Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

I. R. Stakhovsky, Wavelet analysis of seismic time series,
Dokl. Akad. Nauk, 1996, Volume 350, Number 3, 393–396

https://www.mathnet.ru/eng/dan4004

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.171
January 20, 2026, 05:28:28

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1996, том 350, № 3, с. 393–396

ГЕОФИЗИКА

УДК 530.1fr+550.348.436

ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ РЯДОВ

© 1996 г. И. Р. Стаховский

Представлено академиком В.Н. Страховым 26.06.95 г.

Поступило 04.07.95 г.

В настоящее время бурно развиваются математические средства исследования мультифрактальных структур, появляющихся в результате развития нелинейных динамических систем, и, в частности, многих природных систем. Примером такой самоорганизующейся природной системы традиционно считается рассеянная внутриплитовая сейсмичность [1, 2]. Для анализа сейсмических данных в середине 80-х годов был разработан аппарат вейвлетного преобразования (англ. wavelet transform) [3], однако впоследствии вейвлетный анализ приобрел характер самостоятельного аналитического средства, позволяющего вычислить параметры глобального самоподобия объекта на основе исследования его локального самоподобия [4]. Именно возможность локализации сингулярностей вероятностной меры объекта делает вейвлетный анализ незаменимым средством для выявления мультифрактальной структуры, а также нарушений регулярности временных рядов. В данной работе вейвлетное преобразование будет применено для скейлингового анализа временных сейсмических рядов (одномерных сигналов).

Введем определения. Через $g(t)$, где t – время, будем обозначать вейвлетную анализирующую функцию, в общем случае комплекснозначную (ее свойства мы определим ниже). Термин "вейвлет" обычно используется для обозначения результата аффинного преобразования анализирующей вейвлетной функции $g_{\alpha,\beta}(t)$:

$$g_{\alpha,\beta}(t) = \alpha^{-0.5} g\{\alpha^{-1}(t-\beta)\}, \quad t \in R, \quad \alpha, \beta \in R, \quad \alpha > 0. \tag{1}$$

Здесь α и β – параметры растяжения и сдвига соответственно. Вейвлетным преобразованием функции $f(t)$ (сигнала) называется функция, в общем случае комплекснозначная, определяемая выражением вида

$$T_g(\alpha, \beta) = \alpha^{-0.5} \int f(t) g^*\{\alpha^{-1}(t-\beta)\} dt. \tag{2}$$

Звездочка обозначает комплексное сопряжение. В некоторых случаях целесообразно проводить преобразование в фурье-образах сигнала и вейвлетной анализирующей функции, которые можно обозначить черточкой над соответствующей буквой:

$$T_g(\alpha, \beta) = \alpha^{0.5} \int \bar{f}(\omega) \bar{g}^*(\alpha\omega) e^{i\omega\beta} d\omega. \tag{3}$$

По определению анализирующая вейвлетная функция должна удовлетворять условию допустимости

$$2\pi \int |\bar{g}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{|\omega|} < \infty. \tag{4}$$

Для вещественных вейвлетов условие допустимости имеет вид

$$\int g(t) dt = 0. \tag{5}$$

Таким образом, свертка сигнала с вейвлетной функцией не вносит в результат преобразования постоянной составляющей. Обратное преобразование

$$f(t) = \iint T_g(\alpha, \beta) g_{\alpha,\beta}(t) \alpha^{-2} d\alpha\, d\beta \tag{6}$$

позволяет восстановить сигнал, из которого отфильтрованы линейные составляющие. Вейвлетную функцию называют прогрессивной, если $\bar{g}(\omega) = 0$ при $\omega < 0$. Для сигнала конечной энергии $\int |f(t)|^2 dt < \infty$ вейвлетное преобразование сохраняет энергию:

$$\int |f(t)|^2 dt = \int |T_g(\alpha, \beta)|^2 \alpha^{-2} d\alpha\, d\beta. \tag{7}$$

Наиболее часто используют такие допустимые и прогрессивные вейвлетные функции, как "мексиканская шляпа" (вторая производная от функции Гаусса):

$$M(t) = (1 - t^2)\exp(-t^2/2), \tag{8}$$

Институт сейсмологии Объединенного института физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской Академии наук, Москва

