Omega}a_l(x)\rho^{2\nu}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}v(x)\,dx+\int\limits_{\Omega}a(x)\rho^{2\nu}(x)u(x)v(x)\,dx,$$

$$(f,v)=\int\limits_{\Omega}\rho^{2\nu}(x)f(x)v(x)\,dx.$$

Определение 1. Функцию $u_\nu(x)$ из пространства $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ назовем R_ν-обобщенным решением первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных, если для всех функций $v(x)$ из $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ справедливо тождество $a(u_\nu,v)=(f,v)$ при любом, но фиксированном ν, удовлетворяющем неравенству

$$\nu\geq\mu+\beta/2-1. \tag{10}$$

3. Существование и единственность R_ν-обобщенного решения. В работе [3] доказана следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (4)–(10), а также неравенство*

$$2(C_1(2\delta|\nu|+1)+C_2/2)^2<C_4C_5. \tag{11}$$

Тогда существует единственное R_ν-обобщенное решение $u_\nu(x)$ краевой задачи (2), (3) из пространства $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|u_\nu(x)\|_{H^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)}\leq C_6\|f(x)\|_{L_{2,\mu}(\Omega)} \tag{12}$$

с положительной постоянной C_6, не зависящей от $u_\nu(x)$.

Следствие. *Если найдется хотя бы одно ν, при котором существует единственное R_ν-обобщенное решение задачи (2), (3) с условиями (4)–(11), то всегда можно определить полуинтервал $[\nu_1,\nu_2)$ такой, что при каждом $\nu\in[\nu_1,\nu_2)$ существует единственное R_ν-обобщенное решение. Здесь обозначено*

$$\nu_1=\max\left\{\mu+\frac{\beta}{2}-1,\ \frac{1}{\delta}\left(1-\frac{(C_4C_5)^{1/2}-C_2/2}{C_1}\right)+\varepsilon\right\},$$

$$\nu_2=\frac{1}{\delta}\left(\frac{(C_4C_5)^{1/2}-C_2/2}{C_1}-1\right),$$

где ε – фиксированное и достаточно малое положительное число.

Справедливость следствия непосредственно вытекает из доказательства теоремы 1.

4. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть k – целое неотрицательное число.*

А) Если $u(x)\in H^k_{2,\alpha}(\Omega)$, то $\rho^{\alpha-(k-s)}(x)u(x)\in W^s_{2,0}(\Omega)$ $(s=\overline{0,k})$ и

$$|\rho^\alpha(x)u(x)|_{W^k_{2,0}(\Omega)}+|\rho^{\alpha-1}(x)u(x)|_{W^{k-1}_{2,0}(\Omega)}+\ldots+|\rho^{\alpha-k}(x)u(x)|_{L_{2,0}(\Omega)}\leq C_7\|u(x)\|_{H^k_{2,\alpha}(\Omega)},$$

где C_7 – положительная постоянная, не зависящая от $u(x)$.

Б) Если $\rho^{\alpha-(k-s)}(x)u(x)\in W^s_{2,0}(\Omega)$ $(s=\overline{0,k})$, то $u(x)\in H^k_{2,\alpha}(\Omega)$ и существуют положительные постоянные $C^*_0,\ldots,C^*_k$, не зависящие от $u(x)$ и такие, что справедливо неравенство

$$C^*_k|\rho^\alpha(x)u(x)|_{W^k_{2,0}(\Omega)}+C^*_{k-1}|\rho^{\alpha-1}(x)u(x)|_{W^{k-1}_{2,0}(\Omega)}+\ldots+C^*_0|\rho^{\alpha-k}(x)u(x)|_{L_{2,0}(\Omega)}\geq\|u(x)\|_{H^k_{2,\alpha}(\Omega)}.$$

Доказательство леммы 1 приведено в работе [2, с. 7–11].

Лемма 2 [7]. *Если* $u(x) \in H^2_{2,\alpha}(\Omega)$, *то* $\rho^\alpha(\partial\Omega^{(i)})u(\partial\Omega^{(i)}) = 0$ *для всех* $i = \overline{1,n}$.

Пусть L – дифференциальный оператор вида

$$L = -\sum_{l,s=1}^{2} a_{ls}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_s} + \sum_{l=1}^{2} a_l(x)\frac{\partial}{\partial x_l} + a(x).$$

Через $C_0(\Omega)$ обозначим множество функций вида $\{u(x) \in C^\infty(\overline{\Omega});\ \operatorname{supp} u(x) \cap \partial\Omega^0 = \emptyset;\ u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$. Пространство $H^k_{2,\alpha,0}(\Omega)$ определим как пополнение множества $C_0(\Omega)$ по норме пространства $H^k_{2,\alpha}(\Omega)$.

