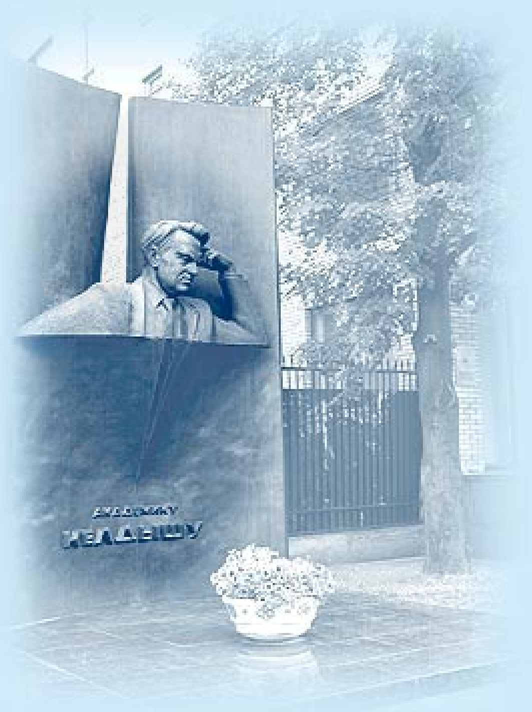
Н. Н. Фимин, В. М. Чечеткин, Детерминизм генезиса крупномасштабных структур в астрофизике,
Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2023, 067

ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 67 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Н.Н. Фимин, В.М. Чечеткин

Детерминизм генезиса крупномасштабных структур в астрофизике

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Фимин Н.Н., Чечеткин В.М. Детерминизм генезиса крупномасштабных структур в астрофизике // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 67. 24 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2023-67
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-67

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Н.Н. Фимин, В.М. Чечеткин

ДЕТЕРМИНИЗМ ГЕНЕЗИСА КРУПНОМАСШТАБНЫХ СТРУКТУР В АСТРОФИЗИКЕ

Москва — 2023

Н.Н. Фимин, В.М. Чечеткин

Детерминизм генезиса крупномасштабных структур в астрофизике

Установлены критерии формирования нестационарных псевдопериодических структур в системе гравитирующих частиц, описываемых системой уравнений Власова–Пуассона. Исследованы условия ветвления решений нелинейного интегрального уравнения для обобщенного гравитационного потенциала, приводящие к возникновения когерентных сложных состояний относительного равновесия в в нестационарных системах массивных частиц.

Ключевые слова: уравнение Власова–Пуассона, потенциал Ньютона–Гурзадяна, псевдопериодичность структур, уравнение Фредгольма

N. N. Fimin, V. M. Chechetkin

Determinism of genesis of large–scale structures in astrophysics

The criteria for the formation of non-stationary pseudo-periodic structures in a system of gravitating particles, described by the Vlasov–Poisson system of equations. Conditions studied branching solutions of a nonlinear integral equation for a generalized gravitational potential, leading to the emergence of coherent complex states of relative equilibrium in non-stationary systems of massive particles.

Key words: Vlasov–Poisson equation, Newton–Gurzadyan potential, pseudo-periodicity of structures, Fredholm equation

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 20-11-20165.

Оглавление

1. Введение

Описание генезиса космологических структур типа стенок (или "стенок/блинов Зельдовича" [1]) и квазиодномерных (с физической точки зрения) нитей, образующих так называемую "космическую паутину", является в настоящее время чрезвычайно обсуждаемой темой среди групп исследователей по всему миру. Превалирующими концепциями в вопросах анализа комплекса вопросов, связанных с эволюцией распределения масштабов галактик и скоплений, в настоящее время являются выявление статистических закономерностей в наборах наблюдательных данных и попытки разумного объяснения феноменологических аппроксимаций этих закономерностей. В то же время изучение механизма реализации псевдоупорядоченности на космологических масштабах по умолчанию признается малоперспективным (в первую очередь, в связи с отсутствием верифицированного наблюдательного материала). Общепринятыми предположениями здесь можно считать результаты гидродинамического и кинетического моделирования при наличии значительного числа модельных предположений относительно начальных данных, физических допущений относительно влияния темной энергии, темной материи (скалярных полей, присутствия экзотических частиц и пр.). Кроме этого, часто сложно оценить правомерность вычислительных аспектов используемой математической модели, в том числе априорно задаваемых правил прохождения каустических или возникающих артефактно–сеточных особенностей.

В значительной степени отправной точкой для расчетов (в частности, для плоской метрики пространства–времени, близкой к современной эпохе) являются промежуточные и финальные стадии модельной неустойчивости Джинса, то есть распад существовавшей структуры первичного объекта с известным распределением элементарных субструктур в фазовом пространстве (либо, для гидродинамического описания, известным набором макропараметров и поля скоростей) [2]. Очевидно, в этом случае существует значительный произвол при задании дополнительных условий, который может приводить к существенно различающимся результатам; единственным критерием истинности моделирования, кажется, может служить только получение физической картины, совпадающей с реальными современными наблюдениями (чем и объясняется особое, даже чрезмерное, внимание к анализу статистики распределений). Однако, исходя из последнего требования, мы не можем освободиться от влияния целой совокупности факторов с принципиально нелинейным уровнем влияния в постановке начально–краевой задачи, которые приводят к наблюдаемому в настоящее время набору распределений галактик. Таким образом, мы не можем зафиксировать, исходя из фактически стационарной картины современной наблюдательной эпохи, конкретные дополнительные условия для задач математического моделирования космической паутины непосредственно после окончания инфляционной эпохи (и, естественно, также в более ранний период); это ограничение усугубляется введением в рассмотрение случайных локальных возмущений параметров астрофизической среды с дополнительным нелинейным взаимодействием мод (при этом такое взаимодействие должно приводить к анизотропной самоупорядоченности в динамике среды на масштабах, существенно превышающих масштабы флуктуаций).

Авторы полагают, что особую роль при исследовании строения и эволюции космологических структур должны играть подходы, основанные на детерминистически обусловленном возникновении крупномасштабных структур (когерентных в смысле наличия трансляционной инвариантности субструктур в самой структуре, или при сравнении с существующими вблизи аналогичными) в космологическом фоне. То есть "самосборка" таких структур как результат взаимодействия мелкомасштабных возмущений, создающих "порядок из хаоса" (согласно сценарию образования "блинов" Я.Б. Зельдовича) [3], представляется маловероятной, а основным протекающим процессом структурного генезиса являются, подобно классическим турбулентным когерентным гидродинамическим структурам в трактовке О.М. Белоцерковского [4]–[5], первичное формирование крупной структуры с дальнейшей ее эволюцией в виде перехода между состояниями относительного равновесия (которые соответствуют экстремумам энтропии системы при адиабатическом изменении ее других термодинамических или топологических параметров [6]–[7]); система при этом может быть многосвязной, именно такой, как наблюдаемая "космическая паутина". В настоящей работе авторы показывают возможность естественного построения моделей космологических структур на основе качественного анализа свойств решений уравнений системы Власова–Пуассона при учете модификации формы гравитационного потенциала, с включением дополнительного члена, включающего космологический параметр (потенциал Ньютона–Гурзадяна). Установлена возможность появления многосвязного строения для плоской системы гравитирующих субструктур, показано отличие кинетического расчета от гидродинамического для обобщенного джинсовского распада, с использованием методов теории бифуркаций решений интегральных уравнений продемонстрирована возможность появления вторичных структур между узлами "космической паутины".

