Yu. L. Daletskii, Integration and differentiation of functions of Hermitian operators depending on a parameter, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, Volume 12, Issue 1, 182–186

Здесь $k_1, \ldots, k_p, l_1, \ldots, l_q - 1$—индексы, задающие представление, а символ $|\delta^{k_1}, \ldots, \delta^{k_p}|$ обозначает определитель

$$|\delta^{k_1}, \ldots, \delta^{k_p}| = \begin{vmatrix} \delta_1^{k_1} \ldots \delta_p^{k_1} \\ \ldots\ldots \\ \delta_1^{k_p} \ldots \delta_p^{k_p} \end{vmatrix}.$$

След $S(T_q)$ для $g \in G_{p,q}$ можно теперь определить как предельное значение $S(T_{g'})$ для $g' \in \mathfrak{A}$ при $g' \to g$.

Оказывается, что для следа $S(T_x)$ оператора $T_x = \int x(g)\, T_g\, dg$, который, как показал Хариш-Чандра [3], существует в обычном смысле, справедлива формула $S(T_x) = \int x(g)\, S(T_g)\, dg$.

4. Помимо дискретных, группа $G_{p,q}$ обладает еще q основными унитарными сериями представлений. Последние реализуются в пространствах функций, аналитических лишь по части переменных. Эти серии были описаны в [2]. Следы представлений этих серий вычисляются путем комбинирования изложенного выше метода вычисления следов дискретных серий с методами, применяемыми при вычислении следов представлений классических групп.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд и М. И. Граев, Унитарные представления вещественной унимодулярной группы, Изв. АН, серия матем, **17** (1953), 189—248.

[2] М. И. Граев, Основные серии унитарных представлений вещественных форм комплексной унимодулярной группы, ДАН **98** (1954), 517—520.

[3] Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie grup. III, Trans. Am. Math. Soc. **76**, № 2 (1954).

[4] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, Унитарные представления классических групп, Труды Матем. ин-та им. Стеклова **36** (1950), 1—288.

[5] М. И. Граев, Об одном общем методе вычисления следов бесконечномерных унитарных представлений вещественных простых групп Ли, ДАН **103** (1955), 357—360.

[6] И. М. Гельфанд и М. И. Граев, Об одном общем методе разложения регулярного представления группы Ли на неприводимые представления, ДАН **92** (1953) 221—224.

[7] V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. of Math. **48** (1947). 568—640.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Ю. Л. Далецкий

В настоящем сообщении излагаются результаты, полученные С. Г. Крейном и автором [1] и развитые далее автором.

1. Пусть $H(\tau)$ — эрмитова матрица, элементы которой непрерывно дифференцируемы по параметру τ. Если $H(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\tau)\, E_k(\tau)$ — спектральное

разложение $H(\tau)$, а $f(\lambda)$ — числовая функция, то, как обычно,

$$f(H(\tau)) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k(\tau))\, E_k(\tau).$$

Имеет место формула

$$\frac{df(H(\tau))}{d\tau} = \sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_k)}{\lambda_i - \lambda_k} E_i \frac{dH}{d\tau} E_k \tag{1}$$

при условии, что $f'(\lambda)$ непрерывна в окрестности точек $\lambda_k(\tau)$. Эта формула без изменений переносится на случай, когда $H(\tau)$ — оператор с дискретным спектром, а $\frac{dH}{d\tau}$ имеет конечную абсолютную норму. Можно обобщить ее и на случай неэрмитовых матриц.

2. Пусть $H(\tau)$ — эрмитов ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, обладающий при $A \leqslant \tau \leqslant B$ непрерывной по τ в смысле нормы операторов производной $\frac{dH}{d\tau}$. Естественно искать обобщение формулы (1) в виде

$$\frac{df(H(\tau))}{d\tau} = \int_S \left[\int_S \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} dE_\lambda(\tau) \frac{dH}{d\tau} \right] dE_\mu(\tau), \tag{2}$$

где S — спектр оператора H, а E_λ — соответствующее ему разложение единицы.

При обосновании этой формулы появляются трудности, связанные с выяснением смысла правой части, имеющей вид

$$\int_S F(\mu)\, dE_\mu(\tau), \tag{3}$$

где $F(\mu)$ — оператор, не коммутирующий, вообще говоря, с E_μ.

Можно показать, что интеграл (3), понимаемый как равномерный предел соответствующих интегральных сумм, существует, если оператор $F(\mu)$ обладает интегрируемой по Бохнеру производной.

После этого справедливость формулы (2) устанавливается для случая, когда $f(\lambda)$ — комплекснозначная функция, вторая производная которой по λ непрерывна на некотором сегменте $[a, b]$, содержащем спектр оператора $H(\tau)$ при $\tau \in [A, B]$.