Лемма 3. *Пусть функция* $u(x)$ *принадлежит пространству* $H^2_{2,\nu+\beta/2,0}(\Omega)$ *и для коэффициентов дифференциального оператора* L *выполняются условия (4)–(8). Тогда верна оценка*

$$\|u(x)\|^2_{H^2_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)} \le C_8(\|Lu(x)\|^2_{L_{2,\nu-\beta/2}(\Omega)} + \|u(x)\|^2_{H^1_{2,\nu+\beta/2-1}(\Omega)}) \tag{13}$$

с положительной постоянной C_8, *не зависящей от* $u(x)$.

Доказательство. По определению в пространстве $H^2_{2,\nu+\beta/2,0}(\Omega)$ плотным является множество функций из пространства $C_0(\Omega)$. Поэтому неравенство (13) достаточно доказать для функций из пространства $C_0(\Omega)$, а затем замыканием в норме пространства $H^2_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ установить его для любой функции из $H^2_{2,\nu+\beta/2,0}(\Omega)$.

Рассмотрим интеграл $I = \int_\Omega \rho^{2\nu-\beta}(x)(Lu(x))^2\,dx = I_1 - I_2 + I_3 + I_4 + I_5$, где

$$I_1 = \sum_{l,s,k,j=1}^{2} \int_\Omega \rho^{2\nu-\beta}(x)a_{ls}(x)a_{kj}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_l \partial x_s}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_j}\,dx,$$

$$I_2 = 2\sum_{l,s,k=1}^{2} \int_\Omega \rho^{2\nu-\beta}(x)a_{ls}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_l \partial x_s}\left(a_k(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + a(x)u(x)\right)dx,$$

$$I_3 = \sum_{l,k=1}^{2} \int_\Omega \rho^{2\nu-\beta}(x)a_l(x)a_k(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\,dx,$$

$$I_4 = \sum_{l=1}^{2} \int_\Omega \rho^{2\nu-\beta}(x)a_l(x)a(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\,u(x)\,dx, \quad I_5 = \int_\Omega \rho^{2\nu-\beta}(x)a^2(x)u^2(x)\,dx.$$

Используя условия (4)–(8) и ε-неравенство, получаем следующие оценки:

$$I_5 \ge C_5^2\|u(x)\|^2_{L_{2,\nu+\beta/2-2}(\Omega)}, \quad |I_4| \le 2\varepsilon_1 C_2 C_3 |u(x)|^2_{H^1_{2,\nu+\beta/2-1}(\Omega)} + \frac{2C_2C_3}{\varepsilon_1}\|u(x)\|^2_{L_{2,\nu+\beta/2-2}(\Omega)},$$

$$|I_3| \le 2C_2^2(\varepsilon_2 + 1/\varepsilon_2)\|u(x)\|^2_{H^1_{2,\nu+\beta/2-1}(\Omega)},$$

$$|I_2| \le 2\varepsilon_3 C_1(C_2 + C_3)|u(x)|^2_{H^2_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)} + 4\frac{C_1C_2}{\varepsilon_3}|u(x)|^2_{H^1_{2,\nu+\beta/2-1}(\Omega)} + \frac{8C_1C_3}{\varepsilon_3}\|u(x)\|^2_{L_{2,\nu+\beta/2-2}(\Omega)}$$

с произвольными положительными ε_1, ε_2 и ε_3. Интеграл I_1 с помощью двукратного интегрирования по частям преобразуем к сумме $S_1 - S_2 + S_3 + S_4$, где

$$S_1 = \sum_{l,s,k,j=1}^{2} \int_\Omega \rho^{2\nu-\beta}(x)a_{ls}(x)a_{kj}(x)\,\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_l \partial x_k}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_s \partial x_j}\,dx,$$

$$S_2 = \sum_{l,s,k,j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_s}(\rho^{2\nu-\beta}(x)a_{ls}(x)a_{kj}(x)) \frac{\partial u(x)}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_j}\, dx,$$

$$S_3 = \sum_{l,s,k,j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho^{2\nu-\beta}(x)a_{ls}(x)a_{kj}(x)) \frac{\partial u(x)}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_s \partial x_j}\, dx,$$

$$S_4 = \sum_{l,s,k,j=1}^{2} \int\limits_{\partial\Omega} \rho^{2\nu-\beta}(x)a_{ls}(x)a_{kj}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_j}\cos(\widehat{n, x_s}) - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_s \partial x_j}\cos(\widehat{n, x_k})\right) ds.$$

Интегралы S_2 и S_3 допускают одинаковые оценки, которые получим, используя формулу производной произведения, условия (1), (4), а также ε_4-неравенство с произвольным положительным ε_4:

$$|S_i| \le 2\varepsilon_4 C_1^2(\delta+2)|u(x)|^2_{H^2_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)} + \frac{4C_1^2(\delta+2)}{\varepsilon_4}|u(x)|^2_{H^1_{2,\nu+\beta/2-1}(\Omega)} \quad (i = 2, 3).$$