2. Модель Милна–МакКри и система уравнений Власова–Пуассона с модифицированным гравитационным взаимодействием

Начнем рассмотрение механизма возникновения космологических структур, следуя [8]–[10], с нерелятивистской модели Милна–МакКри расширения Вселенной с модифицированным гравитационным взаимодействием [11]–[13]. Для этого можно ввести в рассмотрение шар массы $M(R)$ (содержащий частицы одинаковой массы m, так что масса частиц в шаре $M = \int mf(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,dmd\mathbf{v}$, в том числе в случае равномерного распределения $M = 4\pi\rho R^3/3$), на поверхности которого справедлив закон сохранения энергии в форме

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{\gamma M}{R} - \frac{c^2\Lambda}{12}R^2 = E = \mathrm{const}, \tag{1}$$

при этом для параметра Хаббла H (определяемого посредством соотношения $dR/dt = HR$) получается уравнение

$$\frac{dH}{dt} + H^2 + \frac{4\pi\gamma\rho}{3} - \frac{1}{6}c^2\Lambda = 0. \tag{2}$$

Будем считать известными значения $R(t = t_0) = R_0$, $H(t = t_0) = H_0$, $\rho(t = t_0) = \rho_0$ в момент времени $t = t_0$. Тогда можно определить значение постоянной $E = E_0 = (1/2)H_0^2R_0 - \gamma\cdot\frac{4\pi}{3}\rho_0R_0^2 - \frac{c^2}{12}\Lambda R_0^2$, и корректно поставить начальные условия для дифференциального уравнения эволюции радиуса шара $R(t)$:

$$\Big(\frac{dR}{dt}\Big)^2 = \frac{a_1}{R} - a_2R^2 - a_3, \quad a_1 \equiv \frac{8\pi}{3}\gamma\rho_0R_0^3, \quad a_2 \equiv \frac{c^2\Lambda}{12}, \tag{3}$$

$$a_3 \equiv \frac{8\pi}{3}\gamma R_0^3\Big(\rho_0 - \frac{3H_0^2}{8\pi\gamma} - \frac{3c^2\Lambda}{8\pi\gamma R_0}\Big).$$

Решения этого уравнения могут быть выражены в терминах вырожденных эллиптических интегралов Лежандра 3–го рода (см., например, [14]):

$$R(t) = I_3^*(-a_2, 0, -a_3/6, a_1/4, 0).$$

Для случая $\Lambda \equiv 0$ отсюда получается — при соответствующих соотношениях начальной и так называемой критической плотности частиц — классическая модель Фридмана для открытой (безгранично расширяющейся) и закрытой (циклической) модели Вселенной. При этом в качестве данных Коши для рассматриваемого обыкновенного дифференциального уравнения принято брать

$R(t = 0) = 0$, $R'_t(t = 0) = +\infty$ (что означает фактически игнорирование стадии экспоненциального расширения). Следует отметить, что учет неаннулирующегося космологического параметра, как ранее установили авторы [15]–[16], не приводит к принципиальному изменению структуры решений задачи Коши (3); помимо этого, модифицированная модель Милна–МакКри вполне устойчива к изменению начальных данных (это связано с автомодельностью ее решений и теоремой Гурзадяна о полном виде ньютоновского потенциала в среднем по Чезаро для сферической области [11]). Последнее позволяет заключить, что процессы, связанные с возникновением неоднородностей распределения вещества в текущей пост–деСиттеровской эпохе фактически представляют собой продолжение таковых на ранних стадиях развития Вселенной. Таким образом, для изучения строения макромасштабного космологического распределения барионной материи можно использовать систему уравнений Власова–Пуассона без учета эффектов общей теории теории относительности (естественно, за исключением присутствия в правой части уравнении Пуассона дополнительного слагаемого с Λ–членом, ответственного за антигравитационные эффекты). Основным объектом нашего интереса является анализ свойств отклонений от состояния локального равновесия космологической системы; поскольку равномерное распределение не является равновесным в общем случае в системе массивных частиц с дополнительным осцилляторным взаимодействием геометрического генезиса (для суммарного супергармонического потенциала), необходимо обратиться к изучению эволюции материи в окрестностях скоплений частиц, существование которых обусловлено флуктуациями, возникающими на стадии, предшествующей модели Милна (гравитационный потенциал в достаточно далекой зоне от этих скоплений близок к модифицированному ньютоновскому, и поэтому можно ввести понятия относительного равновесия вещества в этой зоне; при этом распределение частиц данного равновесного состояния должно удовлетворять принципу максимума энтропии и обладать свойством усреднения через введение набора гидродинамических макропараметров).

Система уравнений Власова–Пуассона для описания динамики многочастичной системы (в условиях учета фридмановского расширения Вселенной) в d–мерной ($d = 2, 3$) совокупности частиц одинаковых масс m в соответствии с предложенной в работах [17]–[19] источникообразным представлением самосогласованного гравитационного поля записывается в следующей форме:

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathrm{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}F) - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{x}} \Phi(F) = 0, \tag{4}$$

$$\Phi(F) \equiv \int_{\omega_{\mathbf{x}'}} \int_{\omega_{\mathbf{v}'}} \mathfrak{Y}_d(\mathbf{x}-\mathbf{x}') F(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t_*)\, d\mathbf{x}' d\mathbf{v}',$$

где $\mathfrak{Y}_d(r) \sim Y_d^{(1)}(r) + Y_d^{(2)} \cdot r^2 + Y_d^{(3)}$ (здесь соответствующая притяжению между частицами $Y_d^{(1)}(r) \in L_1^{loc} \bigcap C^2(\bar{\omega})$ — интегрируемая (и обладающая надлежащей гладкостью вне нуля) в некоторой ограниченной области $\omega_d = \omega_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^d$ функция, $Y_d^{(2)} \in \mathbb{R}^1$ — постоянная; мы будем предполагать, что с точки зрения внешнего наблюдателя эффект космологического расширения воздействует на субструктуры квазидвумерной физической структуры так же, как в трехмерном случае). Можно показать (см. п. 3 ниже), что для произвольного конечного момента времени $t_* \in \mathbb{R}_+^1$ имеет место модифицированное уравнение Пуассона:

$$\Delta_{\mathbf{x}}^{(d)} \Phi(F)\big|_{t=t_*, \forall t_* \in \mathbb{R}_+^1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \gamma_d \rho(\mathbf{x}) - C_1, \tag{5}$$

$$\rho(\mathbf{x}) \sim m \int F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t_*)\, d\mathbf{v} \quad (\gamma_3 \equiv \gamma, \ \ C_1 = C_1(\Lambda)).$$

Уравнение (5) приобретает вид так называемого (неоднородного) уравнения Лиувилля–Гельфанда (уЛГ) [20], [21], если принять плотность распределения частиц равной таковой в случае в случае интегрирования функции распределения Максвелла–Больцмана (здесь и далее мы не учитываем зависимость равновесной функции распределения от интегралов движения, отличных от энергии): $F = F_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t_*) \propto \Omega\big(\varepsilon[\mathbf{v}(t_*); \Phi(\mathbf{x})]\big|_{ext}\big)$ по скоростям; (при этом выбирается регулярная ветвь Phi); в этом случае в энергетической окрестности локального экстремума

$$d\Omega/d\varepsilon\big|_{r \to r_c} \approx 0, \qquad r_c = \big(\gamma m/(3\Lambda c^2)\big)^{1/3}$$