или "французская шляпа" (кусочно-постоянная функция)

$$F(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1, \\ -0.5, & 1 < |t| < 3, \\ 0, & |t| > 3. \end{cases} \quad (9)$$

Комплекснозначная вейвлетная функция может иметь вид

$$g(t) = M(t)e^{ibt} \text{ или } g(t) = F(t)e^{ibt}. \quad (10)$$

Возможны и другие варианты вейвлетных функций, ориентированных на решение специальных задач. Вейвлетное преобразование позволяет, в частности, определить количественные параметры самоподобия временного ряда, если он обладает свойством масштабной инвариантности. Пусть исследуемый ряд, элементы которого представляют собой сумму каких-либо событий в единицу времени, дискретизирован на регулярной сетке, ячейки которой будем называть "боксами". Построим вероятностную меру множества событий, составляющих ряд p следующим образом:

$$p_i = \frac{A_i}{A}, \quad (11)$$

где A_i – число событий в i-м боксе, A – суммарное число событий ряда, p_i – оценка вероятности попадания события в i-й бокс. Мера p может быть названа мультифрактальной, если она отвечает условию локального самоподобия

$$p_i \propto r^{a_i} \quad (12)$$

и условию глобального самоподобия

$$\sum N_a \propto \rho(a, r) r^{-f(a)}. \quad (13)$$

Здесь a_i – индекс сингулярности меры на i-м боксе, r – размер бокса, $\rho(a, r)$ – медленно меняющаяся по a и r функция, близкая к единице при $r \to 0$ [5], $\sum N_a$ – число боксов, характеризующихся общим значением индекса сингулярности a. Функцию размерностей $f(a)$, описывающую скейлинг объекта, называют спектром сингулярностей. Несколько алгоритмов вычисления спектра сингулярностей (box-counting, прямое вычисление $f(a)$) рассматриваются, например, в [6]. Из (12) следует, что для самоподобного временного ряда в точке t_0 выполняется условие

$$p(t_0, \lambda r) \propto \lambda^a p(t_0, r). \quad (14)$$

Здесь $\lambda > 0$. Важным свойством вейвлетного преобразования является ковариантность к сдвигу и растяжению: если $T_g(\alpha, \beta)$ есть преобразование от $f(t)$, то $f(t - t_0)$ будет преобразовано в $T_g(\alpha, \beta - t_0)$, а $\lambda^{-0.5} f(t/\lambda)$ в $T_g(\alpha/\lambda, \beta/\lambda)$. Вейвлетное преобразование мультифрактальной меры определяется следующим образом ([4], с. 183):

$$T_g(\alpha, \beta) = \alpha^{-0.5} \int g^*\{\alpha^{-1}(t - \beta)\} dp(t). \quad (15)$$

Проведя вейвлетное преобразование правой и левой частей пропорции (14), получаем [4]

$$T_g(\lambda\alpha, \lambda\beta + t_0) \propto \lambda^{a-0.5} T_g(\alpha, \beta + t_0), \quad (16)$$

т.е. результат вейвлетного преобразования меры обнаруживает локальный скейлинг с показателем степени k ($k = a - 0.5$), который связан с индексом сингулярности меры в той же точке. При принятом определении вейвлетного преобразования (15) индекс сингулярности меры может быть получен из соотношения

$$a = k + 0.5. \quad (17)$$

Таким образом, вейвлетное преобразование может использоваться для расчета индексов сингулярности меры в конкретных точках. Практически это осуществляется путем вычисления в двойном логарифмическом масштабе коэффициента линейной регрессии модуля результатов преобразования в конкретной точке при различных значениях параметра растяжения на величину параметра растяжения (с учетом (17)). В работе [7] предлагается алгоритм восстановления спектра сингулярностей меры по известному распределению индексов сингулярности, однако на этом пути приходится преодолевать серьезные трудности при нормировке спектра.