Подынтегральную функцию $\sum_{l,s,k,j=1}^{2} \rho^{2\nu-\beta}(x)a_{ls}a_{kj}u_{x_l x_k}u_{x_s x_j}$ в интеграле S_1 обозначим через $\widetilde{S}_1(x)$, $a_{ls} = a_{ls}(x)$ $(l, s = 1, 2)$, слагаемые в $\widetilde{S}_1(x)$ сгруппируем следующим образом: $\widetilde{S}_1(x) = \rho^{2\nu-\beta}(x)(a_{11}F_1(x) + a_{22}F_2(x) + 2a_{12}F_3(x))$, где

$$F_1(x) = a_{11}u^2_{x_1^2} + 2a_{12}u_{x_1^2}u_{x_1x_2} + a_{22}u^2_{x_1x_2}, \quad F_2(x) = a_{11}u^2_{x_2x_1} + 2a_{12}u_{x_2x_1}u_{x_2^2} + a_{22}u^2_{x_2^2},$$

$$F_3(x) = a_{11}u_{x_1^2}u_{x_2x_1} + a_{12}u_{x_1^2}u_{x_2^2} + a_{12}u_{x_1x_2}u_{x_2x_1} + a_{22}u_{x_1x_2}u_{x_2^2}.$$

Зафиксируем произвольную точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ области Ω и введем в ее окрестности новые декартовы координаты $y_i = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij}(x_j - x_j^0)$ $(i = 1, 2)$. Ортогональную матрицу $[\alpha_{ij}]_{2\times2}$ коэффициентов преобразования выберем таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$a_{11}^0\alpha_{11}\alpha_{21} + a_{12}^0(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21}) + a_{22}^0\alpha_{12}\alpha_{22} = 0,$$

где $a_{ij}^0 = a_{ij}(x^0)$. Обозначим $\lambda_k^0 = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^0\alpha_{ki}\alpha_{kj}$ $(k = 1, 2)$. Тогда, находя выражения квадратов и попарных произведений вторых производных функции $u(x)$ в новой системе координат и подставляя их в формулы для $F_i(x^0)$ $(i = 1, 2, 3)$, после группировки и вынесения общих множителей за скобки $\widetilde{S}_1(x^0)$ примет вид $\widetilde{S}_1(x^0) = \sum_{l,s=1}^{2} \lambda_l^0\lambda_s^0 u^2_{y_l y_s}$. Применяя неравенство (7) и условие ортогональности матрицы $[\alpha_{ij}]_{2\times2}$, получаем оценку $\lambda_i^0 \ge C_4\rho^\beta(x^0)$ $(i = 1, 2)$. Кроме этого, ортогональность матрицы коэффициентов преобразования координат позволяет получить равенство $\sum_{l,s=1}^{2} u^2_{x_l x_s} = \sum_{l,s=1}^{2} u^2_{y_l y_s}$. Тогда будет верна оценка $\widetilde{S}_1(x^0) \ge C_4^2\rho^{2\nu+\beta}(x^0)\sum_{l,s=1}^{2} |u_{x_l x_s}(x^0)|^2$. Поскольку x^0 – произвольная точка области Ω, эта оценка будет справедлива и для любой точки $x \in \Omega$. После интегрирования получим оценку интеграла S_1 снизу:

$$S_1 \ge C_4^2|u(x)|^2_{H^2_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)}.$$

Рассмотрим теперь интеграл S_4 и через $\widetilde{S}_4(x)$ обозначим его подынтегральную функцию. Пусть $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ – произвольная, но фиксированная точка множества $\partial\Omega \setminus \partial\Omega^0$. Введем в этой точке местные декартовы координаты y_1, y_2 формулами $y_i = \sum_{j=1}^{2} c_{ij}(x_j - x_j^0)$ $(i = 1, 2)$. В этом случае ось y_2 направлена по внешней нормали n к $\partial\Omega$ в точке x^0, а матрица $[c_{ij}]_{2\times2}$ коэффициентов преобразования ортогональна. Пусть уравнение границы $\partial\Omega$ в окрестности точки $x^0 = (0, 0)$ имеет вид $y_2 = \omega(y_1)$. По условию $\omega(y_1) \in C^2(\partial\Omega \setminus \partial\Omega^0)$. В новой системе координат $\widetilde{S}_4(x^0)$ имеет вид

$$\widetilde{S}_4(x^0) = \sum_{m,p,q=1}^{2} \rho^{2\nu+\beta}(x^0)(b_{2m}^0 b_{pq}^0 - b_{q2}^0 b_{mp}^0)u_{y_m}u_{y_p y_q}, \tag{14}$$