(при этом силовой член в уравнении Власова либо аннулируется, либо это точка поворота на фазовой плоскости эволюции системы) мы получаем условно–равновесное решение (иначе — квазистационарное состояние) системы уравнений Власова–Пуассона (оно характеризуется, помимо выделенного уровня энергии частиц на регулярной ветви потенциала, также средней квазиравновесной статистической температурой системы T и калибровкой потенциала или плотностью $\rho_0 = A \exp(-\Phi(0)/T)$ пространственного распределения в т. $\mathbf{x} = 0$). Для простоты приведем явную форму уЛГ в 2–мерном случае:

$$-\Delta^{(2)} U = \lambda \exp(U) - c^2 \Lambda / T, \quad U = -\Phi/T,$$

$$\lambda = 2\gamma_d m N \rho_0 / T, \quad T \equiv -\frac{\partial\Phi/\partial x_j}{\partial\rho/\partial x_j}\Big|_{j=1,2}.$$

С математической точки зрения здесь потенциалы–решения уЛГ соответствуют континуальному распределению плотности материи (в области расчета $\omega \subset \mathbb{R}^d$ с заданными условиями на границе $\partial\omega$); очевидно, подобное распределение с физической точки зрения определенно идеализированно. Однако, основываясь на Теореме 1.3 [22] и результатах работ [23]–[24], можно утверждать, что в случае изменения внутренних параметров функции $\lambda(\rho_0, T)$ в ограниченной области пространства существует система дискретных масс $\mathbf{q}_i\Big|_{i=\overline{1,k}}$ (определяемых через особые точки функции Робэна), чье действие на удаленную частицу эквивалентно заданному непрерывному распределению вещества:

$$\frac{\lambda \exp(U_\lambda)}{\displaystyle\int_\omega \exp(U_\lambda) d\mathbf{x}} \rightharpoonup 8\pi \sum_{i=1}^{k} \delta_{\mathbf{q}_i}.$$

Поскольку здесь присутствует инвариантность масштабов, можно видеть, что замена дискретных частиц на континуальное распределение справедлива как для локального единичного скопления (например, понимаемой как элементарная субструктура), так и для системы субструктур, формирующей космологическую двумерную стенку. Гравитационный потенциал в окрестности точки экстремума близок к постоянной, силовое влияние самосогласованного поля на движение частиц отсутствует, и поэтому инерционное движение частиц приводит к длительному существованию возникших их формаций без искажения локальной топологии.

Весьма существенным допущением в дальнейшем будет утверждение, использованное ранее в работах по выводу уравнений типа Власова–Эйнштейна и Власова–Пуассона из суммарного действия Гильберта–Паули [25] системы массивных частиц в гравитационном поле [26]–[27]: поскольку варьирование действия по гравитационному полю (приводящее к уравнению Пуассона) и варьирование по частицам (приводящее к уравнениям движения по геодезическим линиям и, после введения функции распределения частиц, — к уравнению Лиувилля), являются независимыми операциями, то можно в первом приближении разделить уравнение эволюции распределения частиц и уравнения для самосогласованных гравитационных полей, предполагая, что частицы движутся в заданном поле, после чего изменения функции распределения частиц в соответствии с решением уравнения Лиувилля продуцируют изменение полей. Тем самым мы получаем возможность отдельно изучить уравнение для потенциала. Однако оно является существенно нелинейным, и, вообще говоря, для его исследования потребуется использовать методы теории ветвления решений нелинейных уравнений. Тем не менее, весьма важные выводы относительно можно получить даже из линеаризованного варианта уравнения для гравитационного потенциала, что мы и продемонстрируем далее.

3. Свойства уравнения для гравитационного потенциала в интегральном представлении

Рассмотрим систему N точечных тел с одинаковыми массами m, парное взаимодействие между которыми описывается модифицированным законом гравитации Ньютона–Гурзадяна; эта система может служить моделью при рассмотрении эволюции локального возмущения (сгущения плотности) для ситуации движения материальных точек при первоначально равномерном фридмановском расширении Вселенной либо в процессе развития в эту эпоху ранее возникших неоднородностей. Функция Гамильтона системы в выделенной области имеет вид:

$$(\mathfrak{H}_N)_\epsilon = \sum_j^N \left(\frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} + \sum_i{}' \Phi_\epsilon^{(2)}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) + m\Phi_{ext}(\mathbf{x}_j) + B(\partial\omega, \mathbf{x}_j) \right), \qquad (6)$$

где: $\Phi_{ext}(\mathbf{x}_j)$ — потенциал внешнего гравитационного поля в т. $\mathbf{x}_j$, $B(\partial\omega, \mathbf{x}_j)$ — потенциальная энергия взаимодействия частиц с границами, включающая в себя отражение частиц от границы (периодичность границ) и воздействие за счет изменения на границе локальной температуры околоравновесных частиц внутри области ω (см. [30]–[31]); индекс ϵ у двухчастичного потенциала $\Phi^{(2)}\big(r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\big) \sim c_1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| + c_2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2$ означает регуляризацию слабополярной функции при малом аргументе, т. е. мы заменяем (для определенности в 3–мерном случае) под интегралом функцию $\Phi^{(2)}(r)$ на функцию:

$$\Phi_\epsilon^{(2)}\big(r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\big) = \begin{cases} (c_1 r(\mathbf{x}, \mathbf{x}'))^{-1} + c_2 r^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), & r(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \geq \epsilon; \\ (2\epsilon)^{-1} \cdot \big(3 - |r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')|^2/\epsilon^2\big) + c_2 r^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), & r(\mathbf{x}, \mathbf{x}') < \epsilon. \end{cases}$$

(в этом случае объемный интегральный потенциал с суммируемой ограниченной плотностью частиц является непрерывной функцией вплоть до границ системы). В условиях отсутствия значимых градиентов макрохарактеристик частицы системы могут быть описаны с помощью формализма канонического ансамбля, характеризующегося соответствующей (около)равновесной плотностью в фазовом $6N$–мерном пространстве:

$$\varrho_N = (N!\Omega_\epsilon)^{-1}\exp(-\mathfrak{H}_N/T), \quad \Omega_\epsilon = (N!)^{-1}\int \exp(-(\mathfrak{H}_N)_\epsilon/T)\prod_j d\mathbf{x}_j d\mathbf{p}_j.$$

Каноническая вероятностная мера частиц в конфигурационном подпространстве имеет вид

$$\mu_N(T) = \Theta_\epsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{j,i}{}' \Phi_\epsilon(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|)/T\Big)d\omega^N,$$

$$d\omega^N \equiv \prod_k^N \exp\big(-m\Phi(\mathbf{x}_k)/T\big)d\mathbf{x}_k,$$

$$\Theta_\epsilon = \int \exp_\omega\Big(-\frac{1}{2}\sum_{j,i;\, j\neq i}\Phi_\epsilon(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|)/T\Big)d\omega^N,$$

и расходимость конфигурационного интеграла $\Theta_\epsilon \to \infty$ при $\epsilon \to 0$ означает $|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| \to 0$; выделяя две частицы из N–частичного ансамбля ($\mathbf{x}_N \equiv \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_{N-1} \equiv \mathbf{x}'$), можно рассмотреть плотность вероятностной меры $\mathfrak{P}_N(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega_{N-2};\epsilon)$:

$$\mathfrak{P}_N(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega_{N-2};\epsilon) = \Theta_\epsilon^{-1}(N,T)\exp\big(-\Phi_\epsilon(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)\big)\mathcal{P}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega_{N-2};\epsilon),$$