Обратимся к практической реализации вейвлетного анализа временных сейсмических рядов. Рассмотрим область размером 160 × 160 км в окрестности эпицентра Рачинского землетрясения на Кавказе (29.04.1991, $M = 7.0$, координаты эпицентра 42.83N, 43.51E). Кавказский региональный каталог приводит для указанной территории данные о 1768 землетрясениях с магнитудой $M > 1.5$ за 1962–1991 гг. Эти события, объединенные по интервалам в 20 дней и очищенные от афтершоков Боржомского землетрясения (01.03.1970, $M = 4.7$), составляют временной сейсмический ряд (или множество событий), подвергнутый вейвлетному анализу. На рис. 1А по оси ординат отложены доли меры этого множества, сосредоточенные на i-х боксах. По оси абсцисс для удобства отложены не доли единичного отрезка, а календарное время. В компьютерных расчетах была использована вещественная анализирующая вейвлетная функция типа "французская шляпа" (9), наиболее подходящая для анализа дискретных сигналов. Численная реализация процедуры вейвлетного преобразования предусматривала использование изменения параметра масштаба в диапазоне 1–25 и изменения параметра сдвига в диапазоне 1–490. Результаты вейвлетного преобразования меры при значениях параметра масштаба 3 и 15 показаны на

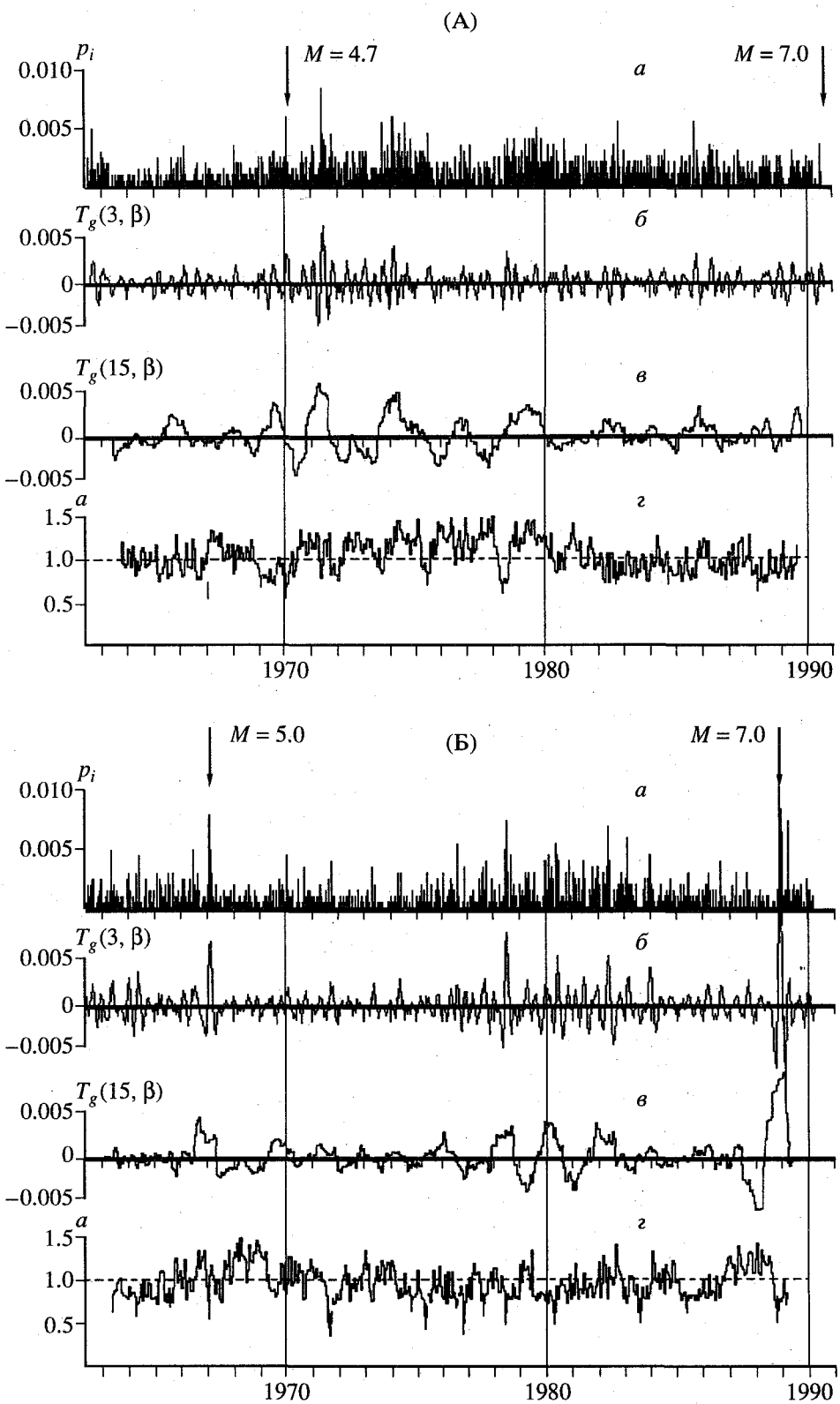

Рис. 1. Результат вейвлетного анализа временных сейсмических рядов для областей эпицентров Рачинского (А) и Спитакского (Б) землетрясений. *а* – вероятностная мера множества сейсмических событий (временного сейсмического ряда), предшествовавшего землетрясению, дискретизированная на регулярной сетке из 518 боксов (по ординате откладывается доля меры на i-м боксе, по абсциссе – календарное время); *б* – результат вейвлетного преобразования меры при $\alpha = 3$; *в* – то же при $\alpha = 15$; *г* – распределение индексов сингулярности меры (штриховыми линиями показано значение a_{ex}).

рис. 1А (*б* и *в* соответственно). На рис. 1А, *г* представлен результат расчета индексов сингулярности меры множества сейсмических событий (временного сейсмического ряда).

Аналогичные расчеты проведены нами и для временного сейсмического ряда, элементы которого представляют собой числа землетрясений с магнитудой $M > 1.5$ в 20-дневных интервалах за 1962–1990 гг., чьи эпицентры приходятся на участок земной коры размером 80×80 км в окрестностях эпицентра Спитакского землетрясения (07.12.1988, $M = 7.0$, координаты эпицентра 40.90N, 44.20E). Кавказский региональный каталог приводит информацию о 1578 таких землетрясениях. Результаты расчетов представлены на рис. 1Б.