где $b_{ls}^0 = \sum_{k,j=1}^2 \rho^{-\beta}(x^0)a_{kj}(x^0)c_{lk}c_{sj}$ $(l, s = 1, 2)$. Ось y_1 в точке x^0 направлена по касательной, следовательно, $\omega'(0) = 0$. Условие $u|_{\partial\Omega} = 0$ в окрестности точки x^0 имеет вид $u(y_1, \omega(y_1)) \equiv 0$. Из формулы $\omega'(y_1) = -u_{y_1}/u_{y_2}$ получим выражение

$$u_{y_1} = -\omega'(y_1)u_{y_2}, \tag{15}$$

откуда вытекает равенство $u_{y_1}(x^0) = 0$. Обе части выражения (15) продифференцируем по y_1 и, учитывая, что $u_{y_2} = \partial u/\partial n$ в окрестности точки x^0, будем иметь $u_{y_1^2} = -\omega'(y_1)u_{y_1y_2} - \omega''(y_1)\partial u/\partial n$. Тогда в точке x^0 справедливо выражение

$$u_{y_1^2}(x^0) = -\omega''(0)\,\frac{\partial u(x^0)}{\partial n}. \tag{16}$$

Подставляя выражения (15) и (16) в (14) и учитывая, что при $p = 2$ и $q = 1$ или $q = 2$, а также при $q = 2$ и $p = 1$ или $p = 2$ члены, стоящие в круглой скобке равенства (14), взаимно уничтожаются, получаем

$$\widetilde{S}_4(x^0) = \rho^{2\nu+\beta}(x^0)(b_{12}^0 b_{21}^0 - b_{11}^0 b_{22}^0)\omega''(0)\left(\frac{\partial u(x^0)}{\partial n}\right)^2.$$

Поскольку $\omega(y_1) \in C^2(\partial\Omega \setminus \partial\Omega^0)$, существует положительная постоянная K такая, что $|\omega''(0)| < K$. На основании условия (4) и ограниченности значений c_{ij} $(c_{1j} = \cos(\widehat{x_1, y_j})$, $c_{2j} = \cos(\widehat{x_j, y_2}))$, получим оценку $|b_{ij}^0| \le 4C_1$ $(i, j = 1, 2)$. Тогда

$$\widetilde{S}_4(x^0) \le 32KC_1^2\rho^{2\nu+\beta}(x^0)\left(\frac{\partial u(x^0)}{\partial n}\right)^2.$$

Это неравенство выполняется в произвольной точке x^0 множества $\partial\Omega \setminus \partial\Omega^0$, следовательно, в любой точке $x \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega^0$ будет верна оценка

$$\widetilde{S}_4(x) \le 32KC_1^2\rho^{2\nu+\beta}(x)\left(\frac{\partial u(x^0)}{\partial n}\right)^2.$$

Воспользовавшись тем, что $\partial u/\partial n = u_{x_1}\cos(\widehat{n, x_2}) + u_{x_2}\cos(\widehat{n, x_1})$, алгебраическим неравенством $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$, а также ограниченностью косинуса, получим неравенство $\widetilde{S}_4(x) \le 64KC_1^2\rho^{2\nu+\beta}(x)[u_{x_1^2}^2\cos(\widehat{n, x_2}) + u_{x_2^2}^2\cos(\widehat{n, x_1})]$, интегрируя которое по $\partial\Omega$ (учитывая, что множество $\partial\Omega^0$ состоит из конечного числа точек, а следовательно, является множеством меры нуль), приходим к неравенству

$$|S_4| \le 64KC_1^2\left[\int\limits_{\partial\Omega} \rho^{2\nu+\beta}(x)u_{x_1^2}^2\cos(\widehat{n, x_2})\,ds + \int\limits_{\partial\Omega} \rho^{2\nu+\beta}(x)u_{x_2^2}^2\cos(\widehat{n, x_1})\,ds\right].$$

Воспользовавшись формулой Остроградского, а также ε_5-неравенством с произвольным положительным ε_5, получим оценку

$$|S_4| \le 64KC_1^2C_9\left(\frac{C_9}{\varepsilon_5} + C_9 + \delta\right)|u(x)|^2_{H^1_{2,\nu+\beta/2-1}(\Omega)} + 64KC_1^2\varepsilon_5|u(x)|^2_{H^2_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)},$$

где $C_9 = \max\limits_{\forall x\in\Omega}\rho(x)$. Из неравенств $I \ge I_1 + I_5 - |I_2| - |I_3| - |I_4|$, $I_1 \ge S_1 - |S_2| - |S_3| - |S_4|$ и оценок интегралов I_j, S_i $(j = \overline{2,5},\ i = \overline{1,4})$ в силу произвольности выбора ε_k $(k = \overline{1,5})$ вытекает оценка (13) для всех функций $u(x) \in C_0(\Omega)$, а следовательно, и для всех функций из пространства $H^2_{2,\nu+\beta/2,0}(\Omega)$. Лемма 3 доказана.

5. Основные результаты.