где $\mathcal{P}(...)$ — положительная функция, включающая потенциалы взаимодействия остальных частиц, причем $\mathfrak{P}_N(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega_{N-2};\epsilon \to 0) \to 0$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{x}')$. Последнее означает, что $w^* - \lim_{\epsilon\to 0}\mathfrak{P}_N(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega_{N-2};\epsilon) = \mathfrak{P}_{N-2}(\mathbf{r})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$, что позволяет рассматривать канонический ансамбль в пределе среднего поля для десингуляризованных потенциалов; согласно теореме Хьюитта-Саважа о представлениях перестановочно–инвариантной вероятностной меры [32], любая такая (допустимая) мера μ на конфигурационном подпространстве фазового пространства рассматриваемой многочастичной системы представима в виде интеграла по $d\varrho = \rho(\mathbf{x})d^3x$, $\rho(\mathbf{x})$ можно актуализировать в форме классической плотности. Функционал свободной энергии для нашей системы имеет в этом случае вид

$$\mathcal{F}(\rho) = \frac{1}{2}\int_\omega\int_{\omega'}\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')N\Phi_\epsilon(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)d\mathbf{x}d\mathbf{x}' + \int_\omega \frac{1}{2}\rho(\mathbf{x})\zeta(\mathbf{x})d\mathbf{x} +$$

$$+\int_\omega \rho(\mathbf{x})\ln\big(\rho(\mathbf{x})\big)d\mathbf{x}, \zeta(\mathbf{x}) = m\Phi_{ext}(\mathbf{x}) + B(\partial\omega,\mathbf{x}).$$

Минимизация $\mathcal{F}(\rho)$ происходит на функциях

$$\rho(\mathbf{x}) = \mathfrak{R}^{-1} \cdot \exp\left(T^{-1}\Big(\int_{\omega'} \rho(\mathbf{x}')N\Phi_\epsilon(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)d\mathbf{x}' + \zeta(\mathbf{x})\Big)\right), \tag{7}$$

$$\mathfrak{R} \equiv \int_{\omega''} \exp\left(T^{-1}\Big(\int_{\omega'} \rho(\mathbf{x}')N\Phi_\epsilon(|\mathbf{x}''-\mathbf{x}'|)d\mathbf{x}' + \zeta(\mathbf{x}'')\Big)\right)d\mathbf{x}''.$$

Поскольку наиболее вероятное состояние термодинамической системы соответствует минимуму свободной энергии в ней, решение последнего уравнения соответствует равновесному распределению плотности в исследуемой многочастичной системе.

Если вспомнить исходное уравнение Власова–Пуассона (4), то его простейшим стационарным решением является функция $f(\mathbf{x},\mathbf{v}) = \widehat{f}(\chi)$, где $\chi = m\mathbf{v}^2/2 + \Phi(\mathbf{x})$ (энергетическая подстановка), $\widehat{f}(\chi) \in C^2(\mathbb{R})$. Уравнение Пуассона при выборе $\widehat{f}(\chi) = c_1 \exp(-\chi/T)$ (равновесное распределение Максвелла–Больцмана, известное из столкновительной теории), можно представить в виде

$$\Delta^{(d)}\Phi = \gamma_d \varkappa_d(T) \exp\big(-\Phi/T\big) - c^2\Lambda, \tag{8}$$

$$\varkappa_d(T) = c_0|s_d|^2 \int_{\mathbb{R}^1_+} \exp\big(-\eta^2/(2T)\big)\eta^{d-1}d\eta$$

($|s_d|$ — площадь d–мерной сферы единичного радиуса). В данном случае потенциал $\Phi(\mathbf{x})$ относится к усредненному самосогласованному полю, определяемому интегрированием в формуле (7) локальных плотностей частиц с ядром в виде межчастичного потенциала $\Phi_\epsilon(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ (соответственно, плотность частиц, как было отмечено ранее в п. 2, можно рассматривать как континуальную функцию, а также переходить в ней к слабой топологии изолированных точек). Эквивалентность температур для канонического и микроканонического описания, вообще говоря, не вполне очевидна, однако существенные проблемы могут возникнуть только для сильно неравновесных систем с отрицательными термодинамическими температурами (см. Заключение). Влияние границ системы (7), в свою очередь, чрезвычайно важно, и мы в дальнейшем этим вопросом займемся — но уже используя более подходящий формализм.

Форма уравнения Лиувилля–Гельфанда для гравитационного потенциала в космологических системах является по сути локальной (поскольку это дифференциальное уравнение), и с его помощью довольно затруднительно описывать глобальные процессы в самосогласованном поле для анализа эволюции всей системы частиц (субструктур). При исследовании нелокальных эффектов целесообразно рассматривать интегральный вариант уравнения для потенциала. Однако естественным ограничением для применения такой формы в аналитических и численных расчетах является очевидная необходимость учета границ области, содержащей исследуемую систему частиц, на значение потенциала в данной точке (явный вид и эффекты влияния члена $\zeta(\mathbf{x})$ в уравнении (7)). Конечно же, это связано с тем, что для системы частиц, взаимодействующих по закону Ньютона–Гурзадяна, корректно поставить на границе исследуемой области нулевое условие Дирихле $\Phi(\mathbf{x}\big|_{\partial\omega}) = 0$ весьма затруднительно (для общего случая несимметричной многочастичной системы это, по–видимому, в принципе нереалистично).

Рассмотрим следующую постановку физической задачи: во фридмановском потоке имеются области повышенной плотности, которые являются следствиями флуктуационных возмущений на раннем этапе развития Вселенной; может ли гравитационное взаимодействие между этими областями ω_j (каждая из которых содержит иерхархию субструктур различного размера) или в окрестности каждой области формировать (квази)стационарную структуру, обладающую признаками упорядоченности? Существенным различием по сравнению с заряженной плазмой с наличием дебаевского экранирования, допускающей псевдооднородные равновесные распределения частиц, является то, что космологические субструктуры в процессе реализации из первичных возмущений (локальных повышений) плотности макромасштабных объектов имеют сферически–симметричные ($d = 3$) или радиально–симметричные ($d = 2$) формы (в соответствии с теоремой Ги–Нидаса–Ниренберга [33]); в соответствии со строением межчастичного потенциала $\mathfrak{Y}_d$ в окрестности сферы с повышенной плотностью возникает радиально–симметричный слой, в котором преобладает притяжение к точке, являющейся центром упомянутой сферы, и полубесконечный сферический слой с превалированием отталкивания (для системы из двух сфер, содержащих материю с повышенной плотностью, имеет место конкуренция этих двух центров, приводящая либо к разрушению одного из них, либо, в связи с фридмановским расширением пространства, возникновению зон отталкивания между ними).