Для обоих рядов число нулевых элементов невелико, поэтому очевидно, что монофрактальные размерности мер близки к единице, а значения индексов a_{ex}, при которых спектры достигают экстремума, несколько больше единицы (они отмечены на рис. 1 и штриховыми линиями. Как для одного, так и для другого временных сейсмических рядов распределения индексов сингулярности мер имеют низкочастотные составляющие, которые совершают нерегулярные колебания относительно значений a_{ex} и которые "модулированы" высокочастотной составляющей. Для геофизических приложений может оказаться интересным, что и Рачинскому, и Спитакскому землетрясениям предшествовали длительные интервалы времени, в течение которых индексы сингулярности имели преимущественно пониженные относительно a_{ex} значения. Продолжительность интервала пониженных значений составила 10 лет для Рачинского землетрясения (рис. 1А, *г*) и почти 15 лет для Спитакского (рис. 1Б, *г*). Понижение значений индексов предшествовало также двум другим наиболее сильным землетрясениям этих регионов (Боржомскому 1970 г. и Спитакскому 1967 г.), моменты которых отмечены на рисунках стрелками. Поскольку вейвлетное преобразование инвариантно относительно линейных трендов, представляется важным отметить, что изменение временной структуры сейсмичности перед сильными землетрясениями выявлено только по нелинейной составляющей сигнала. Мы видим, таким образом, что вейвлетный анализ временных сейсмических рядов способен дать новую информацию о процессе подготовки землетрясений. Отметим, однако, что имеющиеся в нашем распоряжении временные сейсмические ряды пока слишком коротки, чтобы по ним можно было делать окончательные выводы об их самоподобии.

Автор благодарен проф. Д.М. Сонечкину за консультации в процессе работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bak P., Tang C.* // J. Geophys. Res. 1989. V. 94. № 15. P. 635–637.
2. *Scholz C.H.* In: Spontaneous formation of space-time structures and criticality. Dordrecht: Kluwer, 1991. P. 41–56.
3. *Goupillaud P., Grossmann A., Morlet J.* // Geoexploration. 1984. V. 23. P. 85.
4. *Combes J.M., Grossman A., Tchamitchian P.* Ed. Wavelets: time frequency methods, phase space. Springer: B.; N. Y., 1989. 400 p.
5. *Mandelbrot B.* // PAGEOPH. 1989. V. 131. № 1–2. P. 5–42.
6. *Стаховский И.Р.* // Мат. моделирование. 1995. Т. 7. № 6. С. 54–64.
7. *Atmanspacher H., Scheingraber H., Wiedenmann G.* // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. № 7. P. 3954–3963.