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы 1, то для всех* ν *из шкалы* $[\nu_1, \nu_2)$ R_ν*-обобщенное решение первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных единственно.*

Доказательство. Запишем интегральное тождество $a(u_\nu, v) = (f, v)$ в виде

$$\sum_{l,s=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left[a_{ls}(x) \frac{\partial(\rho^{2\nu}(x)v(x))}{\partial x_l} \frac{\partial u_\nu(x)}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{ls}(x)}{\partial x_l} \rho^{2\nu}(x) \frac{\partial u_\nu(x)}{\partial x_s} v(x) \right] dx +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\nu}(x) a_l(x) \frac{\partial u_\nu(x)}{\partial x_l} v(x)\, dx + \int\limits_{\Omega} \rho^{2\nu}(x) a(x) u_\nu(x) v(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} \rho^{2\nu}(x) f(x) v(x)\, dx, \qquad (17)$$

где $v(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$. По утверждению А) леммы 1 $\rho^{\nu+\beta/2}(x)v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,0}(\Omega)$, а

$$\rho^{\nu+\beta/2-1}(x)v(x) \in L_{2,0}(\Omega).$$

Следовательно, функция $v_1(x) = \rho^{\nu+\beta/2}(x)v(x)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,0}(\Omega)$ и справедливо равенство $\rho^{2\nu}(x)v(x) = \rho^{\nu-\beta/2}(x)v_1(x)$. Пусть $\nu_1 \le \widetilde{\nu}_1 < \widetilde{\nu}_2 < \nu_2$. Через $V_{\widetilde{\nu}_1}(\Omega)$ и $V_{\widetilde{\nu}_2}(\Omega)$ обозначим множества функций вида $\rho^{\widetilde{\nu}_1-\beta/2}(x)v_1(x)$ и $\rho^{\widetilde{\nu}_2-\beta/2}(x)v_1(x)$ соответственно. Справедливо вложение $V_{\widetilde{\nu}_2}(\Omega) \subset V_{\widetilde{\nu}_1}(\Omega)$. Пусть $u_{\widetilde{\nu}_1}(x)$ – $R_{\widetilde{\nu}_1}$-обобщенное решение из пространства $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$. По теореме 1 $u_{\widetilde{\nu}_1}(x)$ единственно и удовлетворяет интегральному тождеству (17) для всех функций $\rho^{2\widetilde{\nu}_1}(x)v(x)$ из $V_{\widetilde{\nu}_1}(\Omega)$. Заметим, что

$$\|u_{\widetilde{\nu}_1}(x)\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\widetilde{\nu}_2+\beta/2}(\Omega)} \le \max_{x\in\Omega} \rho^{\widetilde{\nu}_2-\widetilde{\nu}_1}(x) \|u_{\widetilde{\nu}_1}(x)\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\widetilde{\nu}_1+\beta/2}(\Omega)} \le C_9 \|f(x)\|_{L_{2,\mu}(\Omega)},$$

следовательно, $u_{\widetilde{\nu}_1}(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{2,\widetilde{\nu}_2+\beta/2}(\Omega)$. Поскольку $V_{\widetilde{\nu}_2}(\Omega) \subset V_{\widetilde{\nu}_1}(\Omega)$, функция $u_{\widetilde{\nu}_1}(x)$ будет удовлетворять интегральному тождеству (17) для всех элементов пространства $V_{\widetilde{\nu}_2}(\Omega)$. Но функция, удовлетворяющая тождеству (17) для всех функций из $V_{\widetilde{\nu}_2}(\Omega)$, согласно теореме 1, есть $u_{\widetilde{\nu}_2}(x)$ – $R_{\widetilde{\nu}_2}$-обобщенное решение из пространства $H^1_{2,\widetilde{\nu}_2+\beta/2}(\Omega)$, и оно единственно. Следовательно, $u_{\widetilde{\nu}_2}(x) \equiv u_{\widetilde{\nu}_1}(x)$. Тем самым установлено, что R_ν-обобщенное решение единственно при всех значениях параметра ν из полуинтервала $[\nu_1, \nu_2)$, и это решение принадлежит всем пространствам $H^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$, где $\nu_1 \le \nu < \nu_2$. Теорема 2 доказана.

Основной результат работы представляет следующая теорема о коэрцитивности R_ν-обобщенного решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и неравенства*

$$\nu \ge \mu + \beta/2, \qquad (18)$$

$$\nu + \beta/2 > 2. \qquad (19)$$

Тогда R_ν*-обобщенное решение* $u_\nu(x)$ *краевой задачи (2), (3) принадлежит пространству* $H^2_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ *и имеет место неравенство коэрцитивности*

$$\|u_\nu(x)\|_{H^2_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)} \le C_{10} \|f(x)\|_{L_{2,\mu}(\Omega)} \qquad (20)$$

с положительной постоянной C_{10}*, не зависящей от* $u_\nu(x)$.