Можно рассмотреть два подхода при нахождении гравитационного потенциала в окрестности области, содержащей систему взаимодействующих частиц:

1) решение уравнения для потенциала (неоднородного Лиувилля–Гельфанда) при заданных условиях Дирихле на некоторой, априори определенной (имеющей значительный произвол при своем выборе), границе области $\partial\omega_j$ (эта граница должна включать только одно локальное сгущение плотности);

в этом случае можно рассматривать как внутреннюю, так и внешнюю задачи Дирихле (что соответствует попыткам установить значения потенциала — следовательно, и плотности частиц — соответственно внутри и вне границы $\partial\omega_j$). Влиянием потенциалов соседних областей при определенных условиях можно пренебречь. Данные на границах должны быть согласованы (в смысле непрерывности решения) с получаемым решением;

2) аналогичную ситуацию можно рассматривать также для задачи Неймана; однако здесь вполне точно можно определить границу области $\partial\omega_j$ за счет наличия максимума потенциала взаимодействия (в этой точке производная потенциала аннулируется). Однако при такой постановке задачи естественно возникает вопрос о правомерности области описания динамики частиц только зоной притяжения потенциала.

Физические аспекты решаемой задачи, очевидно, определяют способ постановки дополнительных условий для нелинейного уравнения потенциала. Здесь мы ограничимся использованием условий Дирихле (за счет теоремы об эквивалентности гравитационного поля сферы и точки в ее центре). Тем самым, нас будет интересовать, возникают ли внутри (или вне) фиксированной области ω при заданном значении потенциала на границе вторичные решения уравнения Лиувилля–Гельфанда (8), обладающие свойством (квази)периодичности.

Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона, согласно [34]–[35], может быть представлено через посредство функции Грина эллиптического оператора и значения потенциала на границах. В явном виде это решение имеет вид:

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\int_\omega \mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\left(\gamma_d\rho(\mathbf{x}') - \frac{c^2\Lambda}{4\pi}\right)d\mathbf{x}' - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\omega'}\Phi|_{\partial\omega}\mathbf{n}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{x}')|_{\partial\omega}dS', \tag{9}$$

где $\mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ — функция Грина задачи Дирихле для неоднородного уравнения Пуассона. Выбирая в качестве области расчета шар радиуса $\mathcal{R}$ ($\omega = \{\tilde{\mathbf{x}};\, 0 \le |\tilde{\mathbf{x}}| \le \mathcal{R}\}$), можно в случае близости распределения частиц изотропному полагать, что значения потенциала на его границе в соответствии с теоремой Ньютона–Гурзадяна будут равны $\Phi|_{\partial\omega} = -\gamma_d M/\mathcal{R} - c^2\Lambda\mathcal{R}^2/6$ ($M = Nm$). Заменяя $\rho(\mathbf{x}) = (4\pi)^{-1}\varkappa_d(T)\gamma_d\exp\big(-\Phi/T\big)$, и определяя в соответствии с [36] функцию Грина для рассматриваемой области Дирихле:

$$\mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{x}') \equiv 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}{2\ell+1}\frac{x^\ell_< x^\ell_>}{\mathcal{R}^{2\ell+1}},$$

$$x_< = \min(|\mathbf{x}|,|\mathbf{x}'|),\quad x_> = \max(|\mathbf{x}|,|\mathbf{x}'|),$$

получаем нелинейное интегральное уравнение для потенциала $\Phi(\mathbf{x})$ (для $d = 3$):

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\varkappa_d(T)\gamma_d \int_{\omega'} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\right) \exp\big(-\Phi(\mathbf{x}')/T\big) d\mathbf{x}' - \frac{c^2\Lambda}{6}\mathbf{x}^2 + C_0,$$

$$C_0 = -\frac{\gamma_d M}{\mathcal{R}} - \frac{c^2\Lambda\mathcal{R}^2}{6}.$$

После очевидных преобразований его можно записать в виде неоднородного уравнения типа Гаммерштейна для обезразмеренного потенциала U_H:

$$U_H(\mathbf{x}) = \widehat{\mathfrak{W}}\big(U_H(\mathbf{x})\big), \quad \widehat{\mathfrak{W}}\big(U_H(\mathbf{x})\big) \tag{10}$$

$$\equiv \lambda_H(T) \int_{\omega'} \underbrace{\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\right)}_{\mathcal{K}(\mathbf{x},\mathbf{x}')} \exp\big(-U_H(\mathbf{x}')\big) d\mathbf{x}' + \alpha(\Lambda,T)|\mathbf{x}|^2;$$

$$\lambda_H(T) \equiv \frac{-\varkappa_3(T)\gamma_3}{T} \exp\Big(-\frac{C_0}{T}\Big), \quad \alpha(\Lambda,T) = -\frac{c^2\Lambda}{6T}, \quad U_H = \frac{\Phi - C_0}{T}.$$

Следует отметить, что для сферически симметричного распределения плотности

$$\int_{\omega'} \mathcal{G}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \to C_1(=\mathrm{const}).$$

4. Качественный анализ интегрального уравнения для потенциала

Уравнение (10) содержит в себе весьма полную информацию о поведении рассматриваемой космологической динамики многочастичной системы с гравитационным взаимодействием. В первую очередь следует указать на вполне очевидное отсутствие у данного уравнения при $d = 3$ решения во всей области исследования (и во всем пространстве, за исключением 2–мерных поверхностей–изограв) в виде постоянного потенциала (в отличие от классического ньютоновского случая, для которого гравитация эквивалентна притяжению при $\Lambda \equiv 0$). Таким образом, в этом случае глобальное равномерное распределение материи, как условие согласования модифицированного уравнения Пуассона и уравнения Власова, можно рассматривать лишь как некое абстрактное приближение с целью дальнейшего продолжения решения данной системы уравнений по параметру.

Рассмотрим линеаризованный (вблизи точки $U_H(0) = U_0$) вариант уравнения (10) в однородном и неоднородном случаях:

$$U^{\dagger} = \widehat{\mathfrak{W}}_0'\big(U^{\dagger}\big), \quad U^{\ddagger} = \widehat{\mathfrak{W}}_0'\big(U^{\ddagger}\big) + \alpha|\mathbf{x}|^2. \tag{11}$$

Оператор $\widehat{I} - \widehat{\mathfrak{W}}'_0$, где $\widehat{\mathfrak{W}}'_0 \equiv \widehat{\mathfrak{W}}'[U_0]$ — Фреше–производная интегрального оператора Гаммерштейна из правой части первого уравнения, принадлежит классу нетеровых операторов нулевого индекса со слабой особенностью и знакопеременным ядром; поскольку функция Грина симметрична по своим координатам, для слабо отклоняющихся от сферически–симметричного распределений материи $\widehat{\mathfrak{W}}'_0$ также можно считать самосопряженным. Для малых амплитуд отклонения $\delta U^\dagger$ от выделенного решения мы получаем возможность применить известный математический аппарат анализа фредгольмовых операторов к однородному линейному уравнению $\delta U^\dagger - \lambda \int_{\omega'} \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \exp(-U_0^\dagger)\delta U^\dagger d\mathbf{x}' = 0$. Для простоты выкладок без потери общности можно принять $U_0^\dagger = 0$, и искать периодические решения последнего уравнения (в виде разложения по собственным функциям $\mathfrak{b}_j = c_\omega \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x})$ ядра $\mathcal{K}$ в области $\omega \subseteq \mathbb{R}^3$) в виде $\delta U^\dagger = \sum_j \mathfrak{a}_j(c_\omega)\exp(i\mathbf{q}\mathbf{x})$ ($q_{\ell=1,2,3} = 2\pi/d$, кубический случай очевидным образом обобщается для $d_\ell \neq d_k$). Подстановка этого выражения в первое уравнение совокупности (11) дает

$$1 = \lambda \int_{\omega'} \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \exp\big(- i\mathbf{q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\big)\, d|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|. \tag{12}$$