При этом справедлива оценка

$$\left\| \frac{df(H(\tau))}{d\tau} \right\| \leqslant \left\| \frac{dH}{d\tau} \right\| \left[\max_\lambda |f'(\lambda)| + \frac{b-a}{2} \max_\lambda |f''(\lambda)| \right]. \tag{4}$$

В некоторых случаях удобнее оценка

$$\left\| \frac{df(H(\tau))}{d\tau} \right\| \leqslant \left[|f'(a)| + (b-a)|f''(a)| + \int_a^b (b-\lambda)|f'''(\lambda)|\, d\lambda \right] \left\| \frac{dH}{d\tau} \right\|, \tag{5}$$

для справедливости которой требуется абсолютная интегрируемость $f'''(\lambda)$ ($f(\lambda)$ здесь вещественнозначна).

3. Формула (2) сохраняется и при дифференцировании выражений типа

$$\int F(\lambda)\, dE_\lambda(\tau),$$

где $F(\lambda)$ — операторная функция. Пользуясь этим, можно найти выражения и для производных высшего порядка функции $f(H(\tau))$.

Если $f(\lambda)$ обладает непрерывной производной $f^{(2n)}(\lambda)$ и оператор $\frac{d^nH}{d\tau^n}$ непрерывен по норме, то

$$\frac{d^nf(H(\tau))}{d\tau^n} = n! \underbrace{\int \ldots \int}_{n+1} \Delta^{(n)}(f;\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})\, dE_{\lambda_1} \frac{dH}{d\tau} dE_{\lambda_2} \frac{dH}{d\tau} \ldots dE_{\lambda_{n+1}} + \ldots, \quad (6)$$

где $\Delta^{(n)}(f;\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ есть разделенная разность функции $f(\lambda)$ порядка n, взятая в точках $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$.

Невыписанные слагаемые содержат интегралы более низкого порядка и производные $\frac{d^kH}{d\tau^k}$ $(k > 1)$.

Если $H(\tau)$ линейно зависит от параметра $H(\tau) = H_0 + \tau H_1$, то в формуле (6) остается лишь первое слагаемое. В этом случае можно указать простые оценки типа (4), (5). Например,

$$\left\| \frac{d^nf(H(\tau))}{d\tau^n} \right\| \leqslant \left[\sum_{j=n}^{2n} \frac{|f^{(j)}(a)|}{(j-n)!}(b-a)^{j-n} + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-\lambda)^n\, |f^{(2n+1)}(\lambda)|\, d\lambda \right] \left\| \frac{dH}{d\tau} \right\|^n. \quad (7)$$

4. Приведенные результаты можно обобщить при некоторых предположениях на случай, когда $H(\tau)$ — неограниченный самосопряженный оператор с областью определения, не зависящей от τ.

Если спектр $H(\tau)$ имеет люк, то при этом можно воспользоваться дробно-линейным преобразованием, приводящим к ограниченному оператору. Затем рассматривается случай, когда спектр сплошной. Указанные выше формулы остаются справедливыми во всяком случае, если производные $f(\lambda)$ достаточно быстро убывают на бесконечности.

Эти результаты можно уточнить, если, в частности, оператор $H(\tau)$ положителен (вообще полуограничен), а $\frac{dH}{d\tau}$ ограничен.

В случае, когда $H(\tau)$ линейно зависит от τ, а $f(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty \lambda^k\, |f^{(k+1)}(\lambda)|\, d\lambda \leqslant M \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n),$$

имеем:

$$\left\| \frac{d^nf(H(\tau))}{d\tau^n} \right\| \leqslant \int_0^\infty \lambda^n\, |f^{(2n+1)}(\lambda)|\, d\lambda. \quad (8)$$

5. Пусть $H(\tau)$ и $f(\lambda)$ удовлетворяют условиям, при которых существуют производные оператора $f(H(\tau))$ до достаточно высокого порядка. Обычным

путем, интегрируя по частям, получим формулу Тейлора

$$f(H(\tau)) = f(H(\tau)) + (t-\tau)\frac{df(H(\tau))}{d\tau} + \ldots + \frac{(t-\tau)^n}{n!}\frac{d^n f(H(\tau))}{d\tau^n} + R_n(t, \tau),$$

где

$$R_n(t, \tau) = \frac{1}{n!}\int_{\tau}^{t} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(H(x))\,(t-x)^n\,dx. \tag{9}$$

Исходя из (9), можно получать оценки для остаточного члена в конкретных случаях.

В качестве примера можно привести разложение в ряд по степеням параметра

$$e^{-(H_0+\varepsilon H_1)} = e^{-H_0} + \varepsilon \int_0^{\infty}\!\!\int \frac{e^{-\lambda_1} - e^{-\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}\, dE_{\lambda_1} H_1\, dE_{\lambda_2} + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^n \underbrace{\int \ldots \int}_{n+1} \Delta^{(n)}(e^{-\lambda}; \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})\, dE_{\lambda_1} H_1 \ldots dE_{\lambda_{n+1}} + \ldots,$$

сходящееся равномерно при тех ε, для которых оператор $H_0 + \varepsilon H_1$ остается положительным. Из этого разложения легко выводятся формулы термодинамической теории возмущений [2].