Доказательство. Поскольку выполняются условия теоремы 1, функция $u_\nu(x)$ принадлежит пространству $H^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$. Сначала докажем принадлежность функции $u_\nu(x)$ пространству $H^2_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$. Для этого обозначим через $\widetilde{u}_\nu(x)$ произведение $\rho^{\nu+\beta/2}(x)u_\nu(x)$ и подставим в интегральное тождество $a(u_\nu, v) = (f, v)$ вместо $u_\nu(x)$ выражение $\rho^{-(\nu+\beta/2)}(x)\widetilde{u}_\nu(x)$. Применяя в интеграле, содержащем произведение $a_{ls}(x)\rho^{-\beta}(x)(\partial\rho^{\nu+\beta/2}(x)/\partial x_l)\widetilde{u}_\nu(x)(\partial v(x)/\partial x_s)$, формулу интегрирования по частям (при этом интеграл по границе

$$\int\limits_{\partial\Omega} a_{ls}(x)\rho^{-\beta}(x)\,\frac{\partial\rho^{\nu+\beta/2}(x)}{\partial x_l}\widetilde{u}_\nu(x)v(x)\,ds$$

равен нулю в силу того, что функции $u_\nu(x)$ и $v(x)$ из пространства $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$) и учитывая, что $(\partial\rho^{2\nu}(x)/\partial x_l)\rho^{-(\nu+\beta/2)}(x) = (\partial\rho^{\nu-\beta/2}(x)/\partial x_l) - \rho^{2\nu}(x)(\partial\rho^{-(\nu+\beta/2)}(x)/\partial x_l)$, получаем тождество

$$\int\limits_\Omega\Bigg[\sum_{l,s=1}^2\left(\widetilde{a}_{ls}(x)\frac{\partial\widetilde{u}_\nu(x)}{\partial x_l}\,\frac{\partial v(x)}{\partial x_s} + \frac{\partial\widetilde{a}_{ls}(x)}{\partial x_l}\,\frac{\partial\widetilde{u}_\nu(x)}{\partial x_s}\,v(x)\right) +$$

$$+\sum_{s=1}^2\widetilde{a}_s(x)\frac{\partial\widetilde{u}_\nu(x)}{\partial x_s}\,v(x) + \widetilde{a}(x)\widetilde{u}_\nu(x)v(x)\Bigg]\,dx = \int\limits_\Omega\widetilde{f}(x)v(x)\,dx, \tag{21}$$

где $\widetilde{a}_{ls}(x) = \rho^{\nu-\beta/2}(x)a_{ls}(x)$,

$$\widetilde{a}_s(x) = \sum_{l=1}^2\left(a_{ls}(x)\left(\rho^{-\beta}(x)\,\frac{\partial\rho^{\nu+\beta/2}(x)}{\partial x_l} - \rho^{2\nu}(x)\,\frac{\partial\rho^{-(\nu+\beta/2)}(x)}{\partial x_l}\right) - a_l(x)\rho^{-\beta}(x)\,\frac{\partial\rho^{\nu+\beta/2}(x)}{\partial x_l}\right),$$

$$\widetilde{a}(x) = a(x)\rho^{\nu-\beta/2}(x) - \sum_{l=1}^2 a_l(x)\rho^{-\beta}(x)\,\frac{\partial\rho^{\nu+\beta/2}(x)}{\partial x_l} +$$

$$+\sum_{l,s=1}^2\left(a_{ls}(x)\left(\frac{\partial\rho^{-\beta}(x)}{\partial x_l} - \frac{\partial\rho^{2\nu}(x)}{\partial x_l}\,\rho^{-(2\nu+\beta)}(x)\right)\frac{\partial\rho^{\nu+\beta/2}(x)}{\partial x_s} + a_{ls}(x)\rho^{-\beta}(x)\frac{\partial^2\rho^{\nu+\beta/2}(x)}{\partial x_l\partial x_s}\right),$$

$$\widetilde{f}(x) = \rho^{2\nu}(x)f(x).$$

Интегральное тождество (21) справедливо для всех функций $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, так как при выполнении условия (19) $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \subset \overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$. А поскольку $u_\nu(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$, то, согласно утверждению А) леммы 2, $\widetilde{u}_\nu(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. На основании тождества (21) и сделанных замечаний функция $\widetilde{u}_\nu(x)$ является обобщенным решением краевой задачи для дифференциального уравнения

$$-\sum_{l,s=1}^2\widetilde{a}_{ls}(x)\,\frac{\partial^2\widetilde{u}_\nu(x)}{\partial x_l\partial x_s} + \sum_{s=1}^2\widetilde{a}_s(x)\,\frac{\partial\widetilde{u}_\nu(x)}{\partial x_s} + \widetilde{a}(x)\widetilde{u}_\nu(x) = \widetilde{f}(x), \quad x \in \Omega, \tag{22}$$