Вводим критическое значение параметра $\lambda = \lambda_c$ (соответствующее случаю $d \to \infty$, $q_\ell \equiv 0$), с его помощью можно записать критерий существования периодических решений для линеаризованного интегрального однородного уравнения Пуассона:

$$\lambda = \left(\int_\omega \mathcal{K}(r) \frac{\sin(qr)}{qr} r^2 dr d\theta d\phi \right)^{-1} \geq \lambda_c \equiv \left(\int_\omega \mathcal{K}(r) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \right)^{-1}. \tag{13}$$

Очевидно, данный критерий пригоден только для случая $\Lambda \equiv 0$, и только для 2–частичного приближения взаимодействия. При этом подразумевается, что корень $\mathbf{q}$ уравнения (12) является единственным (в этом случае распределение потенциала будет чисто периодическим); если наличествуют несколько (несоизмеримых) корней $\mathbf{q}_s$, распределение потенциала будет принадлежать классу почти–периодических функций. Учет коллективных функциональных взаимодействий в системе N частиц приводит к (однородному) уравнению вида

$$\delta U^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_{k=1,\dots,N} \int_{\omega_1} \dots \int_{\omega_k} \mathcal{K}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \times$$

$$\times \big(\exp(-\delta U^\dagger(\mathbf{x}_1)) \dots \exp(-\delta U^\dagger(\mathbf{x}_k)) \big)\, d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_k.$$

После линеаризации этого уравнения получаем

$$\delta U^{\dagger}(\mathbf{x}) = \sum_k \lambda_k \int_{\omega_1} ... \int_{\omega_k} \mathcal{K}_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k) \sum_{\ell} \delta U^{\dagger}(\mathbf{x}_{\ell}) \prod_{s=1}^{k} d\mathbf{x}_s.$$

Соответствующий (13) критерий возникновения трехмерных периодических решений можно представить в следующей форме:

$$\int_{\omega} \sum_k \sum_s^k \lambda_k \frac{\sin(qr)}{qr} \left(\int_{\omega_1} ... \int_{\omega_{s-1}} \int_{\omega_{s+1}} ... \int_{\omega_k} \mathcal{K}_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k) \frac{\prod_{n=1}^{k} d\mathbf{x}_n}{d\mathbf{x}_s} \right) \times \\ \times r^2 \sin(\theta)\, dr d\theta d\phi = 1. \tag{14}$$

Следовательно, учет кластерных взаимодействий в многочастичной системе согласуется с учетом двухчастичных взаимодействий: возникновение периодической структуры распределения потенциала (и плотности материи в пространстве) в пространстве (в линейном однородном приближении) происходит скачкообразно при достижении определенной (квазиравновесной псевдокинетической) температуры в исследуемой системе. Периоды структур определяются из условий (12) и (14).

Для неоднородного линейного уравнения (второго уравнения (11)) можно, используя теорему Гильберта–Шмидта [37], получить явный вид (единственного) решения в виде резольвентного ряда (равномерно и абсолютно сходящегося ряда Фурье по собственным функциям ядра $\mathcal{K}$), при $\lambda \neq \lambda_{\ell}$ ($\ell = 1, 2, ...$):

$$\delta U^{\ddagger}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\omega} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{b}_{\ell}(\mathbf{x}) \mathfrak{b}_{\ell}(\mathbf{x}')}{\lambda_{\ell} - \lambda} \alpha |\mathbf{x}'|^2 \, d\mathbf{x}' + \alpha |\mathbf{x}|^2,$$

где λ_{ℓ} — характеристические числа однородного уравнения (соответствующие собственным функциям $\mathfrak{b}_{\ell}(\mathbf{x})$). Таким образом, периодичность структуры при учете отталкивания (т. е. при $\Lambda \neq 0$) вырождается — в простейшем случае — в композицию синусоидальной функции и растущей ветви параболы, что приводит к выглаживанию периодичности и фактическому доминированию отталкивания на определенном расстоянии (в канале взаимодействия между двумя ранее сформировавшимися неоднородностями в псевдооднородном распределении материи); поскольку этот процесс можно рассматривать как парное взаимодействие, становится понятным механизм образования пустот (войдов) в равномерно распределенном изначально материальном континууме: анизотропия направлений импульсов частиц в каналах между неоднородностями I и II формирует не кубическую решетку ($d_{1,2,3} = d$), а квазиодномерные слои ($d_3 \ll d_{1,2}$), профиль скоростей которых в упомянутом канале тормозится для первоначально быстрых частиц (и тем самым синхронизуется как равномерное распределение в скоростном пространстве) за счет отталкивания в дальней зоне вторым компонентом макросистемы (неоднородностью II на другом конце канала). Можно предположить, что значительная часть массы неоднородности переходит в плоское образование, соответствующее первому минимуму потенциала, причем эта ситуация в канале парного взаимодействия зеркальна: отталкивание, понимаемое как внешняя сторонняя сила, со стороны II при этом приводит к квазистационарности стенки, сформированной неоднородностью I, и наоборот; фридмановское расширение пространства приводит к тому, что первоначально притягивавшиеся массивные неоднородности оказываются на расстояниях, на которых существеннее становится отталкивание из-за влияния космологического члена. Мы рассматриваем именно эту стадию.

Решение нелинейного уравнения Гаммерштейна для потенциала существенно отличается от решения уравнений Фредгольма. Если сначала обратиться к случаю $\Lambda \equiv 0$ (однородность уравнения), можно сразу указать на наличие у уравнения потенциала постоянного решения $U_H = U_H^{(0)} = \text{const}$. С физической точки зрения это означает, что мы рассматриваем среду (состоящую из частиц, взаимодействие между которыми соответствует только их взаимному притяжению), в которой нет первичных априорно заданных возмущений (идеальная фридмановская материя). Очевидно, это крайне неустойчивая система. Но даже без внешнего воздействия, приводящего к локальной коалесценции частиц, при достижении параметром λ (фактически являющимся функцией псевдокинетической температуры), некоторого критического значения, возникают решения нового типа, ответвляющиеся от постоянного.

Обозначим $\lambda_H = \lambda_H^{(0)} + \eta$, $U_H(\mathbf{x}) = U_H^{(0)} + u(\mathbf{x})$. Тогда, если разложить в ряд Маклорена экспоненту в подынтегральном выражении,то получим:

$$u(\mathbf{x}) - \lambda_H^{(0)} \exp(-U_H^{(0)}) \int_{\omega'} \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')u(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' =$$

$$\eta \exp(-U_H^{(0)}) \int_{\omega'} \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d\mathbf{x}' - \eta \exp(-U_H^{(0)}) \int_{\omega'} \mathcal{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')u(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' +$$

$$+(\eta+\lambda_H^{(0)})\exp(-U_H^{(0)})\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j(j!)^{-1}\int_{\omega'}\mathcal{K}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\big(u(\mathbf{x}')\big)^j d\mathbf{x}'.$$