После некоторого преобразования получим известную формулу, используемую в квантовой электродинамике (см. [3], [4]):

$$e^{-(H_0+\varepsilon H_1)} = e^{-H_0} - \varepsilon \int_0^1 e^{-H_0(1-s)} H_1 e^{-H_0 s}\, ds +$$

$$+ \varepsilon^2 \int_0^1 s_1\, ds_1 \int_0^1 e^{-H_0(1-s_1)} H_1 e^{-H_0 s_1(1-s_2)} H_1 e^{-H_0 s_1 s_2}\, ds_2 - \ldots$$

Формулы такого рода выводятся обычно различными способами. Приведенные выше соображения дают общий метод получения разложений для операторов вида $f(H_0 + \varepsilon H_1)$.

Заметим, что в обозначениях Фейнмана [4] формула (2) имеет вид

$$\frac{df(H)}{d\tau} = \int_0^1 f'[H_1(1-s) + H_3 s]\left(\frac{dH}{d\tau}\right)_2 ds.$$

6. Приведенные выше результаты позволяют следующим образом трактовать теорию возмущений самосопряженных операторов (см. [5]). Оператор ортогонального проектирования на некоторое инвариантное подпространство оператора $H(t)$ может быть представлен в виде функции $f(H(t))$, где $f(\lambda)$ — числовая функция, равная единице на соответствующей этому подпространству части спектра оператора $H(t)$ и нулю на остальной части спектра. Если при этом обе части спектра замкнуты, то функцию $f(\lambda)$ можно считать дифференцируемой достаточное число раз. Представляя оператор $f(H(t))$ в виде разложения по степеням параметра с помощью формулы Тейлора, мы сможем изучать изменение инвариантного подпространства оператора $H(t)$.

Рассмотрим простейший случай. Пусть $H(\varepsilon) = H_0 + \varepsilon H_1$, где H_0 и H_1 — самосопряженные операторы, возможно и неограниченные, но с общей областью определения. Пусть λ_0 — изолированная точка спектра оператора H_0. При малом изменении ε та часть $\Lambda_0(\varepsilon)$ спектра $H(\varepsilon)$, в которую перейдет точка λ_0, будет оставаться в достаточно малой окрестности этой точки. Поэтому, если $f(\lambda)$ равна единице в указанной окрестности λ_0 и нулю в окрестности остальной части спектра, то при достаточно малых ε для оператора ортогонального проектирования на инвариантное подпространство оператора $H(\varepsilon)$, соответствующее части $\Lambda_0(\varepsilon)$ его спектра, получим представление

$$P(\varepsilon) = f(H(\varepsilon)).$$

Так как $f(\lambda)$ имеет производные любого порядка в окрестности спектра S_{H_0}, то можно разложить $P(\varepsilon)$ в формальный ряд

$$P(\varepsilon) = P(0) + \varepsilon \int\int \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} dE_\lambda H_1 \, dE_\mu + \ldots \tag{10}$$

Отсюда легко получаются известные формулы, применяемые в квантовой механике.

В случае, когда H_0 — положительный оператор, а H_1 ограничен, для остаточного члена разложения (10) можно получить оценку

$$\| R_{n-1}(\varepsilon) \| \leqslant 2 \left[\frac{64(\lambda_0 + l)\,\varepsilon \, \| H_1 \|}{l^2 (1 - 2\alpha)^2} \right]^n,$$

справедливую при условии $\varepsilon \| H_1 \| \leqslant \alpha l$ $\Big(l$ — число, не большее расстояния от λ_0 до ее дополнения в спектре, и $0 < \alpha < \frac{1}{2}\Big)$.

Между прочим, из этой оценки легко вытекают известные результаты Реллиха относительно аналитичности собственных векторов.

7. Формулы дифференцирования могут быть применены к исследованию операторно-монотонных функций и их обобщений (см. [6], [7]) (на этот факт нам указал М. Г. Крейн).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Л. Далецкий и С. Г. Крейн, Формулы дифференцирования по параметру функций эрмитовых операторов, ДАН 76, 1 (1951).

[2] Л. Ландау и Е. Лифшиц, Статистическая физика, М., Гостехиздат, 1951, 112—115.

[3] И. Швингер, О калибровочной инвариантности и поляризации вакуума сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики» (1954), 272.

[4] Р. П. Фейнман, Операторное исчисление, имеющее приложения в квантовой электродинамике; сб. «Проблемы современной физики», 3 (1955), 41.

[5] Ю. Л. Далецкий, Про оцінку залишкового члену у формулі Тейлора для функцій ермітових операторів, ДАН УРСР 4 (1951).

[6] F. Kraus, Ueber konvexe Matrixfunktionen, Math. Zeitschr. 41 (1936), 18—42;

[7] K. Löwner, Ueber montone Matrixfunktionen, Math. Zeitschr. 38 (1933), 177—216.