с граничным условием

$$\widetilde{u}_\nu(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{23}$$

Обобщенное решение $\widetilde{u}_\nu(x)$ задачи (22), (23) существует и единственно в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ в силу того, что существует и единственно в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ R_ν-обобщенное решение $u_\nu(x)$ задачи (2), (3). Рассмотрим область $\Omega_\varepsilon = \Omega\setminus\sigma_\varepsilon$, где σ_ε – множество, состоящее из окрестностей точек множества $\partial\Omega^0$ радиуса $\varepsilon > 0$. В области Ω_ε, согласно определению весовой функции, постоянная $\min\rho^\tau(x)$ положительна (τ – произвольное, но фиксированное вещественное число). Используя условия (4)–(7), формулы сокращенного умножения и алгебраические неравенства, получаем, что в области Ω_ε имеют место оценки

$$C_{11}\sum_{l=1}^{2}\xi_l^2 \le \sum_{l,s=1}^{2}\widetilde{a}_{ls}(x)\xi_l\xi_s \le C_{12}\sum_{l=1}^{2}\xi_l^2,$$

$$\Big\|\sum_{s=1}^{2}\widetilde{a}_s^2(x)\Big\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le C_{13}, \quad \|\widetilde{a}(x)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le C_{14}, \quad \Big\|\frac{\partial\widetilde{a}_{ls}(x)}{\partial x_l}\Big\|_{L_4(\Omega_\varepsilon)} \le C_{15} \quad (l,s=1,2),$$

где постоянные C_i $(i=\overline{11,15})$ положительны в области Ω_ε. Кроме того, с помощью условий (1), (4)–(8), (11), (18), (19), а также $\widetilde{\varepsilon}$-неравенства получим оценку $\widetilde{a}(x)$ снизу:

$$\widetilde{a}(x) \ge \frac{2C_1C_2}{C_4}(1+2\delta|\nu|)\rho^{\nu+\beta/2-2}(x),$$

из которой при условии (19) вытекает положительность этого коэффициента в области Ω_ε. Правая часть уравнения (22) принадлежит пространству $L_2(\Omega_\varepsilon)$. Действительно,

$$\|\widetilde{f}(x)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = \int\limits_{\Omega_\varepsilon}\rho^{4\nu}(x)f^2(x)\,dx \le \max_{x\in\overline{\Omega}_\varepsilon}\rho^{4\nu-2\mu}(x)\|f(x)\|^2_{L_{2,\mu}(\Omega)}.$$

В силу (18) и (19) имеем $4\nu-2\mu=2\nu+2\nu-2\mu=2\nu+2(\nu-\mu)\ge 2\nu+\beta>4$, тогда из (9) следует, что $\widetilde{f}(x)\in L_2(\Omega_\varepsilon)$. Из принадлежности решения $\widetilde{u}_\nu(x)$ задачи (22), (23) пространству $W_2^1(\Omega)$, следует [9, теорема 10.1] принадлежность функции $\widetilde{u}_\nu(x)$ пространству $W_2^2(\Omega_\varepsilon)$. Покажем теперь, что $\widetilde{u}_\nu(x)\in W_2^2(\Omega)$, но прежде заметим, что если $u_\nu(x)\in H^2_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ (т.е. $\widetilde{u}_\nu(x)\in \in W_2^2(\Omega)$), то по лемме 2 в точках множества $\partial\Omega^0$ величина $\widetilde{u}_\nu(x)$ обращается в нуль. Для любого, но фиксированного ε построим продолжение $\widetilde{U}_{\nu\varepsilon}(x)$ функции $\widetilde{u}_\nu(x)$ на область Ω таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\widetilde{U}_{\nu\varepsilon}(x)\in W_2^2(\Omega) \quad \text{и} \quad \widetilde{U}_{\nu\varepsilon}(x)=0, \quad \text{если} \quad x\in\partial\Omega. \tag{24}$$