Подставляя сюда $u(\mathbf{x})=\sum_{s=1}^{\infty}(\eta\exp(-U_H^{(0)}))^{s/2}\mathcal{X}(\mathbf{x})$ ($\mathcal{X}(\mathbf{x})$ — пока неизвестные функции, подлежащие определению), получаем последовательность зацепляющихся уравнений с линейной левой частью вида (оператором, ассоциированным с однородным уравнением Фредгольма):

$$\widehat{\mathfrak{N}}(\mathcal{D}_1)=\int_{\omega'}\mathcal{K}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\mathbf{x}'=0,$$

$$\widehat{\mathfrak{N}}(\mathcal{D}_2)=\int_{\omega'}\mathcal{K}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\left(1+\lambda_H^{(0)}\exp(-U_H^{(0)})\frac{(\mathcal{D}_1(\mathbf{x}'))^2}{2!}\right)d\mathbf{x}',...,$$

$$\widehat{\mathfrak{N}}(\mathcal{D}_j)\equiv\mathcal{D}_j+\lambda^{(0)}\exp(-U^{(0)})\int\mathcal{K}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\mathcal{D}_j(\mathbf{x}')d\mathbf{x}'.$$

Мы ранее получили форму первого члена ряда последовательных приближений: $\mathcal{D}_1(\mathbf{x})=c_\omega\cdot\sin(\mathbf{qx})$ (уравнение $\widehat{\mathfrak{N}}(\mathcal{D}_1)=0$ имеет периодические решения при выполнении критерия $\lambda^{(0)}\exp(-U^{(0)})\Omega(\mathbf{q})+1=0$, $\Omega(\mathbf{q})\equiv 4\pi\int\mathcal{K}(r)\big(\sin(qr)/(qr)\big)r^2dr$). Последовательно решая вышеприведенную систему уравнений, получим формальное решение для $u(\mathbf{x})$:

$$u(\mathbf{x})=\sum_{m=0}\big(\eta\exp(-U^{(0)})\big)^{m+1/2}\times$$

$$\times\left(\sum_{\ell=1}^{m}{}_{(I)}C_{2\ell+1}^{(2m+1)}\sin\big((2\ell+1)\mathbf{qx}\big)+{}_{(III)}C_{2m+1}\sin\big(\mathbf{qx}\big)\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\big(\eta\exp(-U^{(0)})\big)^{m}\left(\sum_{\ell=1}^{m}{}_{(II)}C_{2\ell}^{(2m)}\cos\big(2m\mathbf{qx}\big)+{}_{(III)}C_{2m}\sin\big(\mathbf{qx}\big)\right).$$

Полученный ряд при условии его сходимости представляет собой периодическую функцию с $T=T(|\mathbf{q}|)$. Поскольку все коэффициенты ${}_{(i)}C_{...}$ могут быть получены в явном виде последовательным вычислением, у нас есть возможность найти численные значения амплитуд гармоник в данном ряду Фурье. Тем самым можно получить "тонкую структуру" потенциала, а значит, и плотности частиц в формирующихся структурах, ответвляющихся от космологического решения с постоянной плотностью. Величина параметра η связана с отличием температуры среды от критической температуры, соответствующей критическому параметру λ_c.

Однако, как уже было сказано, приведенная выше методика требует знания "первичного" решения однородного уравнения Гаммерштейна для потенциала. Используя методы теории возмущения фредгольмовых операторов [39]–[40], можно построить решение неоднородного уравнения Гаммерштейна, опираясь на полученные выше результаты. Обозначим $\widehat{I}_+ \equiv \widehat{I} - \alpha|\mathbf{x}|^2$, тогда $\widehat{I}_+ - \widehat{\mathfrak{W}}_0'$ — нётеров оператор нулевого индекса, $\dim\mathfrak{Y} = 1$, $\mathfrak{Y} \equiv \mathrm{Ker}(\widehat{I}_+ - \widehat{\mathfrak{W}}_0')$. Условие, что оператор $\widehat{I}_+ - \widehat{\mathfrak{W}}_0'$ имеет псевдообратный, то есть ограниченный обратный из дополнения коядра $\mathfrak{Y}^{*\perp}$ в некоторое дополнение $\bar{\mathfrak{Y}}$ ядра $\mathfrak{Y}$, эквивалентно утверждению о существовании единственного элемента $v \in \bar{\mathfrak{Y}}$, такого, что $(\widehat{I}_+ - \widehat{\mathfrak{W}}_0')v = w$, $w \in \mathfrak{Y}^{*\perp}$. В этом случае нелинейное уравнение Гаммерштейна обладает единственным решением $\big(\lambda_H(\varepsilon), u_H(\varepsilon)\big)$, где ε — малый параметр, связанный с отклонением температуры от критической. Величины λ_H и u_H являются пределами последовательностей $\lambda^{\mu+1}(\varepsilon) = F_+(u^\mu(\varepsilon))$, $u^{\mu+1}(\varepsilon) = \varepsilon(\phi_0 + \varepsilon v^{\mu+1}(\varepsilon))$, $v^{\mu+1} \in \bar{\mathfrak{Y}}$ ($u^0(\varepsilon) = \varepsilon\phi_0$, $v^0(\varepsilon) = 0$, ϕ_0 — элемент ядра $\widehat{I}_+ - \widehat{\mathfrak{W}}_0'$). Тем самым у нас в распоряжении имеется процедура получения (единственного) решения неоднородного нелинейного уравнения для потенциала. Вблизи него можно рассмотреть некоторую окрестность, в которой могут появиться новые неголоморфные ветви его решения. Однако уже сейчас видно, что исследуемое уравнение Гаммерштейна имеет решение, по своему построению локально близкое неоднородному уравнению Фредгольма (дальнейшее получение вне области единственности построенного последовательным образом решения — заменяющего постоянное решение для однородного случая — ответвляющихся решений практически эквивалентно однородному случаю).

Таким образом, можно утверждать, что поведение потенциала в многочастичной системе способно создавать условия для возникновения крупномасштабных плоских космологических объектов, которые можно ассоциировать со стенками войдов. Принципиальную роль здесь играет включение в уравнение Пуассона дополнительного отталкивающего члена. Более того, с помощью развитого выше формализма можно получить тонкую структуру самих войдов, поскольку решения уравнения Гаммерштейна для потенциала имеют весьма сложную мультипериодическое строение, которое можно использовать для сравнения с наблюдательными данными.

5. Заключение

Возникновение двумерных структур типа "блинов Зельдовича" в литературе чаще всего связывается с возмущениями плотности, рост которых описывается с помощью классической или (слабо)релятивистской гидродинамики. Однако возникает вопрос о степени случайности, приводящей к таким возмущениям. В принципе, их можно рассматривать как вторичные, а первопричиной можно считать пространственно–разделенные максимумы распределения по скоростям (либо импульсам) гравитирующих частиц исходной большой системы. Таким образом, вполне естественно обратиться к кинетическому описанию эволюции многочастичного ансамбля, находящегося в квазистационарном состоянии (типа хаббловских потоков в расширяющейся фридмановской Вселенной). При этом крайне существенно наличие межчастичного взаимодействия (поскольку мы рассматриваем космологические масштабы, естественным аппаратом для изучения многочастичной динамики становится формализм уравнения Власова, поскольку больцмановские столкновения в данном случае играют исчезающе малую роль). Гидродинамическая методика ориентирована на исследование потока с возмущением во внешних полях, и межчастичное взаимодействие включает только через посредство коэффициентов вязкости и теплопроводности, влияние на которые могут оказывать и другие факторы (в частности, при численном расчете, включение так называемой сеточной вязкости, или наличие локально–вихревого движения, которое существенно изменяет упомянутые коэффициенты геометрическими факторами). В то же время в уравнении Власова присутствие и важность самосогласованного силового члена ясно обозначены, и влияние этого члена не замаскировано внешними превалирующими при моделировании квазифизическими элементами.