Выберем $\varepsilon=1/N$, где N – натуральное число. Тогда, начиная с некоторого номера N, получаем последовательность $\{\widetilde{U}_{\nu\varepsilon}(x)\}$ продолжений функции $\widetilde{u}_\nu(x)$ на область Ω, которые удовлетворяют условиям (24). Последовательностей $\{\widetilde{U}_{\nu\varepsilon}(x)\}$, удовлетворяющих указанным условиям, бесконечно много. Из всех таких последовательностей выберем ту, члены которой ведут себя в области Ω так же, как функция $\widetilde{u}_\nu(x)$. Таким образом, при $N\to\infty$ (или при $\varepsilon\to 0$) последовательность функций $\{\widetilde{U}_{\nu\varepsilon}(x)\}$ будет сходиться к функции $\widetilde{u}_\nu(x)$. Следовательно, функция $\widetilde{u}_\nu(x)$ из пространства $W_2^2(\Omega)$. Однако функция $\widetilde{u}_\nu(x)$ является обобщенным решением краевой задачи (22), (23), т.е. имеет вид $\rho^{\nu+\beta/2}(x)u_\nu(x)$. Величина $\rho^{\nu+\beta/2}(x)u_\nu(x)$ в точках множества $\partial\Omega^0$ может принимать только конечные значения, поскольку из теорем вложения Соболева следует, что функция $\widetilde{u}_\nu(x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$, а максимум $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}|\widetilde{u}_\nu(x)|$ ограничен. Более того, согласно сделанному выше замечанию, из принадлежности функции $\widetilde{u}_\nu(x)$ пространству $W_2^2(\Omega)$ вытекают равенства $\rho^{\nu+\beta/2}(\partial\Omega^{(i)})u_\nu(\partial\Omega^{(i)})=0$ для всех $i=\overline{1,n}$. Тогда по утверждению Б) леммы 1 функция $u_\nu(x)$ принадлежит пространству $H^2_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$. Докажем теперь справедливость неравенства коэрцитивности (20). По лемме 3 для функции $u_\nu(x)$, принадлежащей $H^2_{2,\nu+\beta/2,0}(\Omega)$, имеет место неравенство

$$\|u_\nu(x)\|^2_{H^2_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)} \le C_{16}\big(\|Lu_\nu(x)\|^2_{L_{2,\nu-\beta/2}(\Omega)} + \|u_\nu(x)\|^2_{H^1_{2,\nu+\beta/2-1}(\Omega)}\big). \tag{25}$$

Оценим сверху слагаемые правой части этого неравенства. Так как $Lu_\nu(x)=f(x)$, то при условии (18) справедлива оценка

$$\|Lu_\nu(x)\|_{L_{2,\nu-\beta/2}(\Omega)} \le C_{17}\|f(x)\|_{L_{2,\mu}(\Omega)} \tag{26}$$

с положительной постоянной C_{17}, не зависящей от $u_\nu(x)$. При выполнении условий (11) и (18) функция $u_\nu(x) \in H^1_{2,\nu+\beta/2-1}(\Omega)$. Действительно, из (18) следует, что $\nu - 1 \geq \mu + \beta/2 - 1$, откуда $\nu - 1 \geq \nu_1$. Из неравенства (11) получаем следующую цепочку неравенств:

$$C_1(2\delta|\nu| + 1) + \frac{C_2}{2} < \left(\frac{C_4C_5}{2}\right)^{1/2} < (C_4C_5)^{1/2}, \quad \delta|\nu| < 2\delta|\nu| < \frac{(C_4C_5)^{1/2} - C_2/2}{C_1} - 1,$$

$$\nu - 1 < |\nu| < \frac{1}{\delta}\left(\frac{(C_4C_5)^{1/2} - C_2/2}{C_1} - 1\right),$$

из которой вытекает, что $\nu - 1 < \nu_2$, т.е. значение $\nu - 1$ принадлежит полуинтервалу $[\nu_1, \nu_2)$. По теореме 2 для всех $\nu \in [\nu_1, \nu_2)$ R_ν-обобщенное решение единственно, следовательно, R_ν-обобщенное и $R_{\nu-1}$-обобщенное решения задачи (2), (3) совпадают, а тогда по теореме 1 функция $u_\nu(x)$ принадлежит пространству $H^1_{2,\nu+\beta/2-1}(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|u_\nu(x)\|_{H^1_{2,\nu+\beta/2-1}(\Omega)} \leq C_{18}\|f(x)\|_{L_{2,\mu}(\Omega)} \tag{27}$$

с положительной постоянной C_{18}, не зависящей от $u_\nu(x)$. Из неравенств (25)–(27) следует оценка (20). Теорема 3 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Хабаровского края (проект 04-01-97004).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рукавишников В.А.* // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 6. С. 1318–1320.
2. *Рукавишников В.А.* О R_ν-обобщенном решении задачи Дирихле в прямоугольнике. Владивосток, 1989 (Препринт / ВЦ ДВО АН СССР).
3. *Рукавишников В.А., Рукавишникова Е.И.* // Методы численного анализа. Владивосток, 1993. С. 22–48.
4. *Рукавишников В.А.* // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 4. С. 447–449.
5. *Рукавишников В.А., Рукавишникова Е.И.* // Докл. РАН. 1994. Т. 338. № 6. С. 731–734.
6. *Беспалов А.Ю., Рукавишников В.А.* // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 6. С. 727–731.
7. *Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I.* // The First Chinese–Korean Joint Workshop on Recept Advances in Numerical Analysis and Its Applications. Seoul, Korea, 2001. P. 76–96.
8. *Рукавишников В.А.* // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 4. С. 451–453.
9. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.

Вычислительный центр ДВО РАН,
г. Хабаровск

Поступила в редакцию
25.08.2004 г.