Таким образом, в работе предлагается кинетическая модель возникновения периодичности гравитационных страт (пустот, разделенных двумерными поверхностями), обусловленная наличием в хаббловском одномерном потоке пуассоновских структур, связанных с квазиосцилляторным уравнением, являющимся следствием собственно уравнения Пуассона. Данный подход является развитием моделей возникновения плоских структур на космологических масштабах, и обладает определенными преимуществами перед упомянутыми моделями: в соответствии с развиваемым подходом двумерные структуры возникают не в зависимости от случайных возмущений плотности среды, а каузально обусловлены физической реальностью в форме наличия между частицами гравитационного взаимодействия, что и заставляет их в процессе эволюции хаббловского потока не оставаться равномерно распределенными по пространству, а образовывать клеточную макроструктуру (это обусловлено трехмерностью евклидова пространства как предела пространства Минковского, если мы не учитываем в уравнении Пуассона кривизну пространства–времени).

Можно утверждать, что учет модифицированного закона гравитационного взаимодействия Ньютона–Гурзадяна позволяет производить не только качественную, но и количественную оценку размеров космологических структур, что связано с двухпотоковой моделью Хаббла и фактами совпадения размеров, связанных с формальными точками перегиба модифицированного закона гравитации и наблюдаемых размеров войдов.

Список литературы

[1] Zeldovich Ya. B., *Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations* // A&A, 5, 84, 1970.

[2] Bisnovatij-Kogan G.S., *Relativistic astrophysics and physical cosmology*, Krasand, Moscow, 2011.

[3] Zeldovich Ya.B., Novikov I.D., *Structure and evolution of the Universe*, Nauka, Moscow, 1975.

[4] Belotserkovkii O.M., A.M. Oparin, V.M. Chechetkin, *Turbulence: New Approaches*, Cambridge International Science Publishing Ltd, Cambridge, 2005.

[5] Belotserkovkii O.M., *Turbulence and Instabilities*, Edwin Mellen Pr., London, 2000.

[6] Chavanis P.H., *Gravitational instability of isothermal and polytropic spheres* // A&A 401, 15–42, 2003.

[7] Tremaine S., Henon M., Lynden-Bell D., *H–functions and mixing in violent relaxation* // MNRAS, 227, 543, 1986.

[8] Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M., *Vlasov–Maxwell–Einstein Type Equation and Transition to Weak Relativistic Approximation* // Comp. Math. Math. Phys. **59**, 1883, 2019.

[9] Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M., *he generalized Friedmann model as a self-similar solution of Vlasov–Poisson equation system* // Eur. Phys. J. Plus. **136**, 670, 2021.

[10] Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M., *Properties of the Vlasov–Maxwell–Einstein equations and their application to the problems of General relativity* // Grav. Cosmol. **26**, 173, 2020.

[11] Gurzadyan V.G. *The cosmological constant in the McCrea–Milne cosmological scheme* // Observatory. V. 105, 42, 1985.

[12] Gurzadyan V. G., *On the common nature of dark matter and dark energy: galaxy groups* // Eur. Phys. J. Plus, 134, 14, 2019.

[13] Gurzadyan V. G. Stepanian A., *Two fundamental constants of gravity unifying the dark matter and the dark energy* // Eur. Phys. J. C, 78, 632, 2018.

[14] Bateman H., Erdelyi A., *Higher Transcendental Functions, V.3*, McGraw-Hill Book Company, New York – Toronto – London, 1955.

[15] Vedenyapin V., Fimin N., Chechetkin V., *The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models* // Eur. Phys. Journ. Plus. 2020. No. 400. P. 14.

[16] Vedenyapin V. V., Fimin N.N., Russkov A.A., Voronina M.Yu., *On the derivation of the equations of gravitation and electrodynamics from the generalized least action principle and the nonrelativistic models of the Universe* // Journal of Vibration Testing and System Dynamics, **7**, N 1, pp. 39-47, 2023.

[17] Vlasov A.A., *Statistical distribution functions*, M.: Nauka, 1967.

[18] Vlasov A.A., *Theory of many particles.* M .: GITTL, 1950.

[19] Vlasov A.A., *Nonlocal statistical mechanics.* M.: Nauka, 1978.

[20] Gelfand I.M., *Some problems in the theory of quasilinear equations* // Amer. Math. Soc. Transl., V. 29, no. 2, 295-381, 1963.

[21] Suzuki T., *Global analysis for a two-dimensional eigenvalue problem with exponential nonlinearity* // Ann. Inst. H. Poincare – Analyse Non Lineaire, T. 9, 367–398, 1992.

[22] Esposito P., Grossi M., Pistoia A., *On the existence of blowing-up solutions for a mean field equation* // Ann. I. H. Poincare – Analyse Non Lineaire, T. 22, 227–257, 2005.

[23] Brezis H., Merle F., *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of* $-u = V(x)e^u$ *in two dimensions* // Comm. Partial Differential Equations, V.16, 1223–1253, 1991.

[24] Ma L., J Wei J., *Convergence for a Liouville equation* // Comment. Math. Helv., V. 76, 506–514, 2001.

[25] Hoyle F., Narlikar J.V., *Action at Distance in Physics and Cosmology*, W.H. Freeman and Company, 1974.

[26] Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E., *Kinetic Boltzmann, Vlasov and Related Equations*, Elsevier Insights, 2011.

[27] Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M., *The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models* // Intern. J. Mod. Phys. D **29**, 2050006, 2020.

[28] Vedenyapin V.V., *Boltzmann and Vlasov Kinetic Equations.* M.: Fizmatlit, 2001.

[29] Salzberg A.M., *Exact Statistical Thermodynamics of Gravitational Interactions in One and Two Dimensions* // J. Math. Phys. **6**, 158–160, 1965.

[30] Kiessling M. K.-H., *On the equilibrium statistical mechanics of isothermal classical self-gravitating matter* // J. Stat. Phys. **55**, Nos. 1/2, 203–257, 1989.

[31] Kiessling, M. K.-H., *Statistical Mechanics of Classical Particles with Logarithmic Interactions* // Comm. Pure Appl. Math. Vol. XLVI, 27–56, 1993.

[32] Hewitt E. and Savage L. J., *Symmetric Measures on Cartesian Products* // Trans. Am. Math. Soc., **80**, 470–501, 1955.

[33] Dupaigne L., *Stable solutions of elliptic partial differential equations*. Boca Raton (FL): Chapman & Hall/CRC, 2011.

[34] Sauvigny F., *Partial Differential Equations. Foundations and Integral Representations*. Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, 2006.

[35] Gilbarg D., Trudinger N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1983.

[36] Nowakowski M., *The consistent Newtonian limit of Einstein's gravity with a cosmological constant* // Int. J. Mod. Phys. D, **10**, No. 5, 649–661, 2001

[37] Tricomi F.G., *Integral Equations*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.

[38] Bratu G., *Sur les equations integrales non lineaires* // Bulletin de la S. M. F., T. 42, p. 113-142, 1914

[39] Keller H.B., Langford W.F., *Iterations, Perturbations and Multiplicities for Nonlinear Bifurcation Problems* // Arch. Rat. Mech. Anal., V. 48, 83–108, 1972.

[40] Krasnosel'sky M. A., *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, New York: Macmillan Co. 1964